

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

510.2/2
Sil p
Cop. 2



Lang
Post

WITHDRAWN
University of
Illinois Library
at Urbana-Champaign



Digitized by the Internet Archive
in 2026

FILIPPO SIBIRANI

LIBERO DOCENTE NELLA R. UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

RIASSUNTO - FORMULARIO

DI GEOMETRIA ANALITICA, ALGEBRA

CALCOLO INFINITESIMALE

CALCOLO VETTORIALE E MECCANICA RAZIONALE



ATHENÆUM

ROMA - 1915

FILIPPO SIBIRANI

LIBERO DOCENTE NELLA R. UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

RIASSUNTO - FORMULARIO

DI GEOMETRIA ANALITICA, ALGEBRA

CALCOLO INFINITESIMALE

CALCOLO VETTORIALE E MECCANICA RAZIONALE



ATHENÆUM

ROMA - 1915

RISERVATA LA PROPRIETÀ LETTERARIA

Silv
cop. 2

PREFAZIONE

Qualche anno fa, ad invito degli allievi dell' Università di Bologna, pubblicai, in litografia, un riassunto dei corsi di Geometria analitica e di Algebra del prof. Pincherle e del corso di Calcolo del prof. Arzelà. Quella pubblicazione, destinata, per il modo con cui era compilata, principalmente agli studenti di Bologna, incontrò pure il favore degli studenti delle altre Università e mi fu richiesta da numerosi laureati che si preparavano a sostenere gli esami di concorso alle scuole medie; sicchè, in breve, l'edizione fu esaurita.

Ritenni allora di fare cosa utile preparando un riassunto delle materie analitiche che si insegnano nel primo biennio della Facoltà fisico-matematica, cioè di Geometria analitica, Algebra, Calcolo differenziale ed integrale e loro applicazioni alla Geometria, Calcolo vettoriale e Meccanica razionale, riassunto che contenesse quanto di dette discipline si insegna nelle varie Università italiane.

Lo scopo che mi sono proposto con questa pubblicazione trascende da quello degli ordinari formulari, la maggior parte dei quali non costituiscono che un'arida successione di formule. Raccolgendo le definizioni, gli enunciati dei teoremi nella loro successione logica, i principali problemi e le loro soluzioni, le formule che queste e quelli traducono in simboli matematici, io ho

voluto offrire a quanti hanno già studiate le indicate materie il mezzo di rivedere sinteticamente lo svolgersi delle varie teorie, di richiamare i legami che esistono fra esse e di ravvivare la memoria di concetti, di risultati, di regole e di formule già note.

Un minuto indice analitico della materia renderà oltremodo spedito e facile l'uso del libro.

Lacune ed errori saranno certo qui contenuti; per colmare le prime e per riparare ai secondi, se il libro avrà l'onore di successive ristampe, mi sarà gradito l'aiuto dei cortesi lettori.

Bologna, dicembre 1914.

FILIPPO SIBIRANI.

GEOMETRIA ANALITICA.

CAPITOLO I.

Sistema di coordinate e loro trasformazioni

A. — Nella punteggiata, fascio di raggi e fascio di piani.

1. — **Punteggiata.** Fissato un punto O (*origine*), un'unità di misura lineare, un senso positivo sulla punteggiata (ciò che dà luogo alla *retta orientata*), ad ogni punto A corrisponde determinata la misura, in valore assoluto e segno, del segmento OA (che indicheremo con $\overline{OA}$), che dicesi **ascissa** di A . Se O è l'origine delle ascisse, O' un punto d'ascissa h , x l'ascissa di A , l'ascissa x' di A rispetto ad O' come nuova origine è $x' = x - h$.

Rapporto semplice di tre punti A, B, C o coordinata baricentrica di C (punto generico) **rispetto ad A e B** (punti fissi) è il rapporto $\lambda = \overline{AC} : \overline{BC}$, che si indica con (ABC) . Il valore di λ è indipendente dalla scelta dell'unità di misura lineare. Se $C \equiv A$ (*), $\lambda = 0$; se C è interno al segmento finito AB , $\lambda < 0$, se biseca AB , $\lambda = -1$; se C tende a B , λ tende a $-\infty$, se C è esterno al segmento finito AB , $\lambda > 0$, e se C tende a B , λ tende a $+\infty$, se C tende all'infinito, λ tende ad 1 crescendo o decrescendo a seconda che disuguali

(*) Vedi la tavola delle abbreviazioni e segni.

od uguali sono i segni di $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Se x_1, x_2, x sono le ascisse di A, B, C rispetto ad una qualunque origine, è $\lambda = (x - x_1) : (x - x_2)$. Se A_1, A_2 hanno rispetto ad A e B le coordinate baricentriche λ_1, λ_2 , se $\lambda' = (A_1 A_2 C)$, $\lambda = (A B C)$; è $\lambda' = (1 - \lambda_2) (\lambda - \lambda_1) : (1 - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2)$.

Birapporto dei quattro punti A, B, C, D è il rapporto $(A B C) : (A B D)$ che si rappresenta con $(A B C D)$. Fissati A, B, C , ad ogni punto D distinto da A corrisponde un valore unico e determinato per $k = (A B C D)$; k si può assumere per coordinata di D e si dice **coordinata birapporto** o **coordinata proiettiva** di D rispetto agli elementi fondamentali $A B C$. Il valore di k è positivo o negativo a seconda che la coppia $C D$ non separa o separa la coppia $A B$. È $(A B C A) = \pm \infty$; $(A B C B) = 0$; $(A B C C) = 1$; $(A B C D_\infty) = (A B C)$; $(A B C_\infty D) = (B A D)$; $(A B_\infty C D) = (C D A)$; $(A_\infty B C D) = (D C B)$.

Se x_1, x_2, x_3, x sono le ascisse di A, B, C, D rispetto ad una qualunque origine, è $k = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x - x_1}{x - x_2}$. Il secondo membro si indica con (x_1, x_2, x_3, x) e si dice *birapporto dei quattro numeri* x_1, x_2, x_3, x . Se k è la coordinata proiettiva di P rispetto agli elementi fondamentali $A B C$; k_1, k_2, k_3 le coordinate proiettive di $A' B' C'$ rispetto alla terna precedente, la coordinata proiettiva k' di P rispetto ad $A' B' C'$ è $k' = (k_1, k_2, k_3, k)$. Codesta relazione è della forma $k' = (\alpha k + \beta) : (\gamma k + \delta)$ con $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$: cioè una trasformazione lineare a determinante non nullo (Cap. XXVIII § 7). È poi $\alpha = k_3 - k_1$, $\beta = k_2(k_1 - k_3)$, $\gamma = k_3 - k_2$, $\delta = k_1(k_2 - k_3)$.

Coordinate proiettive omogenee di un punto D diconsi due numeri x, y in guisa che si abbia $x : y = k$, essendo k la coordinata proiettiva rispetto a tre dati elementi fondamentali. La trasformazione di coordinate proiettive omogenee si fa mediante le formule $q x' = \alpha x + \beta y$, $q y' = \gamma x + \delta y$, essendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ formati con le coordinate proiettive omogenee della terna nuova

rispetto all'antica, come lo sono formati nelle formule precedenti da k_1, k_2, k_3 .

2. — **Fascio di raggi.** L'insieme delle *semirette* (o *raggi*) di un piano uscenti da O dicesi **fascio di raggi** di sostegno O ; si può pensare generato dalla rotazione di un raggio, la quale può avvenire in due sensi opposti. Dicesi *orientato* il fascio quando è fissato un senso di rotazione come positivo. Fissato un raggio a (*origine*), fissato il *radiante* come unità di misura degli angoli, si denota con $\widehat{ab}$ uno degli infiniti angoli, congrui fra loro rispetto al modulo 2π , con cui il raggio b può farsi sovrapporre al raggio a . Ad ogni raggio b corrisponde, all'infuori di multipli di 2π , un valore per $\widehat{ab}$, che dicesi **anomalia** o **ascissa angolare** di b . Viceversa, dato un numero reale qualunque φ , corrisponde ad esso un sol raggio b per cui sia $\widehat{ab} = \varphi$.

Fascio di rette di sostegno O è l'insieme delle rette del piano passanti per O . Fissata una retta a (*origine*), ogni retta b del fascio può sovrapporsi ad a mediante la rotazione di infiniti angoli diversi fra loro di multipli di π . Uno qualunque di questi angoli si denota con $\widehat{ab}$; ad ogni retta b corrisponde unico e determinato il valore di $\operatorname{tg} \widehat{ab}$; viceversa, preso un qualunque numero reale m , v'ha sempre una retta ed una sola per cui $\operatorname{tg} \widehat{ab} = m$. A $\operatorname{tg} \widehat{ab}$ si dà il nome di **coordinata tangente** della retta b . (Alcuni chiamano ascissa angolare ciò che noi abbiamo definita coordinata tangente).

Fascio di rette orientate è un fascio di rette su ciascuna delle quali è fissato un verso positivo: esso è sostanzialmente un fascio di raggi, una retta non sovrapponendosi a se stessa se non con rotazioni multiple di 2π .

Rapporto semplice di tre rette (orientate) a, b, c è il rapporto $\operatorname{sen} \widehat{ac} : \operatorname{sen} \widehat{bc}$ che si rappresenta con (abc) . Fissate a e b , ad ogni retta c corrisponde determinato (salvo il caso $b \equiv c$) il valore di (abc) che dicesi anche **coefficiente angolare** di c rispetto ad a e b . Viceversa, preso un qualunque numero reale

m , v'ha una retta sola (indipendentemente dal verso) per cui $(abc) = m$. Se c cade nell'angolo formato dalle due semirette di a e b dello stesso segno, m è negativo, nel caso contrario è positivo. Se c tende a b , m tende a $\pm \infty$, a seconda dell'angolo in cui si muove c . In un fascio improprio di rette si intende con (abc) il rapporto della distanza di c da a alla distanza di c da b , distanze contate su una retta orientata normale alla direzione comune delle rette.

Birapporto di quattro rette a, b, c, d è il rapporto $(abc):(abd)$. Fissate tre rette a, b, c (*elementi fondamentali*), ad ogni posizione della retta d (salvo il caso $d \equiv a$) corrisponde un determinato valore per $(abcd) = k$, che dicesi **coordinata birapporto** di d rispetto ad abc , o **coordinata proiettiva**.

Coordinate proiettive omogenee di una retta sono due numeri x e y per cui $x:y = k$, se k è la coordinata proiettiva della retta.

3. — **Fascio di semipiani o di piani** di sostegno l è l'insieme dei semipiani uscenti dalla retta l , o dei piani appartenenti ad l . Segato il fascio con un piano normale ad l , si ha un fascio di raggi o di rette. Ogni sistema di coordinate, atto ad individuare il raggio o la retta, individua il semipiano od il piano. Se con le lettere greche si indicano i piani e con le latine le rette, sezioni col piano normale ad l , si dice **anomalia** di β rispetto ad α , e si indica con $\widehat{\alpha\beta}$, l'angolo $\widehat{ab}$. **Coordinata tangente** di β rispetto ad α è $\tan \widehat{\alpha\beta}$. **Rapporto semplice** $(\alpha\beta\gamma)$ di tre piani α, β, γ è (abc) . **Birapporto** $(\alpha\beta\gamma\delta)$ di quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ è $(abcd)$.

B. — Nel piano punteggiato.

4. — **Sistema cartesiano**. Sopra un piano si fissino due rette Ox, Oy (*assi*), passanti per O (*origine*), formanti un angolo ϑ diverso da 0 e da 2π . Si fissi un'unità di misura e un senso positivo sui due assi. La posizione di un punto P del

piano è individuata dalla distanza x di P da Oy parallelamente ad Ox e dalla distanza y di P da Ox parallelamente a Oy contate nel senso dall'asse a P ; x si dice **ascissa**, y **ordinata** di P , entrambe diconsi **coordinate cartesiane** di P ; se $\vartheta = \pi:2$ il sistema di assi dicesi *ortogonale*.

Trasformazione delle coordinate cartesiane.

a) Passando da un sistema di assi xy ad un sistema di assi $x'y'$, paralleli ai precedenti, la cui origine ha le coordinate a e b rispetto ai primi assi: $x = x' + a$, $y = y' + b$.

b) Passando da un sistema di assi xy ($\widehat{xy} = \vartheta$) ad un sistema $x'y'$ con la stessa origine, e tali che $\widehat{xx'} = a$, $\widehat{xy'} = \beta$ si ha

$$x = x' \frac{\sin(\vartheta - a)}{\sin \vartheta} + y' \frac{\sin(\vartheta - \beta)}{\sin \vartheta}; \quad y = x' \frac{\sin a}{\sin \vartheta} + y' \frac{\sin \beta}{\sin \vartheta}$$

In particolare se i due sistemi sono ortogonali:

$$x = x' \cos a - y' \sin a; \quad y = x' \sin a + y' \cos a, \text{ essendo } a = \widehat{xx'}.$$

c) Se le due coppie di assi hanno l'orientamento precedente, ma O' ha le coordinate a , b , si ha

$$x = x' \frac{\sin(\vartheta - a)}{\sin \vartheta} + y' \frac{\sin(\vartheta - \beta)}{\sin \vartheta} + a; \quad y = x' \frac{\sin a}{\sin \vartheta} + y' \frac{\sin \beta}{\sin \vartheta} + b$$

Coordinate cartesiane omogenee. Fissato un sistema cartesiano Oxy , si dicono **coordinate cartesiane omogenee** di un punto P tre numeri X, Y, Z (o qualunque terna proporzionale) tali che sia $X:Z = x$, $Y:Z = y$, essendo x e y le coordinate cartesiane di P ; viceversa ad ogni terna di numeri X, Y, Z con $Z \neq 0$, corrisponde il punto di coordinate cartesiane $x = X:Z$, $y = Y:Z$. Per tutti i punti di una retta r per O il rapporto $y:x$ è costante ed eguaglia il rapporto semplice $-(xyr)$ che dicesi **rapporto direttivo** o **coefficiente angolare** della r ; perciò alle infinite terne $\bar{X}\bar{Y}Z$ ove $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ sono fisse e Z variabile, corrispondono tutti e soli i punti della retta r di coefficiente angolare $\bar{Y}:\bar{Z}$; al tendere a zero di Z il punto di coordinate $\bar{X}\bar{Y}Z$ tende sulla r all'infinito: da ciò

la convenzione che alla terna $\bar{X} \bar{Y} O$ corrisponda il punto all'infinito della r . Viceversa, al punto all'infinito nella direzione di coefficiente angolare m corrispondono le infinite terne proporzionali a $1, m, 0$. Nessun punto corrisponde alla terna $(0, 0, 0)$.

5. — **Coordinate trilineari o trimetriche.** Fissato nel piano un trilatero $r_1 r_2 r_3$ (*trilatero fondamentale*) ed un punto O (che non sia sui lati), si dicono **coordinate trilineari o trimetriche** di un punto M tre numeri proporzionali alle distanze p_1, p_2, p_3 di M dai tre lati $r_1 r_2 r_3$ del trilatero (ogni distanza è positiva o negativa secondo che O e M sono rispetto al lato dalla stessa banda o no). Le distanze $p_1 p_2 p_3$ possono anchè essere moltiplicate per tre numeri $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ arbitrari, ma costanti in una stessa quistione. Se $r_1 r_2$ si prendono per assi cartesiani Oy, Ox e r_3 è la retta impropria del piano, le coordinate trilineari coincidono con le cartesiane omogenee.

6. — **Coordinate proiettive.** a) Sia fissato nel piano un triangolo $A_1 A_2 A_3$ (*triangolo fondamentale*) ed un punto E fuori dei lati (*punto unità*); ad ogni punto P del piano, fuori della retta $A_2 A_3$, restano fissati i birapporti $X = A_3 (A_2 A_1 E P)$, $Y = A_2 (A_3 A_1 E P)$, intendendo che $A_3 (A_2 A_1 E P)$ significhi il birapporto delle 4 rette che proiettano da A_3 i punti $A_2 A_1 E P$: viceversa dati i numeri X, Y , resta individuato P . I numeri X e Y si dicono **coordinate proiettive** di P rispetto ai punti fondamentali $A_1 A_2 A_3$ e al punto unità E . Il punto A_1 ha le coordinate $(0, 0)$; ogni punto della retta $A_1 A_2$ ha $Y = 0$; ogni punto di $A_1 A_3$ ha $X = 0$; E ha le coordinate $(1, 1)$. Ogni punto di $A_1 E$ ha $X = Y$. Se $A_2 A_3$ sono impropri, X e Y sono le coordinate cartesiane ordinarie di P rispetto ai due assi $x \equiv A_1 A_2, y \equiv A_1 A_3$ e prendendo per unità di misura su ciascun asse la proiezione di $A_1 E$ parallelamente all'altro; se poi è prefissata l'unità di misura, si prenderà E in guisa che le sue coordinate cartesiane siano $(1, 1)$.

b) **Coordinate proiettive omogenee.** Dati gli elementi di riferimento precedenti, di un punto P , fuori di $A_2 A_3$, si dicono

coordinate proiettive omogenee tre numeri $x y z$ (o le infinite terne proporzionali) per cui $x : z = \lambda \quad y : z = Y$, essendo X e Y le coordinate proiettive dianzi definite. Osservato che per tutti i punti di una retta uscente da A_1 , il rapporto fra X e Y è costante, si vede che tutte le terne di numeri $\bar{x} \bar{y} z$, con $\bar{x} \bar{y}$ fisse e z variabile convengono a punti P della retta uscente da A_1 , per la quale è $Y : X = \bar{y} : \bar{x}$; passando al limite per $z = 0$ il punto P tende all'intersezione della detta retta con $A_2 A_3$; onde si conviene che a codesto punto corrisponda la terna $\bar{x} \bar{y} 0$. Le coordinate proiettive omogenee si possono definire anche tre numeri x, y, z per cui $y : z = A_2(A_3 A_1 EP)$; $z : x = A_3(A_1 A_2 EP)$; $x : y = A_1(A_2 A_3 EP)$.

Se $A_2 A_3$ sono impropri, x, y, z sono le coordinate cartesiane omogenee rispetto agli assi $x \equiv A_1 A_2$, $y \equiv A_1 A_3$, preso E sulla bisettrice degli assi. Essendo $A_2 A_3$ proprii ed E all'incontro delle bisettrici del triangolo $A_1 A_2 A_3$, x, y, z coincidono con le coordinate trilineari dianzi definite. Se E cade nel baricentro del triangolo, x, y, z si dicono **coordinate baricentriche**.

Per la trasformazione delle coordinate proiettive vedi Cap. IV § 5.

7. — Sistema delle coordinate polari. Si fissi nel piano una semiretta (*asse polare*) uscente da O (*polo*): la posizione di un punto P è individuata dalla distanza $\rho = \overline{OP}$ e dall'angolo ω che OP forma coll'asse polare, fissato un senso positivo per gli angoli. ρ dicesi **raggio vettore**; ω **anomia**, **argomento** o **angolo polare**; insieme **coordinate polari** di P .

Relazioni fra le coordinate cartesiane e le polari. Se il polo coincide coll'origine degli assi cartesiani e l'asse polare col semiasse positivo delle x , si ha $x = \rho \cos \omega$; $y = \rho \sin \omega$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\omega = \arctg \frac{y}{x}$.

Trasformazione delle coordinate polari. a) Passando da un sistema di polo O ad un altro di polo O' e di asse polare formante l'angolo α col primo: $\rho' = \rho$; $\omega' = \omega - \alpha$.

b) Passando da un sistema di polo O ad un altro dello stesso asse polare e avente per polo O' distante di a da O :

$$\varrho'^2 = \varrho^2 + a^2 - 2a\varrho \cos \omega; \quad \operatorname{tg} \omega' = \varrho \operatorname{sen} \omega : (\varrho \cos \omega - a)$$

c) Si passa da un sistema polare ad un altro qualunque, mediante due passaggi del tipo precedente.

8. — **Coordinate bipolari** di un punto M diconsi le lunghezze assolute dei segmenti $OM, O'M$, essendo O, O' due punti fissi (*poli*) del piano.

Coordinate biangolari di un punto M rispetto a due punti fissi OO' diconsi gli angoli ω, ω' che i raggi $OM, O'M$ formano con OO' . Se $\omega = \omega' = a$, il punto di coordinate ω, ω' è quello improprio la cui direzione fa l'angolo a con la retta OO' . Gli angoli sono determinati all'infuori di multipli di 2π .

C. — Nel piano rigato.

9. — **Coordinate pluckeriane**. Fissato un sistema di assi cartesiani, di una retta r passante per l'origine si dicono coordinate pluckeriane u e v gli inversi negativi dei segmenti tagliati rispettivamente sugli assi x e y . Ogni parallela ad x ha $u = 0$, ogni parallela ad y ha $v = 0$; ogni retta per l'origine ha u e v infinite.

Trasformazione delle coordinate pluckeriane. Si passi da un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy ad un altro pure cartesiano ortogon. $Ox'y'$, la cui origine ha le coordinate a, b rispetto al 1° sistema; sia $\widehat{xx'} = a$, si ha

$$u' = \frac{u \cos a + v \operatorname{sen} a}{au + bv + 1}, \quad v' = \frac{-u \operatorname{sen} a + v \cos a}{au + bv + 1}.$$

Se gli assi x' e y' hanno rispetto al primo sistema le coordinate pluckeriane $u_1 v_1, u_2 v_2$ rispettivamente, le formule di passaggio sono

$$u' = \frac{(u v_1 - v u_1) (u_1 v_2 - u_2 v_1)}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2} \cdot H}$$

$$v' = \frac{(v v_1 + u u_1) (u_1 v_2 - u_2 v_1)}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2} \cdot H}$$

$$H = \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Coordinate pluckeriane omogenee. Di una retta r non passante per l'origine degli assi, siano u, v le coordinate pluckeriane; tre numeri U, V, W (o qualunque terna proporzionale) tali da aversi $U:W=u, V:W=v$ si dicono **coordinate pluckeriane omogenee**: viceversa ad ogni terna $U V W$ con $W \neq 0$ corrisponde la retta che ha coordinate pluckeriane ordinarie $u = U:W, v = V:W$. Per tutte le rette parallele ad una direzione di coefficiente angolare m si ha $u:v = -m$, quindi alle infinite terne $\overline{U} \overline{V} W$ con $\overline{U} \overline{V}$ fisse e W variabile corrispondono rette di coefficiente angolare $-(\overline{U}:\overline{V})$. Al tendere di W a zero, la retta di coordinate omogenee $\overline{U} \overline{V} W$ si sposta parallelamente a se stessa avvicinandosi all'origine, giacchè le coordinate pluckeriane $u = \overline{U}:W, v = \overline{V}:W$ tendono all'infinito: da ciò la convenzione che alla terna $\overline{U} \overline{V} 0$ corrisponda la retta per l'origine di rapporto direttivo $-(\overline{U}:\overline{V})$. Viceversa le coordinate pluckeriane omogenee di una retta per l'origine di rapporto direttivo m , sono le infinite terne proporzionali a $-m, 1, 0$. Nessuna retta corrisponde alla terna $(0, 0, 0)$.

Scritta l'equaz. cartesiana di una retta (Cap. IV § 1) i coefficienti a, b, c sono le coordinate pluck. omog. della retta.

Coordinate trilineari o trimetriche di una retta. Fissato un triangolo $P_1 P_2 P_3$ (*triangolo fondamentale*) ed un punto O , si dicono **coordinate trilineari o trimetriche** di una retta r tre numeri proporzionali alle distanze di $P_1 P_2 P_3$ da r (positive o negative secondo che il vertice ed O cadono o no dalla stessa banda di r).

10. — **Coordinate proiettive di una retta.** Sia dato un trilatERO $a_1 a_2 a_3$ (*trilatero fondamentale*) ed una retta e (*retta unità*), ad ogni retta p non passante pel punto $(a_2 a_3)$ corrispondono determinati i birapporti $U = a_3 (a_2 a_1 e p), V = a_2 (a_3 a_1 e p),$

intendendo che $a_3 (a_2 a_1 e p)$ significhi il birapporto dei punti in cui a_3 è tagliata da $a_3 a_1 e p$: viceversa, dati U e V resta determinata p . Si dicono UV le **coordinate proiettive** di p rispetto al detto trilatero e alla retta unità e .

Coordinate proiettive omogenee di una retta diconsi tre numeri u, v, w tali che $u:w = U, v:w = V$, essendo U, V , le coordinate proiettive dianzi definite: od anche tre numeri u, v, w tali che $v:w = a_2 (a_3 a_1 e p), w:u = a_3 (a_1 a_2 e p); u:v = a_1 (a_2 a_3 e p)$. Per tutte e sole le rette per $(a_2 a_3)$ è $w = 0$.

Qualora il piano si consideri simultaneamente punteggiato e rigato, fissato un triangolo fondamentale $A_1 A_2 A_3$ e il punto unità E , si prenderà per trilatero fondamentale $a_1 \equiv A_2 A_3, a_2 \equiv A_3 A_1, a_3 \equiv A_1 A_2$ e per retta unità e la retta armonica di E . Se da E si proietta ciascun vertice del triangolo $A_1 A_2 A_3$ sul lato opposto e della proiezione si prende il coniugato armonico rispetto ai vertici che determinano il lato stesso, i tre coniugati armonici stanno su una retta che dicesi l'armonica di E rispetto al triangolo $A_1 A_2 A_3$.

Coordinate polari di una retta si dicono le coordinate polari (§ 7) del piede della normale alla retta calata dal polo.

D. — Nello spazio punteggiato.

11. — **Coordinate cartesiane.** Per un punto O (*origine*) siano condotte tre rette orientate Ox, Oy, Oz , non complanari e formanti fra loro angoli diversi da 0 e da π : li diciamo *assi cartesiani*. **Coordinate cartesiane** di un punto P sono i tre numeri $x y z$ che misurano le distanze di P rispettivamente dai piani $(Oy, Oz), (Oz, Ox), (Ox, Oy)$ (*piani coordinati*) parallelamente agli assi Ox, Oy, Oz e nel senso dai piani al punto. Gli assi si dicono *ortogonali* quando si incontrano mutuamente ad angolo retto; altrimenti diconsi *obliqui*. Se un osservatore coi piedi in O e col capo nel verso positivo di z , guardando il verso positivo di y ha il verso positivo di x a destra, il triedro $Oxyz$

dicesi *destrorso*, nel caso opposto *sinistrorso*. Supposto $Oxyz$ destrorso, se per O conduciamo ξ normale al piano yz , η normale al piano zx , ζ normale al piano xy , sulle quali i versi si scelgano in guisa che destrorsi siano i triedri $yz\xi$, $zx\eta$, $xy\zeta$, il triedro $\xi\eta\zeta$ è detto *triedro polare* del triedro xyz . In ogni piano coordinato le rotazioni positive sono quelle che rispetto ad un osservatore disposto lungo la semiretta positiva del triedro polare normale al piano, avviene da destra a sinistra. Se il triedro fosse *sinistrorso*, i sensi positivi sarebbero opposti.

Coseni direttori di una retta orientata r rispetto ad una terna di assi ortogonali sono i coseni degli angoli $\widehat{xr}$, $\widehat{yr}$, $\widehat{zr}$; cambiando il senso positivo sulla r i coseni cambiano di segno. Chiamando i coseni con α, β, γ , si ha $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Dati 3 numeri a, b, c esistono due terne di coseni (diversi solo pel segno) proporzionale ad a, b, c ; essi sono $a:k, b:k, c:k$ posto $k = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; cioè 3 numeri a, b, c individuano una direzione prescindendo dal verso: si dice *direzione abc*.

Angolo ω di due direzioni di coseni direttori $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1, \alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ ha il coseno ed il seno dati da $\cos \omega = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2$,

$$\sin \omega = \sqrt{\left| \begin{array}{c} \beta_1 \gamma_1 \\ \beta_2 \gamma_2 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \gamma_1 \alpha_1 \\ \gamma_2 \alpha_2 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \end{array} \right|^2}$$

Condizione di ortogonalità delle dette direzioni è $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$.

Seno del triedro di tre direzioni $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1, \alpha_2 \beta_2 \gamma_2$

$$\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \text{ è il determinante dei 9 coseni, } \Delta = \left| \begin{array}{ccc} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \end{array} \right|.$$

Se $\Delta = 0$, le tre direzioni sono complanari; è positivo o negativo a seconda che il triedro è destrorso o sinistrorso. Se Δ_i è la retta di coseni direttori $\alpha_i \beta_i \gamma_i$, se $a'_1 a'_2 a'_3$ è il triedro polare (vedi sopra) del triedro $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, si ha $\Delta = \sin \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_1 a'_1} =$

$$\sin \widehat{a_3 a_1} \cos \widehat{a_2 a'_2} = \sin \widehat{a_1 a_2} \cos \widehat{a_3 a'_3} = 4 \sin \frac{1}{2} (\widehat{a_2 a_3} + \widehat{a_3 a_1} +$$

$$+ \widehat{a_1 a_2}) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (-a_2 a_3 + a_3 a_1 + \widehat{a_1 a_2}) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a_2 a_3 - \widehat{a_1 a_2}) \\ + \widehat{a_1 a_2}) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\widehat{a_2 a_3} + \widehat{a_3 a_1} - \widehat{a_1 a_2}).$$

Seno del triedro di tre direzioni $a_1 \beta_1 \gamma_1, a_2 \beta_2 \gamma_2, a_3 \beta_3 \gamma_3$ **mutuamente ortogonali** è $+1$ se è congruente al triedro degli assi, è -1 nel caso contrario; ogni elemento di Δ ha per reciproco se stesso moltiplicato per Δ .

Passano poi le 6 relazioni $a_1 a_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$, $a_2 a_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0$, $a_3 a_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 = 0$, $a_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$

Trasformazione delle coordinate cartesiane.

a) Passando da un sistema $Oxyz$ ad un altro $O'x'y'z'$ parallelo al precedente di origine O' di coordinate abc rispetto al primo sistema, si ha $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$.

b) Passando da un sistema ortogonale $Oxyz$ ad un sistema ortogonale $O'x'y'z'$ della stessa origine ed in cui gli assi $x'y'z'$ hanno rispetto al primo sistema i coseni direttori del quadro al lato, si ha

$$\begin{array}{ll} x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z & x = a_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' \\ y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z & y = a_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' \\ z' = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z & z = a_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z' \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x' & y' & z' & \\ \hline x & a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \hline y & a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \hline z & a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \hline \end{array}$$

c) Passando da un sistema ortogonale $Oxyz$ ad un sistema $O'x'y'z'$ con l'origine in O' di coordinate abc rispetto al primo sistema e gli assi $x'y'z'$ avendo rispetto agli assi xyz i coseni direttori del quadro precedente, si ha

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' + a; \quad y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' + b; \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' + c$$

d) Passando da un sistema qualunque xyz ad un sistema pure qualunque $x'y'z'$ della stessa origine, noti gli angoli che $x'y'z'$ formano con il triedro polare $\xi \eta \zeta$ del triedro xyz , si ha

$$x = (x' \cos \widehat{x' \xi} + y' \cos \widehat{y' \xi} + z' \cos \widehat{z' \xi}) : \cos \widehat{x \xi} \\ y = (x' \cos \widehat{x' \eta} + y' \cos \widehat{y' \eta} + z' \cos \widehat{z' \eta}) : \cos \widehat{y \eta} \\ z = (x' \cos \widehat{x' \zeta} + y' \cos \widehat{y' \zeta} + z' \cos \widehat{z' \zeta}) : \cos \widehat{z \zeta}$$

e) Se nel caso precedente l'origine del secondo sistema non coincide con quella del primo, ma ha rispetto a questo le coordinate a, b, c , si aggiungono ai secondi membri delle formule precedenti rispettivamente a, b, c .

Coordinate cartesiane omogenee. Fissata una terna di assi cartesiani ortogonali, si dicono **coordinate cartesiane omogenee** di un punto P di coordinate cartesiane xyz , quattro numeri $X Y Z T$ (o le infinite quaterne proporzionali) tali che $x = X : T, y = Y : T, z = Z : T$.

Osservando che tutti i punti di una retta per l'origine di direzione a, b, c hanno coordinate cartesiane xyz per cui $x : a = y : b = z : c$, si vede che il punto che ha per coordinate cartesiane omogenee $\bar{X} \bar{Y} \bar{Z} T$ con $\bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$ fisse e T variabile si sposta sulla retta per l'origine di direzione $\bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$: segue da ciò che al tendere di T a zero, il punto tende, su quella retta, all'infinito; da ciò la convenzione che alla quaterna $\bar{X} \bar{Y} \bar{Z} 0$ corrisponde il punto improprio in quella direzione.

12. — **Coordinate proiettive.** Dato un tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$ (*tetraedro fondamentale*) ed un punto E fuori delle faccie del tetraedro (*punto unità*), ad ogni punto P fuori del piano $A_1 A_2 A_3$ corrispondono determinati i tre birapporti $X = \overline{A_2 A_3} (A_1 A_4 EP), Y = \overline{A_3 A_1} (A_2 A_4 EP), Z = \overline{A_1 A_2} (A_3 A_4 EP)$ se con $\overline{A_2 A_3} (A_1 A_4 EP)$ si intende il birapporto dei quattro piani che proiettano dallo spigolo $A_2 A_3$ i punti $A_1 A_4 EP$. I numeri $X Y Z$ diconsi **coordinate proiettive** di P rispetto al tetraedro fondamentale $A_1 A_2 A_3 A_4$ ed al punto unità E .

Coordinate proiettive omogenee di un punto P rispetto agli elementi precedenti di riferimento diconsi quattro numeri x, y, z, t tali da aversi $x : t = X, y : t = Y, z : t = Z$ essendo $X Y Z$ le coordinate proiettive dianzi definite (da cui discende $y : z = \overline{A_4 A_1} (A_2 A_3 EP); z : x = \overline{A_4 A_2} (A_3 A_1 EP); x : y = \overline{A_4 A_3} (A_1 A_2 EP)$). Ad ogni punto del piano $A_1 A_2 A_3$ corrisponde una quaterna di coordinate di cui la quarta è 0.

13. — **Coordinate polari o geografiche.** Fissata una terna di assi ortogonali Ox, Oy, Oz diconsi **coordinate polari**

o geografiche di un punto P : la distanza ϱ (in valore assoluto) del segmento OP (**raggio vettore**), la misura dell'angolo φ che un piano per P e per Oz forma con il piano Ox, Oz (**longitudine**), la misura dell'angolo ϑ che OP forma con Oz (**colatitudine**).

Relazione fra coordinate cartesiane e polari. Fra le coordinate di un punto riferito al sistema polare e al cartesiano ortogonale che ci ha servito a definire il primo, passano le relazioni: $x = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi$; $y = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi$; $z = \varrho \cos \vartheta$ e viceversa

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad \vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Trasformazione delle coordinate polari. Dovendosi passare da un sistema di coordinate polari ad un altro giova passare dal 1° sistema polare al sistema cartesiano a cui nella definizione ci siamo riferiti; da questo, al sistema cartesiano che serve a definire il 2° sistema polare e finalmente da questo sistema cartesiano al 2° sistema polare.

Coordinate cilindriche. Ad individuare un punto M nello spazio si può prendere la distanza z di M da un piano, contata su una retta orientata normale al piano e le coordinate polari ϱ, ω della proiezione di M sul piano.

E. — Nello spazio di piani.

14. — **Coordinate pluckeriane** di un piano non passante per l'origine di un sistema cartesiano diconsi i tre numeri u, v, w inversi negativi delle misure dei segmenti che il piano taglia sugli assi. Un piano parallelo ad Ox ha $u = 0$, un piano parallelo al piano coordinato Oy, Oz ha $v = w = 0$ ecc.

Trasformazione delle coordinate pluckeriane. Passando da un sistema cartesiano ortogonale ad un altro, la cui posizione rispetto al 1° è individuata come al § 11 caso c),

$$u' = \frac{u\alpha_1 + v\alpha_2 + w\alpha_3}{au + bv + cw + 1}; \quad v' = \frac{u\beta_1 + v\beta_2 + w\beta_3}{au + bv + cw + 1};$$

$$w' = \frac{u\gamma_1 + v\gamma_2 + w\gamma_3}{au + bv + cw + 1}$$

Se il piano $y'z'$ ha rispetto al 1° sistema le coordinate pluckeriane u_1, v_1, w_1 , il piano $z'x'$ le coordinate u_2, v_2, w_2 , il piano $x'y'$ le coordinate u_3, v_3, w_3 le formole di trasformazione sono

$$u' = \frac{(uu_1 + vv_1 + ww_1)K}{H\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}}, \quad v' = \frac{(uu_2 + vv_2 + ww_2)K}{H\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}},$$

$$w' = \frac{(uu_3 + vv_3 + ww_3)K}{H\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}}$$

$$K = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \quad H = \begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Coordinate pluckeriane omogenee di un piano, di coordinate pluckeriane u, v, w , diconsi quattro numeri $UVWR$ (o le infinite quaterne proporzionali) tali che $u = U:R$, $v = V:R$, $w = W:R$. Un piano di coordinate omogenee $\overline{UVWR}$ con $\overline{UVW}$ fisse e R variabile, si sposta conservando la giacitura normale alla direzione $\overline{UVW}$; per $R=0$ la quaterna $\overline{UVW}0$ rappresenta il piano della giacitura predetta passante per l'origine. Scritta l'equaz. cartesiana di un piano (Cap. VII § 1) i coefficienti $abcd$ sono le coordinate pluckeriane omogenee del piano.

15. — Coordinate proiettive. Dato un tetraedro formato da quattro piani $a_1 a_2 a_3 a_4$ (*tetraedro fondamentale*) ed un piano ε (*piano unità*) ad ogni piano π non passante per il punto $a_1 a_2 a_3$ corrispondono determinati i tre birapporti $U = \overline{a_2 a_3 (a_1 a_4 \varepsilon \pi)}$, $V = \overline{a_3 a_1 (a_2 a_4 \varepsilon \pi)}$, $W = \overline{a_1 a_2 (a_3 a_4 \varepsilon \pi)}$ se con $\overline{a_2 a_3 (a_1 a_4 \varepsilon \pi)}$ si intende il birapporto dei quattro punti in cui i piani $a_1 a_4 \varepsilon \pi$ incontrano la retta $\overline{a_2 a_3}$. I numeri UVW di-

consi **coordinate proiettive** del piano π rispetto al tetraedro $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ e al piano unità ε .

Coordinate proiettive omogenee di un piano π rispetto agli stessi elementi di riferimento sono quattro numeri $u v w r$ tali che siano soddisfatte le relazioni $u:r = U$, $v:r = V$, $w:r = W$ essendo $U V W$ le coordinate proiettive dianzi definite (da cui discende $v:w = \overline{\alpha_4 \alpha_1} (a_2 \alpha_3 \varepsilon \pi)$; $w:u = \overline{\alpha_4 \alpha_2} (a_3 \alpha_1 \varepsilon \pi)$; $u:r = \overline{\alpha_4 \alpha_3} (a_1 \alpha_2 \varepsilon \pi)$). Ad ogni piano pel punto $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ corrisponde una quaterna di coordinate di cui la quarta è nulla.

CAPITOLO II.

Geometria nelle forme di prima specie

1. — **Sulla punteggiata.** Se $x_1 x_2$ sono le assisse di due punti A, B il segmento AB ha per lunghezza $x_2 - x_1$; il punto C per cui $\overline{AC} : \overline{BC} = k$ ha l'ascissa $x = (k x_2 - x_1) : (k - 1)$. Se $M_1, M_2, \dots, M_n$ sono n punti comunque disposti colla punteggiata, vale la relazione $\overline{M_1 M_2} + \overline{M_2 M_3} + \dots + \overline{M_{n-1} M_n} + \overline{M_n M_1} = 0$. Se A, B, C, D sono 4 punti, vale la relazione (*di Eulero*) $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$.

Se il birapporto $(ABCD) = k$ si ha

$$\begin{aligned} (ABCD) &= (BAD C) = (CDA B) = (DCBA) = k; \\ (ADBC) &= (DACB) = (BCAD) = (CBDA) = (k-1) : k \\ (ABDC) &= (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = 1 : k; \\ (ACDB) &= (CABD) = (DBAC) = (BDCA) = 1 : (1-k) \\ (ACBD) &= (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - k; \\ (ADCB) &= (DABC) = (CBAD) = (BCDA) = k : (k-1). \end{aligned}$$

Se P_1, P_2, P_3, P_4 , rispetto ad una qualunque origine, hanno le ascisse x_1, x_2, x_3, x_4 , e rispetto a 3 qualunque elementi fondamentali A, B, C , hanno le coordinate proiettive k_1, k_2, k_3, k_4 , è $(x_1 x_2 x_3 x_4) = (k_1 k_2 k_3 k_4)$.

Gruppo armonico formano i 4 punti A, B, C, D quando $(A B C D) = -1$; C, D si dicono *coniugati armonici* di A, B o viceversa. Se C è il punto di mezzo di AB il suo coniugato armonico è all'infinito. Se $(ABCD) = -1$, è $\frac{1}{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \right)$ e se M è il punto di mezzo di AB , $\overline{MC} \cdot \overline{MD} = \overline{MB}^2$. Se le ascisse di A, B, C, D rispetto ad una qualunque origine sono x_1, x_2, x_3, x_4 ed è $(ABC) = r$, si ha

$$x_3 = (x_1 - r x_2) : (1 - r); \quad x_4 = (x_1 + r x_2) : (1 + r).$$

2. — **Nel fascio di raggi, di rette e di piani.** Se a, b, c sono tre raggi o tre rette orientate di un fascio, $\widehat{ab} + \widehat{ba} = 0$; $\widehat{ab} + \widehat{bc} = \widehat{ac}$; $\widehat{bc} = \widehat{ac} - \widehat{ab}$, le eguaglianze dovendosi considerare come congruenze rispetto al modulo 2π . Se a, b, c sono tre rette non orientate le eguaglianze precedenti debbonsi considerare congruenze rispetto al modulo π . In un fascio di rette, se le rette b e c hanno coordin. tangenti m, m' , è $\widehat{bc} = (m' - m) : (1 + m'm)$; $b \perp c$ (*) se $m m' + 1 = 0$. In un fascio di rette orientate, se m' è il coefficiente angolare di r rispetto ad a e b è $\operatorname{tg} \widehat{ar} = m \operatorname{sen} \widehat{ab} : (m \cos \widehat{ab} - 1)$; $\operatorname{tg} \widehat{br} = \operatorname{sen} \widehat{ab} : (m - \cos \widehat{ab})$; se m' è il coefficiente angolare di r' , è

$$\operatorname{tg} r' r' = \frac{(m' - m) \operatorname{sen} \widehat{ab}}{m m' + (m + m') \cos \widehat{ab} + 1};$$

$r \perp r'$ se $m m' + (m + m') \cos \widehat{ab} + 1 = 0$.

Se a, b, c sono 3 rette orientate di un fascio di sostegno O , se A, B, C sono i punti sezione delle rette con una retta r orientata, è $(ABC) = (a b c) (\overline{OA} : \overline{OB})$; se O è improprio, $(ABC) = (abc)$; in entrambi i casi ne segue che se d è una quarta retta del fascio e D la sua intersezione con r è $(ABCD) = (abcd)$, cioè il birapporto si conserva per sezioni e proiezioni.

Gruppo armonico formano a, b, c, d , se $(abcd) = -1$; c e d si dicono *coniugate armoniche* di a e b , e viceversa. I lati di un

(*) Si legge « b perpendicolare a c ».

triangolo sono separati armonicamente dalle due bisettrici; se di 4 rette armoniche di un fascio, due coniugate sono $\perp$, esse bisecano gli angoli delle altre due.

Se $(a b c d) = -1$, si ha $2 \cotg \widehat{a b} = \cotg \widehat{a c} + \cotg \widehat{a d}$ o se q è la bisettrice di $\widehat{a b}$, si ha $\operatorname{tg}^2 q a = \operatorname{tg} q c \cdot \operatorname{tg} q d$.

Quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ formano un **gruppo armonico** quando $(\alpha \beta \gamma \delta) = -1$. Se quattro piani qualunque $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ di un fascio (proprio od improprio) sono segati da un qualsiasi piano secondo 4 rette a, b, c, d o da una qualunque retta in $ABCD$ è $(\alpha \beta \gamma \delta) = (a b c d) = (ABCD)$. Dunque le proiezioni e sezioni conservano il birapporto.

3. — Proiettività fra forme di prima specie. Chiamando x la coordinata (ascissa, baricentrica o proiettiva) di un punto P su una punteggiata r , x' la coord. omonima di un punto P' di una punteggiata r' , l'equazione $a x x' + b x + c x' + d = 0$, sotto la condizione $ad - bc \neq 0$, fa corrispondere ad ogni punto P di r , un punto P' di r' e viceversa. La corrispondenza dicesi **proiettività** perchè se P_1, P_2, P_3, P_4 sono 4 punti di r , P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 i corrispondenti in r' , è $(P_1 P_2 P_3 P_4) = (P'_1 P'_2 P'_3 P'_4)$. Viceversa fissate due terne di punti $P_1 P_2 P_3$ su r , $P'_1 P'_2 P'_3$ su r' la corrispondenza fra P e P' definita da $(P_1 P_2 P_3 P) = (P'_1 P'_2 P'_3 P')$ si traduce in un'equazione fra le coordinate x di P e x' di P' della forma $a x x' + b x + c x' + d = 0$ con $a d - b c \neq 0$. Se fosse $a d - b c = 0$ la proiettività dicesi *degenere* perchè ad ogni punto di r corrisponde l'unico punto $x' = -b : a$ su r' e viceversa ad ogni punto di r' corrisponde l'unico punto $x = -c : a$ su r . Se $x_1, x'_1; x_2, x'_2; x_3, x'_3$ sono le coordinate delle 3 coppie di punti corrispondenti l'equazione della proiettività da esse determinata è

$$\begin{vmatrix} x & x' & x & x' & 1 \\ x_1 & x'_1 & x_1 & x'_1 & 1 \\ x_2 & x'_2 & x_2 & x'_2 & 1 \\ x_3 & x'_3 & x_3 & x'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nella proiettività non degenera, se x, x' sono ascisse, il punto $I (x = -c : a)$ corrisponde al punto all'infinito di r' ed il punto $J (x' = -b : a)$ di r' corrisponde al punto all'infinito di r . I punti I, J' si dicono **punti limiti**. Se P e P' sono due punti corrispondenti $\overline{IP} \cdot \overline{J'P'} = \text{costante}$, onde prendendo I, J' come origini delle ascisse, l'equazione della proiettività si riduce a $xx' = \text{costante}$.

Similitudine dicesi la proiettività per la quale ad una coppia di punti $P_1 P_2$ corrisponde una coppia $P'_1 P'_2$ in guisa da essere $\overline{P_1 P_2} : \overline{P'_1 P'_2} = \text{costante}$. Se si prendono coordinate ascisse, l'equazione manca del termine in xx' .

Congruenza è la similitudine in cui il rapporto fra segmenti omologhi è ± 1 ; *diretta* se è $+1$, *inversa* se -1 ; nella sua equazione in coordinate ascisse $c = -b$ se è diretta, $c = b$ se è inversa. Nella similitudine i punti limiti sono impropri. La similitudine è individuata da due coppie di punti corrispondenti $x_1 x'_1; x_2 x'_2$ e la sua equazione è

$$\begin{vmatrix} x & x' & 1 \\ x_1 & x'_1 & 1 \\ x_2 & x'_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. — **Proiettività fra punteggiate sovrapposte**. Se $r \equiv r'$, due punti corrispondenti P, P' possono essere sovrapposti; allora essi diconsi **uniti**. Preso su r, r' uno stesso sistema di coordinate, le coordinate dei punti uniti sono le radici dell'equazione $ax^2 + (b+c)x + d = 0$. I punti uniti sono reali distinti se $(b+c)^2 > 4ad$ (proiett. **iperbolica**); sono reali coincidenti se $(b+c)^2 = 4ad$ (**parabolica**); immaginari se $(b+c)^2 < 4ad$ (**ellittica**). Nella similitudine fra punteggiate sovrapposte i punti uniti sono l'uno improprio, l'altro proprio d'ascissa $-d : (b+c)$ (**centro della similitudine**).

Involuzione è la proiettività fra punteggiate sovrapposte tale che se a un punto generico P corrisponde P' , a P' considerato su r corrisponde P considerato appartenente ad r' . L'equaz. in un sistema qualunque di coordinate è $axx' + b(x +$

$+x') + d = 0$. Due punti corrispondenti diconsi *coniugati*. V'ha un unico punto limite che si dice **centro**; se C è il centro $\overline{CP} \cdot \overline{CP'} = \text{costante}$. I punti uniti diconsi **doppi**: se sono reali e distinti l'involuzione è **iperbolica**; essi dividono armonicamente ogni coppia di punti coniugati. Se i punti doppi sono immaginari l'involuzione è **ellittica**; se reali coincidenti (col centro) è **parabolica**, nel qual caso è anche degenera ($b^2 = ad$). Un'involuzione è determinata da due coppie di punti coniugati. Condizione perchè tre coppie di punti x_1, x'_1 ; x_2, x'_2 ; x_3, x'_3 siano corrispondenti in una involuzione è

$$\begin{vmatrix} x_1 x'_1 & x_1 + x'_1 & 1 \\ x_2 x'_2 & x_2 + x'_2 & 1 \\ x_3 x'_3 & x_3 + x'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Se O è centro e ad ogni punto P corrisponde un punto P' in guisa che $\overline{PO} = \overline{OP'}$ la involuzione dicesi **simmetrica**; l'equazione in coordinate ascisse è priva del termine in xx' .

5. — **Proiettività nel fascio di rette o di piani**. Se m e m' sono le coordinate (tangenti, rapporti semplici, coordinate proiettive) di due raggi p e p' di due fasci F, F' di sostegno O, O' l'equazione $amm' + bm + cm' + d = 0$ (sotto la condizione $ad - bc \neq 0$) fa corrispondere ad ogni raggio p del fascio F un raggio p' di F' e viceversa: la corrispondenza dicesi **proiettività**. Segando due fasci proiettivi si hanno punteggiate proiettive; proiettando due punteggiate proiettive dallo stesso punto o da punti diversi si hanno fasci proiettivi.

Le definizioni di **rette unite** in fasci proiettivi di ugual sostegno, di proiettività **iperbolica**, **parabolica**, **ellittica**, di **involuzione**, di **rette doppie** nell'involuzione sono le stesse di quelle date pei punti uniti ecc. nel § 4. Le equazioni che danno le coordinate delle rette unite o delle rette doppie, l'equazione dell'involuzione si ottengono dalle equazioni analoghe del § 4 cambiando x e x' in m e m' .

Involuzione degli angoli retti (o circolare, od ortogonale) è l'involuzione in cui i raggi coniugati sono ortogonali: la sua equazione in coordinate tangenti è $mm' + 1 = 0$; è ellittica. I raggi doppi immaginari diconsi **rette isotrope** (o **cieliche**) e i loro punti impropri **punti ciclici**. Ogni involuzione di rette ha una coppia di raggi coniugati comune all'involuzione degli angoli retti, cioè ortogonali.

Se $c_1 c_2$ sono le rette isotrope (di coordinate tangenti $i, -i$) si ha la **formula di Laguerre** $\widehat{pp'} = \frac{1}{2} \log (pp' c_1 c_2)$, con $\log$ simbolo di logaritmo naturale.

Equaz. della proiettività in coordinate proiettive omogenee. Se x, y sono le coordinate proiettive omogenee di un elemento di una forma di prima specie F e $x' y'$ le coordinate omonime di un elemento di un'altra forma omonima F' , la proiettività ha le equazioni $\varrho x' = a_{11} x + a_{12} y$, $\varrho y' = a_{21} x + a_{22} y$, essendo ϱ un fattore di proporzionalità: le formule inverse sono $\sigma x = a_{22} x' - a_{12} y'$; $\sigma y = -a_{21} x' + a_{11} y'$.

CAPITOLO III.

Rappresentazione analitica delle curve piane, superficie e curve gobbe

1. — **Equazione di una curva.** Data un'equaz. $y = f(x)$, il luogo dei punti di coordinate x, y soddisfacenti l'equaz. dicesi **curva rappresentativa** della funzione $f(x)$, o curva definita dall'equaz. $y = f(x)$. L'equaz. $F(x, y) = 0$ dicesi che rappresenta la curva luogo dei punti di coordinate soddisfacenti all'equaz. Viceversa definita una curva mediante proprietà geometriche o cinematiche ecc. dicesi equaz. della curva

l'equaz. $F(x, y) = 0$, soddisfatta dalle coordinate di tutti e soli i punti della curva.

Se X, Y, Z sono le coordinate cartesiane omogenee, l'equaz. della curva rappresentata da $F(x, y) = 0$ è $F\left(\frac{X}{Y}, \frac{Y}{Z}\right) = 0$.

Riferendosi a coordinate polari ϱ, ω , una curva è rappresentata da un'equaz. $F(\omega, \varrho) = 0$ o da $\varrho = f(\omega)$; viceversa equaz. di questa forma rappresentano delle curve piane, luoghi dei punti le cui coord. polari soddisfano le equaz. In generale ad ogni equaz. fra le coordinate di un punto corrisponde una curva luogo dei punti di coord. soddisfacenti l'equazione; e viceversa.

Curva algebrica è quella la cui equazione cartesiana può ridursi alla forma $F(x, y) = 0$, ove F è un polinomio razionale intero; in coord. cartes. omogenee il primo membro F si trasforma in un polinomio razionale omogeneo in X, Y, Z .

Ordine di una curva algebrica è il grado dell'equaz. $F = 0$: non cambia per alcuna trasformazione delle coordinate cartesiane: eguaglia il numero dei punti (reali o no) d'intersezione della curva con una retta generica.

Degenerare si dice una curva algebrica d'ordine n se $F(x, y)$ è il prodotto di due polinomi $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ dei gradi m_1 ed m_2 essendo $m_1 + m_2 = n$: la curva si compone delle due curve algebriche $F_1 = 0, F_2 = 0$ degli ordini m_1 e m_2 rispettivamente.

Forme speciali di equazioni. L'equaz. $f(x) = 0$ rappresenta tante rette || (*) all'asse y pei punti di ascissa uguale alle radici reali dell'equaz.; l'equaz. $f(y) = 0$ rappresenta tante rette || all'asse x pei punti di ordinata uguale alle radici reali dell'equaz. La equazione $f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ rappresenta tante rette per l'origine di coefficiente angolare uguali alle radici reali dell'equaz. preso per incognita il rapporto $y:x$. L'equaz.

(*) Si legge « parallele ».

$f(\varrho)=0$ rappresenta tanti cerchi di centro il polo e raggi uguali alle radici positive dell'equaz. L'equaz. $f(\omega)=0$ rappresenta tanti raggi uscenti dal polo formanti con l'asse polare gli angoli uguali alle radici reali dell'equazione.

Simmetrica rispetto all'asse x (o all'asse y) è la curva $F(x, y)=0$ se il 1° membro non si altera cambiando segno ad y (o ad x): se la curva è algebrica, è simmetrica rispetto all'asse x (o all'asse y) se F contiene solamente potenze pari di y (o di x). La simmetria è ortogonale se gli assi sono ortogonali, o altrimenti parallela agli assi.

Simmetrica rispetto all'origine è la curva $F(x, y)=0$ se il primo membro non s'altera o cambia solo di segno cambiando segno simultaneamente ad x e y . Una curva algebrica è simmetrica rispetto all'origine se tutti i termini di F sono di grado di egual parità.

Sistemi di curve. Se in $F(x, y, k)=0$, k è un parametro variabile, ad ogni valore di k l'equaz. rappresenta una curva. L'insieme delle curve che si hanno al variare di k dicesi **sistema** o **famiglia di curve** ad un parametro (o semplicemente infinito). Se l'equaz. $F(\bar{x}, \bar{y}, k)=0$ fornisce per k un valore unico, per ogni punto di una certa regione del piano passa una ed una sola curva del sistema.

Se in $F(x, y, k_1, k_2, \dots, k_n)=0$, $k_1, k_2, \dots, k_n$ sono n parametri variabili, ad ogni sistema di n valori per i parametri corrisponde una determinata curva; l'insieme delle curve al variare dei parametri dicesi sistema o famiglia ad n parametri o n volte infinito.

Fasci di curve. Se $\varphi(x, y)=0$, $\psi(x, y)=0$ sono equaz. di due curve, l'equaz. $\varphi(x, y) - k\psi(x, y)=0$ rappresenta per ogni valore di k una curva che passa pei punti comuni alle due curve; costituiscono nel loro insieme un **fascio** di curve.

Equaz. parametriche di una curva $F(x, y)=0$ sono 2 equaz. $x=x(t)$, $y=y(t)$, ove t è variabile (*parametro*) in un certo intervallo $t_0 \vdash t_1$, e tali che l'eliminazione di t dà luogo

alla $F(x, y) = 0$. Se $x(t)$ e $y(t)$ sono funzioni limitate e $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$, la curva è *chiusa*.

Unicursale (o di *genere zero*) dicesi una curva quando è possibile trovarne le equaz. parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $x(t)$ e $y(t)$ funzioni razionali nel parametro t . Sono unicursali ad es. le *coniche* (Cap. VI), il *folium* (Cap. V § 3), la *cissoide* di Diole (*ibid.*)

2. — **Equazione di un involuppo di rette nel piano.** Data un'equaz. fra le coordinate pluckeriane u, v di una retta, $v = f(u)$ o $F(u, v) = 0$, le rette che hanno coord. soddisfacenti l'equaz. si mantengono, generalmente, tangenti ad una curva che dicesi **involuppo** (delle sue tangenti). Viceversa ad ogni curva considerata come involuppo delle sue tangenti corrisponde un'equaz. $F(u, v) = 0$. Se U, V, W sono le coord. pluck. omogenee, l'equaz. dell'involuppo $F(u, v) = 0$ è $F\left(\frac{U}{W}, \frac{V}{W}\right) = 0$.

Involuppo algebrico è l'involuppo la cui equaz. $F(u, v) = 0$ ha a primo membro un polinomio razionale intero in u e v .

In coordinate omogenee la equaz. è omogenea in U, V, W .

Classe di un involuppo algebrico è il grado di $F(u, v) = 0$; non si altera per qualsiasi trasformazione di coord. pluck.; rappresenta il numero di rette (reali o no) dell'involuppo per un punto generico.

Degenerare è un involuppo algebrico di classe n se $F(u, v)$ si scinde nel prodotto di due funzioni F_1, F_2 razionali intere di gradi m_1 e m_2 essendo $m_1 + m_2 = n$. L'involuppo si compone dei due involuppi algebrici $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ delle classi m_1 e m_2 .

Forme particolari di equazioni. L'equaz. $f(u) = 0$ rappresenta tanti punti (considerati come involuppi delle rette per essi) sull'asse x di ascisse uguali agli inversi negativi delle radici reali dell'equaz.; l'equaz. $f(v) = 0$ rappresenta tanti punti sull'asse y di ordinate uguali agli inversi negativi delle

radici reali dell'equaz.; l'equaz. $f\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ rappresenta tanti punti impropri di rapporto direttivo uguali alle radici reali cambiate di segno dell'equaz. considerando come incognita $u:v$.

Equaz. parametriche di un involuppo $F(u, v) = 0$ sono 2 equaz. $u = u(t)$, $v = v(t)$ che danno u e v in funzione di un parametro t e tali che l'eliminazione di t dà luogo alla $F(u, v) = 0$.

Schiere di involuppi. Se $\varphi(u, v) = 0$, $\psi(u, v) = 0$ sono equaz. di due involuppi, l'equaz. $\varphi(u, v) - k\psi(u, v) = 0$ rappresenta per ciascun k un involuppo a cui appartengono le rette comuni ai 2 involuppi; costituiscono nel loro insieme una **schiera di involuppi**.

3. — **Equaz. di una superficie.** Rappresentando x, y, z le coord. cartesiane di un punto nello spazio, l'equaz. $z = f(x, y)$ si dice rappresentare il luogo dei punti le cui coordinate soddisfano all'equaz.; più in generale l'equaz. $F(x, y, z) = 0$ si dice che rappresenta la *superficie* luogo dei punti le cui coord. soddisfano l'equaz. Se, X, Y, Z, T sono coordinate cartesiane omogenee la superficie rappresentata dall'equazione $F(x, y, z) = 0$ ha l'equazione $F\left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}\right) = 0$.

Data una superficie, corrisponde ad essa un'equazione $F(x, y, z) = 0$ soddisfatta dalle coord. di tutti e soli i punti della superficie, che dicesi equazione della superficie. Più in generale un'equaz. fra le coordinate (di qualsiasi natura siano) di un punto nello spazio rappresenta una superficie, luogo dei punti di coordinate che soddisfano l'equazione, e viceversa una superficie è rappresentata da un'equazione soddisfatta dalle coordinate di tutti e soli i suoi punti.

Algebrica dicesi una superficie se la sua equazione cartesiana si può ridurre a $F(x, y, z) = 0$ ove F è razionale intero in x, y, z ; se la si riferisce a coord. cartes. omogenee è omogenea nelle coord. stesse.

Ordine di una superficie algebrica è il grado della sua equaz. ; non varia per alcuna trasformazione di coord. cartesiane.

Sistemi di superficie, fasci di superficie: si possono ripetere considerazioni analoghe ai sistemi e fasci di curve.

Degenerare è una superficie algebrica di ordine n , $F(x, y, z) = 0$ se F è il prodotto di 2 funzioni razionali F_1 e F_2 di gradi m_1, m_2 essendo $m_1 + m_2 = n$; la superficie si compone di 2 superficie algebriche degli ordini m_1 e m_2 rispettivamente.

Forme speciali di equaz. L'equaz. $f(x) = 0$ rappresenta tanti piani $\parallel$ al piano zy pei punti di ascisse uguali alle radici reali di $f(x) = 0$: analoghe interpretazioni per la equaz. $f(y) = 0$ e $f(z) = 0$. L'equaz. $f(x, y) = 0$ rappresenta la **superficie cilindrica** che ha per direttrice sul piano xy la curva di equaz. (in detto piano) $f(x, y) = 0$ e le generatrici $\parallel$ all'asse z : analoghe interpretazioni per le equaz. $f(x, z) = 0$; $f(y, z) = 0$.

L'equaz. $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ rappresenta una **superficie conica** col vertice nell'origine: proietta dall'origine la curva che nel piano $z = 1$ ha l'equaz. $F(x, y) = 0$. L'equaz. $F\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ rappresenta tanti piani per l'asse z che tagliano il piano xy in rette per l'origine di coefficienti angolari (rispetto all'asse x) uguali alle radici reali in $y:x$ dell'equazione.

Analoghe interpretaz. per le equaz. $F\left(\frac{z}{y}\right) = 0$ $F\left(\frac{x}{z}\right) = 0$.

L'equaz. $z = f(x^2 + y^2) = 0$ rappresenta una **superficie di rotazione** intorno all'asse z ; altrettanto dicasi dell'equazione $x^2 + y^2 = f(z)^2$: in questo caso la superficie si ottiene facendo ruotare la curva del piano zx di equaz. $x = f(z)$.

In coordinate polari $f(\varrho) = 0$ rappresenta tante sfere col centro nel polo e raggio uguale alle radici positive dell'equaz.; $f(\vartheta) = 0$ rappresenta tanti coni circolari col vertice nel polo e aventi per asse l'asse z e di aperture uguali alle radici reali dell'equaz.; $f(\varphi) = 0$ rappresenta tanti semipiani uscenti dall'asse z

e formanti col piano zx gli angoli uguali alle radici reali dell'equaz.; $f(\varrho, \vartheta) = 0$ rappresenta una superficie di rotazione intorno a z , generata dalla rotazione della curva $f(\varrho, \vartheta) = 0$ se in un piano per z si prende il semiasse positivo delle z come asse polare, ϱ, ϑ coordinate polari in questo piano; $f(\vartheta, \varphi)$ rappresenta una superficie conica col vertice nel polo; $f(\varrho, \varphi) = 0$ rappresenta una superficie luogo di tutti i semicerchi aventi il centro nel polo, posti in piani per l'asse z e per raggio, il raggio vettore della curva posta sul piano xy di equaz. polare $f(\varrho, \varphi) = 0$.

In coordinate cilindriche, $f(\varrho, \omega) = 0$ rappresenta una superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse z , avente per direttrice sul piano xy la curva di equaz. polare $f(\varrho, \omega) = 0$; $f(z, \varrho) = 0$ rappresenta la superficie generata dalla rotazione intorno a z della curva $f(z, y) = 0$ del piano zy ; $f(z, \omega) = 0$ rappresenta una superficie rigata luogo di rette normali all'asse z .

Equaz. parametriche di una superficie $F(x, y, z) = 0$ sono 3 equaz. $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ che forniscono x, y, z in funzione di 2 parametri u, v , e tali che l'eliminazione fra esse dei parametri u, v dà luogo a $F(x, y, z) = 0$

4. — **Equazione degli involuppi di piani.** Un'equaz. $w = f(u, v)$ o $F(u, v, w) = 0$ fra le coord. pluckeriane u, v, w di un piano è soddisfatta dalle coordinate di piani che generalmente si mantengono tangenti ad una superficie: codesta superficie considerata come involuppo dei suoi piani tangenti è rappresentata dall'equaz. $w = f(u, v)$ o $F(u, v, w) = 0$. Viceversa ad ogni superficie considerata come involuppo dei suoi piani tangenti corrisponde un'equaz. $F(u, v, w) = 0$ soddisfatta dalle coord. di tutti e soli i piani dell'involuppo.

Se $UVWR$ sono le coord. pluck. omogenee, l'equaz. dell'involuppo rappresentato dall'equaz. $F(u, v, w) = 0$ ha l'equaz.

$$F\left(\frac{U}{R}, \frac{V}{R}, \frac{W}{R}\right) = 0.$$

Inviluppo algebrico è l'inviluppo la cui equaz. $F(u, v, w) = 0$ ha il 1° membro razionale intero in u, v, w : in coordin. omogenee l'equaz. è omogenea.

Classe di un inviluppo algebrico è il grado di $F(u, v, w)$; non cambia per qualsiasi trasformazione di coordinate pluckeriiane: rappresenta il numero dei piani dell'inviluppo (reali o no) appartenenti ad una retta generica.

Degenerare è un inviluppo algebrico $F(u, v, w) = 0$ di classe n , se F è il prodotto di 2 funz. razionali intere di gradi m_1, m_2 tali che $m_1 + m_2 = n$: l'inviluppo si compone dei 2 inviluppi algeb. di classi m_1 e m_2 rappresentati dalle equaz. $F_1 = 0, F_2 = 0$.

Forme particolari di equazioni. L'equaz. $f(u) = 0$ rappresenta i punti (come inviluppi dei piani per essi) dell'asse x a distanze dall'origine uguali agli inversi negativi delle radici reali dell'equaz. Analoghe interpretazioni per $f(v) = 0, f(w) = 0$. L'equaz. $F(u, v) = 0$ rappresenta l'inviluppo dei piani che si distribuiscono in fasci di sostegno le rette dell'inviluppo piano $F(u, v) = 0$ nel piano xy . Analoga interpretazione per le equaz. $F(u, w) = 0, F(v, w) = 0$.

5. — **Linee storte o gobbe.** L'intersezione di due superficie, qualora non stia in un piano, dicesi **linea storta** o **gobba**. Si rappresenta analiticamente dando le equaz. delle due superficie, di cui essa è intersezione $F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0$. Ad ogni cambiamento del sistema precedente in uno equivalente $\Phi_1(x, y, z) = 0, \Phi_2(x, y, z) = 0$ corrisponde geometricamente il cambiamento delle due superficie in due altre che si tagliano secondo la stessa linea. In particolare si possono prendere le due superficie cilindriche che proiettano la linea ortogonalmente su due piani coordinati, $\varphi_1(x, y) = 0, \varphi_2(x, z) = 0$. In coordinate polari una linea è rappresentata da due equaz. $\Psi_1(\varrho, \vartheta, \varphi) = 0, \Psi_2(\varrho, \vartheta, \varphi) = 0$.

Equazioni parametriche di una linea storta diconsi tre equazioni $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ che danno le coordinate x, y, z in funzione di un parametro t variabile in un conveniente intervallo $t_0 \vdash t_1$. La curva è chiusa se $x(t_0) = x(t_1), y(t_0) = y(t_1), z(t_0) = z(t_1)$ e x, y, z funzioni limitate.

CAPITOLO IV.

La retta nel piano e il punto come involuppo delle rette per esso

1. — **Varie forme dell'equaz. della retta.** Ogni equaz. $ax + by + c = 0$ di 1° grado nelle coord. cartesiane xy di un punto nel piano rappresenta una retta. Se $b = c = 0$, l'equaz. rappresenta l'asse y ; se $a = c = 0$, rappresenta l'asse x ; se $a = 0$ l'equaz. $by + c = 0$ rappresenta la retta $\parallel$ ad x pel punto $x = 0, y = -c : b$; se $b = 0$ l'equaz. $ax + c = 0$ rappresenta la retta $\parallel$ ad y pel punto $x = -c : a, y = 0$; se $c = 0$ l'equaz., $ax + by = 0$ rappresenta la retta per l'origine di coefficiente angolare $-a : b$. Di una retta r dicesi **coefficiente angolare** o **rapporto direttivo** il rapporto semplice $-(xyr)$, che eguaglia $\widehat{xr}$, se gli assi sono ortogonali: di una retta non passante per l'origine dicesi coefficiente angolare il coefficiente angolare della parallela per l'origine. Se nessun coefficiente è nullo, l'equaz. $ax + by + c = 0$ rappresenta la retta di coefficiente angolare $-a : b$ e passante pel punto $y = -c : b$ dell'asse y ; stacca (a partire dall'origine) il segmento $-c : a$ sull'asse x , ed il segmento $-c : b$ sull'asse y : quest'ultimo dicesi **ordinata all'origine**.

Viceversa: la retta parallela all'asse y alla distanza ($\parallel$ ad x) a ha l'equaz. $x = a$; la retta $\parallel$ all'asse x alla distanza ($\parallel$ ad y) b ha l'equaz. $y = b$. La retta di coefficiente angolare m ha l'equaz. $y = mx$, se passa per l'origine, o l'equaz. $y = mx + b$,

se ha l'ordinata all'origine b . Due equaz. $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ rappresentano la stessa retta se e soltanto se $a : a' = b : b' = c : c'$.

In coordinate omogenee l'equaz. di una retta è $aX + bY + cZ = 0$; con queste coordinate si può rappresentare anche la retta impropria che ha l'equaz. $Z = 0$.

Equaz. segmentaria: se la retta stacca sugli assi x, y rispettivamente i segmenti p e q , ha l'equaz. $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Equaz. della retta di coordinate pluckeriane $\bar{u}, \bar{v}$ è $\bar{u}x + \bar{v}y + 1 = 0$.

Equazione normale di una retta. Dall'origine O degli assi si conduca la normale n alla retta data assumendo su essa un senso positivo ad arbitrio. Se p è la misura anche in segno della distanza di O dalla retta, se $\vartheta = \widehat{xy}$, $\alpha = \widehat{xn}$ l'equaz. normale della retta è $y \cos \alpha + y \cos (\vartheta - \alpha) - p = 0$ ed in assi ortogonali $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$. Generalmente su n si prende come positivo il senso da O alla retta. Data l'equaz. $ax + by + c = 0$ si riduce l'equaz. a normale moltiplicando per il coefficiente $\sin \vartheta : \pm \sqrt{a^2 + b^2} - 2ab \cos \vartheta$ o per $1 : \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ se gli assi sono ortogonali, (**coefficiente di normalità**), il radicale essendo preso col segno contrario a quello di c . (Se il senso positivo sulla n fosse il contrario a quello da O verso la retta, si prende pel radicale il segno di c).

Equazione polare della retta: se passa pel polo O e forma coll'asse polare l'angolo $\bar{\omega}$, l'equazione è $\omega = \bar{\omega}$; se non passa per il polo, sia a la distanza in valore assoluto del polo della retta, α l'angolo che la normale alla retta nel senso da O alla retta forma coll'asse polare, l'equazione è $\rho \cos (\omega - \alpha) = a$.

Equaz. parametriche di una retta: $x = a_1 t + b_1$, $y = a_2 t + b_2$ ove b_1, b_2 sono le coordin. cartesiane di un punto della retta, a_1, a_2 proporzionali ai seni degli angoli che la retta forma con gli assi y e x rispettivamente, t il parametro.

2. — **Alcuni problemi sulla retta.** Retta per (x_1, y_1) di coefficiente angolare m ha l'equazione cartesiana $y - y_1 = m(x - x_1)$ e le equaz. parametriche $x = at + x_1, y = bt + y_1$, se $b : a = m$, e t è il parametro.

Retta per (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ha l'equaz.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = 0, \text{ oppure } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

oppure le equaz. parametriche $x = (x_1 - r x_2) : (1 - r), y = (y_1 - r y_2) : (1 - r)$ ove r , parametro, rappresenta la coordinata baricentrica di (x, y) rispetto ad (x_1, y_1) e (x_2, y_2) .

Retta per $(x_1, y_1) \parallel$ alla retta $ax + by + c = 0$ ha l'equaz. $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$.

Retta per $(x_1, y_1) \perp$ alla retta $ax + by + c = 0$ ha l'equaz. $b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$.

Coordinate pluckeriane della retta $ax + by + c = 0$ sono $u = a : c, v = b : c$; le **plucker. omogenee** a, b, c .

Intersezione delle rette $ax + by + c = 0, a'x + b'y + c' = 0$ è il punto $x_1 = (bc' - b'c) : (ab' - a'b), y_1 = (ca' - c'a) : (ab' - a'b)$ supposto $ab' \neq a'b$.

Se $ab' = a'b$ le rette sono $\parallel$, e se anche i numeratori sono nulli, le rette coincidono. Se le due rette hanno le equaz. polari $\rho \cos(\omega - a) = a, \rho \cos(\omega - a') = a'$, le coord. del punto d'incontro sono

$$\rho = \left| \frac{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(a' - a)}}{\sin(a' - a)} \right|, \omega = \arctg \frac{a' \cos a - a \cos a'}{a \sin a' - a' \sin a}$$

Coseni direttori di una retta orientata sono i coseni degli angoli che la direzione positiva della retta forma con le direzioni positive degli assi. Fra i coseni direttori $\widehat{\cos x r}, \widehat{\cos y r}$ di una retta r , se $\widehat{xy} = \vartheta$, passa la relazione $\cos^2 \widehat{x r} + \cos^2 \widehat{y r} - 2 \cos \widehat{x r} \cos \widehat{y r} \cos \vartheta = \sin^2 \vartheta$, che in assi ortogo-

nali si riduce a $\cos^2 \widehat{xr} + \cos^2 \widehat{yr} = 1$. Di una retta r d'equaz. $ax + by + c = 0$ i coseni direttori sono

$$\cos \widehat{xr} = (a \cos \vartheta - b) : \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta}$$

$$\cos \widehat{yr} = (b \cos \vartheta - a) : \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta}$$

il doppio segno corrispondendo al senso arbitrario da fissarsi come positivo sulla retta.

Angolo di due rette r, r' orientate di coseni direttori $\cos \widehat{xr}, \cos \widehat{yr}; \cos \widehat{xr'}, \cos \widehat{yr'}$ ha per coseno e seno: $\cos \widehat{rr'} = [\cos \widehat{xr} \cos \widehat{xr'} + \cos \widehat{yr} \cos \widehat{yr'} - (\cos \widehat{xr} \cos \widehat{yr'} + \cos \widehat{xr'} \cos \widehat{yr}) \cos \vartheta] : \sin^2 \vartheta$; $\sin \widehat{rr'} = [\cos \widehat{xr} \cos \widehat{yr'} - \cos \widehat{xr'} \cos \widehat{yr}] : \sin \vartheta$, ϑ essendo l'angolo degli assi. In assi ortogonali $\cos \widehat{rr'} = \cos \widehat{xr} \cos \widehat{xr'} + \cos \widehat{yr} \cos \widehat{yr'}$; $\sin \widehat{rr'} = \cos \widehat{xr} \cos \widehat{yr'} - \cos \widehat{yr} \cos \widehat{xr'}$.

Angolo di due rette di date equaz. Se r ha l'equaz. $ax + by + c = 0$, r' l'equaz. $a'x + b'y + c' = 0$, in assi ortogonali si ha

$$\sin \widehat{rr'} = \frac{ab' - a'b}{\pm \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}}, \quad \cos \widehat{rr'} = \frac{aa' + bb'}{\pm \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}};$$

$$\operatorname{tg} \widehat{rr'} = (ab' - a'b) : (aa' + bb') = (m' - m) : (1 + mm')$$

se m, m' sono i coefficienti angolari di r, r' . Se gli assi fanno l'angolo $\vartheta \neq \pi : 2$ si ha

$$\sin \widehat{rr'} = \frac{(ab' - a'b) \sin \vartheta}{\pm \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta)(a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \vartheta)}};$$

$$\cos \widehat{rr'} = \frac{aa' + bb' - (ab' + a'b) \cos \vartheta}{\pm \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta)(a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \vartheta)}};$$

$$\operatorname{tg} \widehat{rr'} = \frac{(ab' - a'b) \sin \vartheta}{aa' + bb' - (ab' + a'b) \cos \vartheta} = \frac{(m' - m) \sin \vartheta}{1 + mm' - (m + m') \cos \vartheta}$$

Condizione di ortogonalità delle rette precedenti è $aa' + bb' = 0$ in assi ortogonali, e $aa' + bb' = (ab' + a'b) \cos \vartheta = 0$ se l'angolo degli assi è ϑ .

Condizione di parallelismo è $ab' - a'b = 0$ ossia $a:a' = b:b'$.

Distanze di un punto (x_1, y_1) da una retta di equazione normale $x \cos a + y \sin (\vartheta - a) - p = 0$ è $-(x_1 \cos_1 a + y_1 \sin (\vartheta - a) - p)$ convenendo che la distanza del punto dalla retta si conta col segno fissato sulla normale alla retta: se l'equaz. della retta è $ax + by + c = 0$ la distanza è $-k(ax_1 + by_1 + c)$, essendo k il coefficiente di normalità. Due punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) sono dalla stessa banda o no della retta $ax + by + c = 0$ secondo che sono o no dello stesso segno i trinomi $ax_1 + by_1 + c$, $ax_2 + by_2 + c$, proporzionali alle distanze dei punti dalla retta.

Condizione di allineamento dei tre punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) è

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Condizione perchè tre rette $a_i x + b_i y + c_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) appartengano ad un punto è che sia nullo il determinante formato con le 3 terne di coefficienti a_i, b_i, c_i .

Se rappresentiamo con R_1, R_2, R_3 i primi membri delle equaz. delle tre rette (*notazione abbreviata*) la condizione perchè appartengano ad un punto è che esistano tre numeri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ per cui sia abbia *identicamente* $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 = 0$. Ogni retta del fascio individuato da due rette $R_1 = 0, R_2 = 0$ è rappresentabile da un'equaz. $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = 0$, ove λ_1, λ_2 sono due numeri convenienti. Se tre rette $R_1 = 0, R_2 = 0, R_3 = 0$ non appartengono ad un fascio, ogni retta del piano si può rappresentare con $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 = 0$, con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ numeri convenienti.

3. -- Alcune formule di geometria piana. **Componenti** di un segmento $\overline{AB}$ sugli assi x e y , cioè le proiezioni di $\overline{AB}$ sugli assi x e y parallelamente ad y e x sono $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, se x_1, y_1 sono le coordin. di A , x_2, y_2 quelle di B .

Proiezione del segmento $\overline{AB}$ della retta r sulla retta s è $\overline{AB} \cos \widehat{rs}$; le proiezioni di $\overline{AB} = d$ sugli assi x, y sono $d \cos \widehat{xr} = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \cos \vartheta$, $d \cos \widehat{yr} = (x_2 - x_1) \cos \vartheta + (y_2 - y_1)$, che si riducono alle componenti se gli assi sono ortogonali.

Distanza dei 2 punti (x_1, y_1) (x_2, y_2) è, in valore assoluto, $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ in assi ortogonali, o

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \vartheta}$
se ϑ è l'angolo degli assi.

Segno di un'area piana. Se un pezzo di piano è limitato da una poligonale chiusa non intrecciata, la sua area si può dotare di un segno in corrispondenza del doppio senso con cui si percorre la poligonale: generalmente si prende come senso positivo quello che per un osservatore posto normalmente al piano coincide col senso positivo delle rotazioni. Analoga convenzione se il contorno è curvilineo.

Area di un triangolo $A_1 A_2 A_3$ è $\frac{1}{2} \operatorname{sen} \vartheta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$,

essendo x_i, y_i le coordin. di A_i , ϑ l'angolo degli assi: in coordinate polari

$$\frac{1}{2} \left\{ \varrho_2 \varrho_3 \operatorname{sen} (\omega_3 - \omega_2) + \varrho_3 \varrho_1 \operatorname{sen} (\omega_1 - \omega_3) + \varrho_1 \varrho_2 \operatorname{sen} (\omega_2 - \omega_1) \right\}.$$

Area di un poligono $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ è $\frac{1}{2} \operatorname{sen} \vartheta \left\{ y_1 (x_n - x_2) + \right.$
 $\left. + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_4) + \dots + y_n (x_{n-1} - x_1) \right\}$ (*formula di Gauss*); coincide, in valore assoluto, colla misura ordinaria se il poligono è convesso; si assume come definizione di area per

un poligono qualunque. In coordin. polari $\frac{1}{2} \left\{ \varrho_1 \varrho_2 \sin (\omega_2 - \omega_1) + \right.$
 $\left. + \varrho_2 \varrho_3 \sin (\omega_3 - \omega_2) + \dots + \varrho_n \varrho_1 \sin (\omega_n - \omega_1) \right\}.$

4. — Il punto come inviluppo di rette. Ogni equaz. $au + bv + c = 0$ di 1° grado nelle coordin. pluckeriane di retta uv rappresenta un punto, considerato come inviluppo delle rette per esso: se $c \neq 0$, il punto è proprio ed ha le coordinate cartes. $x = a : c$, $y = b : c$; se $c = 0$, il punto è improprio nella direzione di rapporto direttivo $b : a$. Se $a = c = 0$, l'equaz. $bv = 0$ rappresenta il punto all'infinito dell'asse y ; se $b = c = 0$, l'equaz. $au = 0$ rappresenta il punto all'infinito dell'asse x . Viceversa ogni punto proprio, diverso dall'origine, di coordinate cartes. $x_1 y_1$ ha l'equaz. pluck. $x_1 u + y_1 v + 1 = 0$: se il punto è improprio di rapporto direttivo m , ha l'equaz. pluck. $u + mv = 0$. L'origine non è rappresentata da alcuna equaz. in u e v . Due equaz. $au + bv + c = 0$, $a'u + b'v + c' = 0$ rappresentano lo stesso punto se e solo se $a : a' = b : b' = c : c'$; rappresentano punti allineati con l'origine se $a : a' = b : b' \neq c : c'$.

In coordinate pluckeriane omogenee un punto è rappresentato da un'equazione $aU + bV + cW = 0$; è allora rappresentabile anche l'origine, la quale ha l'equazione $W = 0$.

Punto sulla retta $u_1 v_1$ proiettato dall'origine secondo un raggio di coefficiente angolare m ha l'equazione $m(u - u_1) + (v - v_1) = 0$.

Punto comune alle due rette $(u_1 v_1) (u_2 v_2)$ ha l'equazione

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1 & u_2 & u \\ v_1 & v_2 & v \end{vmatrix} = 0, \text{ oppure } \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = \frac{v - v_1}{v_2 - v_1}$$

Punto di $(u_1 v_1)$ allineato con l'origine e il punto $au + bv + c = 0$ ha l'equaz. $a(u - u_1) + b(v - v_1) = 0$.

Retta pei due punti $au + bv + c = 0$, $a'u + b'v + c' = 0$ ha coordinate $u_1 = (bc' - b'c) : (ab' - a'b)$, $v_1 = (ca' - c'a) : (ab' - a'b)$

supposto $ab' \neq a'b$. Se $ab' = a'b$ i punti sono allineati con l'origine; se anche i numeratori sono nulli i punti coincidono.

Condizione di appartenenza ad un punto delle tre

$$\text{rette } (u_1 v_1) (u_2 v_2) (u_3 v_3) \text{ è } \begin{vmatrix} u_1 v_1 1 \\ u_2 v_2 1 \\ u_3 v_3 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Condizione perchè tre punti $au + bv + c = 0$; ($i = 1, 2, 3$) **siano allineati** è che il determinante formato da a, b, c sia nullo. Se rappresentiamo con $P_1 P_2 P_3$ i primi tre membri delle equazioni dei tre punti (*notazione abbreviata*) la suddetta condizione è che esistano tre numeri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ per cui si abbia identic. $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$. Dati due punti $P_1 = 0, P_2 = 0$ ogni punto della punteggiata $P_1 P_2$ ha un'equaz. $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$, con $\lambda_1 \lambda_2$ numeri convenienti. Se tre punti $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$ non sono allineati ogni punto del piano è rappresentabile da $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$, con $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ numeri convenienti.

5. — Trasformazione delle coordinate proiettive nel piano. Sia $A_1 A_2 A_3$ il triangolo fondamentale ed E il punto unità (Cap. I § 6 b) di un sistema di coordinate proiettive omogenee XYZ ; $A'_1 A'_2 A'_3 E'$ gli analoghi elementi di un nuovo sistema $X'Y'Z'$. Siano $a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0, a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0, a_3 X + b_3 Y + c_3 Z = 0$ le 3 equaz. dei lati $A'_2 A'_3, A'_3 A'_1, A'_1 A'_2$ rispettiv. le quali equaz. supponiamo siano preparate in modo (ciò che si ottiene colla moltiplicaz. per convenienti fattori numerici) che indicando abbreviatamente le equaz. con $l_1 = 0, l_2 = 0, l_3 = 0$, le rette $A'_1 E', A'_2 E', A'_3 E'$ abbiano le equaz. $l_2 - l_3 = 0, l_3 - l_1 = 0, l_1 - l_2 = 0$; allora le formule di trasformazione sono $\varrho X' = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z, \varrho Y' = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z, \varrho Z' = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z$. Queste formule stabiliscono una sostituzione lineare omogenea fra le due terne di variabili X, Y, Z , e X', Y', Z' , (Cap. XXVIII § I) il cui modulo è $\neq 0$ perchè le 3 rette $A'_2 A'_3, A'_3 A'_1, A'_1 A'_2$ non formano fascio.

CAPITOLO V.

Curve piane speciali.

1. — **Il Cerchio.** Un'equazione $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$ rappresenta un cerchio se $A:B:C=1:1:\cos \vartheta$, essendo $\vartheta = \widehat{xy}$; in assi ortogonali se $A=B$; $C=0$.

Cerchio di raggio r e centro (α, β) ha l'equaz. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos \vartheta - r^2 = 0$ se $\vartheta = \widehat{xy}$; oppure in assi ortogonali $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$. Se il centro è nell'origine l'equaz. diviene $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Del cerchio $A(x^2 + y^2) + 2Cxy\cos \vartheta + 2Dx + 2Ey + F = 0$ il raggio è $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos \vartheta - F}$. Se il radicando è > 0 , il cerchio è reale; se $= 0$, il cerchio si riduce a un punto, se < 0 , il cerchio è immaginario. Le coordinate del centro sono

$$\alpha = (E \cos \vartheta - D) : \sin^2 \vartheta; \quad \beta = (D \cos \vartheta - E) : \sin^2 \vartheta.$$

Punti comuni al cerchio $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ e alla retta $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$ hanno le ascisse $\delta \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{r^2 - \delta^2}$ le ordinate $\delta \sin \alpha \mp \cos \alpha \sqrt{r^2 - \delta^2}$; se $r > \delta$ la retta è *secante*, se $r = \delta$ la retta è *tangente*, se $r < \delta$ la retta è *esterna*.

Tangente al cerchio $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ nel punto $A(x_1, y_1)$ ha per equaz. $xx_1 + yy_1 - r^2 = 0$.

Tangente al cerchio suddetto per un punto $B(x_2, y_2)$ esterno al cerchio:

$$\frac{x - x_2}{\xi - x_2} = \frac{y - y_2}{\eta - y_2} \quad \text{ove} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{r^2 x_2 \mp r y_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2 - r^2}}{x_2^2 + y_2^2} \\ \eta = \frac{r^2 y_2 \pm r x_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2 - r^2}}{x_2^2 + y_2^2} \end{array} \right.$$

Cerchio pei tre punti $A_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, 3$) ha una equaz. che si ottiene eguagliando a zero il determinante di 4° ordine di cui la prima linea è $x^2 + y^2, x, y, 1$ e le altre 3 sono $x_i^2 + y_i^2, x_i, y_i, 1$ ($i = 1, 2, 3$).

Equaz. in coordinate polari di un cerchio: se il raggio è r e il centro è nel polo $\varrho = r$; se le coordinate polari del centro sono ϱ_o, ω_o , l'equaz. è $\varrho^2 - 2 \varrho \varrho_o \cos(\omega - \omega_o) + \varrho_o^2 - r^2 = 0$.

Equaz. pluckeriana del circolo di centro (α, β) e raggio r è $(au + \beta v + 1)^2 \sin^2 \vartheta = r^2(u^2 + v^2 - 2uv \cos \vartheta)$ se $\vartheta = \widehat{xy}$ o $(\alpha u + \beta v + 1)^2 = r^2(u^2 + v^2)$ se $\vartheta = \pi:2$.

Intersezioni di due circoli $x^2 + y^2 = r_1^2$; $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r_2^2$ hanno le ascisse

$$\frac{1}{2d^2} [\alpha(r_1^2 - r_2^2 + d^2) \pm \beta \sqrt{2d^2(r_1^2 + r_2^2) - d^4 - (r_1^2 - r_2^2)^2}]$$

e le ordinate

$$\frac{1}{2d^2} [\beta(r_1^2 - r_2^2 + d^2) \mp \alpha \sqrt{2d^2(r_1^2 + r_2^2) - d^4 - (r_1^2 - r_2^2)^2}]$$

posto $\alpha^2 + \beta^2 = d^2$. Le intersezioni sono reali distinte se $d > |r_2 - r_1|$, $d < r_1 + r_2$, sono reali e coincidenti se $d = |r_2 - r_1|$ (*cerchi tangenti internamente*) oppure se $d = r_1 + r_2$ (*cerchi tangenti esternamente*), sono immaginarie se $d > r_1 + r_2$ (*cerchi l'uno esterno all'altro*) oppure $d < |r_2 - r_1|$ (*cerchi l'uno interno all'altro*).

Ortogonalità fra due cerchi. Due cerchi $(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 - r_1^2 = 0$, $(x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 - r_2^2 = 0$ si tagliano ad angolo retto se $r_1^2 + r_2^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2$.

Potenza del punto $A(x_1, y_1)$ rispetto al cerchio $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$ è $(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 - r^2$. La potenza è negativa, nulla o positiva secondo che A è interno, sopra, o esterno al cerchio. Se A è esterno, la potenza è uguale all'area del rettangolo contenuto da una secante qualsiasi per A e dalla sua parte esterna oppure a quella del quadrato costruito sulla tangente per A . Se A è interno è uguale al rettangolo conte-

nuto dalle due parti in cui una qualunque corda per A è divisa da A stesso, oppure a quella del quadrato costruito sulla semicorda minima per A .

Fascio di cerchi. Se con $C=0$ rappresentiamo l'equaz. di un cerchio, con $C'=0$ un altro cerchio, ogni cerchio pei punti comuni ai due precedenti cerchi è rappresentato da $C - KC' = 0$, ove k è il rapporto delle potenze di un suo punto qualsiasi rispetto ai due cerchi $C=0$, $C'=0$.

Asse radicale è la retta di equaz. $C - C' = 0$; essa passa pei punti comuni ai due cerchi; è il luogo di ugual potenza rispetto ai circoli; è il luogo dei centri dei circoli che tagliano ortogonalmente i circoli del fascio.

Centro radicale di 3 cerchi $C=0$, $C'=0$, $C''=0$ è il punto comune ai 3 assi radicali delle 3 coppie di circoli precedenti. È il punto di uguale potenza rispetto ai 3 circoli: è il centro dei cerchi che tagliano ortogonalmente i 3 dati circoli.

Punti ciclici sono i due punti impropri di coefficienti angolari $\pm i$, comuni a tutti i circoli del piano.

2. — **Cicloide.** È il luogo di un punto di un circolo il quale rotoli (senza strisciare) sopra una retta l fissa. Riferendoci ad un sistema di assi di cui la l sia l'asse x e l'asse y sia una normale a questa per uno dei punti della curva che sono sull'asse x (cuspidi), l'equaz. è $x = r \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$, r raggio del circolo: le equaz. parametriche sono $x = r(\vartheta - \sin \vartheta)$, $y = r(1 - \cos \vartheta)$, essendo ϑ l'angolo di cui il circolo ha ruotato dalla posizione iniziale in cui era tangente nell'origine all'asse x .

Epicycloide è la curva descritta da un punto di un circolo C rotolante sopra un altro circolo C' . Se a è il raggio del circolo fisso, b quello del mobile, ϑ l'angolo di cui C ha ruotato dalla posizione iniziale tangente a C' in un punto del semiasse positivo x , le equaz. sono $x = (a + b) \cos h \vartheta -$

$-b \cos(h\vartheta + \vartheta)$; $y = (a + b) \sin h\vartheta - b \sin(h\vartheta + \vartheta)$ ove $h = b : a$ e gli assi sono ortogonali pel centro di C' .

Cardioide è l'epicicloide in cui $a = b$. Assunto per asse polare il diametro che passa pel punto della cardioide che sta sul cerchio fisso, la sua equaz. in coordin. polari è (essendo a il raggio del cerchio) $\varrho = 2a(1 + \cos \varphi)$. Se sopra ogni corda uscente da un punto A del cerchio di raggio a si prende a partire dal secondo estremo B un segmento BP uguale al diametro, il luogo di P è la **cardioide**.

Ipocicloide è la curva descritta da un punto di un circolo C che rotoli senza strisciare entro un altro circolo C' . Preso un sistema di assi ortog. pel centro O di C' se inizialmente C ha il centro sul semiasse positivo x , se a è il raggio di C' , b quello di C e ϑ l'angolo di cui C ruota, le equaz. sono:

$$x = (a - b) \cos h\vartheta + b \cos(h\vartheta - \vartheta); \quad y = (a - b) \sin h\vartheta + b \sin(h\vartheta - \vartheta), \text{ ove } h = b : a.$$

Asterioide (o *ipocicloide a quattro regressi*) è l'ipocicloide

in cui $b = \frac{a}{4}$; la sua equaz. in coordinate cartesiane è $x^{\frac{2}{3}} +$

$+ y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. È l'involuppo di una retta che ha staccato da due assi ortog. un segmento costante a .

3. — **Concoide** di una data curva (*base*) rispetto a un punto P (*polo*) è il luogo dei punti $M_1 M_2$ che distano di un egual segmento costante k dai punti M della curva sui raggi che da P vanno ai punti M stessi.

Concoide di Nicomede è la concoide della retta: prendendo per asse x la $\perp$ e per asse y la $\parallel$ per P alla retta base, l'equaz. è $(x^2 + y^2)(x - a)^2 - k^2 x^2 = 0$ se a è la distanza di P dalla base.

Sia APM un triangolo rettangolo in A ; si descriva la concoide che ha P come polo, la retta MA come base, il doppio di $\overline{OM}$ come segmento costante k . Da M si mandi la $\parallel$ a PA .

fino ad incontrare in N il ramo che è da banda opposta del polo rispetto alla base; la PN fa con PA un angolo che è la terza parte dell'angolo MPA : così è risoluto il problema della **trisezione dell'angolo**.

Lumaca di Pascal è una concoide del cerchio: se il raggio di questo è b , l'equaz. è $\varrho = k + 2b \cos \varphi$. In coordinate cartesiane prendendo l'asse x coincidente coll'asse polare e P come origine, l'equaz. è $(x^2 + y^2 - 2bx)^2 = k^2(x^2 + y^2)$. Se $k = 2b$ si ha la *cardioide*.

Cassinoide (od *ovale del Cassini*) è il luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi F, F' (*fuochi*) hanno un prodotto costante b^2 . Se $2a$ è la distanza dei due fuochi, presa la retta FF' per asse x e la normale nel punto medio di FF' per asse y , l'equazione è $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4$ oppure in coord. polari (asse x coincidente con l'asse polare e l'origine col polo) $\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\varphi = b^4 - a^4$.

Lemniscata di Bernouilli è la cassinoide nel caso $a = b$: l'equaz. in coord. polari è $\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

Lemniscata di Geronio. Se sopra un diametro fisso di un circolo di centro O e raggio r e sopra una tangente ad uno dei suoi estremi si proietta un punto P del circolo rispettivamente in $P'P''$, il luogo dell'intersezione di PP' con OP'' è la lemniscata di Geronio. Preso il diametro fisso per asse x e per asse y il diametro ortog. l'equaz. è $x^4 = r^2(x^2 - y^2)$ e le equaz. parametriche sono $x = r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta \cos \vartheta$.

Visiera (o *cubica di Agnesi*). Essendo $AB = 2r$ un diametro di un circolo si mandi la tangente in B e una retta per A che incontra in P_1 il circolo, in P_2 la tangente. Il luogo del punto medio di P_1P_2 è la visiera di Agnesi. L'equaz. è $\varrho = r(\sec \varphi + \cos \varphi)$ quando si prende come polo A e asse polare AB ; in cordin. cartes. è $x(x^2 + y^2) = r(2x^2 + y^2)$.

Cissoide di Diocle. In un circolo si conduca un diametro $AB (= a)$ e la tangente in B ; da A si mandi una retta che incontra il circolo in D e la tangente in E , poi sulla retta a

partire da A un segmento $AM = DE$; il luogo di M è la *cissoide*. Preso per asse x la AB e per asse y la tangente in A l'equaz. è $y^2(a - x) = x^3$; in coord. polari $\rho = a \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi$, le equaz. parametriche sono $x = a m^2 : (1 + m^2)$, $y = a m^3 : (1 + m^2)$, ove m ha il significato di coefficiente angolare della retta che proietta il punto (x, y) dall'origine; è una curva unicursale (Cap. III § 1).

Dal punto $Q(0, 2a)$ si mandi QB che incontra in P la *cissoide*, la retta AP ha il coeffic. angolare $m = \sqrt[3]{2}$. Preso un punto C sull'asse x e mandata per C la $\perp$ all'asse, questa incontra la AP in un punto H in guisa che $\overline{CH} = \sqrt[3]{2} \overline{AC}$; cioè $\overline{CH}^3 = 2 \overline{AC}^3$: è così risoluto il **problema della duplicazione del cubo** (problema di Delo).

Folium è la cubica $x^3 + y^3 = 3axy$; le equaz. parametriche sono $x = (1 + m^3) : 3am$, $y = (1 + m^3) : 3a$, se m è il coeffic. angolare del raggio che dall'origine proietta il punto (x, y) ; è una curva *unicursale*.

4. — **Alcune curve trascendenti. Spirale d'Archimede** ha l'equaz. polare $\rho = a^2 \varphi$.

Spirale iperbolica ha l'equaz. polare $\rho \varphi = a$.

Spirale parabolica ha l'equaz. polare $\rho^2 = a^2 \varphi$.

Spirale logaritmica ha l'equaz. polare $\rho = e^{a\varphi}$.

Catenaria ha l'equaz. $x = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$; l'asse x dicesi *direttrice*.

Catenaria di ugual resistenza ha l'equazione $y = -a \log \cos \frac{x}{a}$; è costituita da infiniti rami che si ottengono spostando successivamente di $2\pi a$, $\parallel$ all'asse x , in un senso e nell'altro, il ramo compreso fra le rette $x = \pm \pi a : 2$ (*asintoti*).

Trattrice ha l'equaz. $y = -k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} + \sqrt{k^2 - x^2}$, ha per asintoto l'asse y .

Quadratrice di Dinostrato. Siano OA , OB due raggi $\perp$ di un cerchio di raggio 1; L percorra di moto uniforme l'arco BA , M percorra di moto uniforme il raggio OA in guisa che partendo nello stesso tempo da B ed O giungano insieme in A ; il luogo del punto P intersezione di OL con la $\parallel$ ad OB per M è la quadratrice. Preso OA come asse x , OB come asse y l'equaz. è $y = x \cotg \frac{\pi x}{2}$. L'equaz. in coordinate polari è $\rho = 2\varphi : \pi \sin \varphi$, se si prende l'asse y come asse polare. La quadratrice incontra l'asse y in un punto H tale che $OH = 2 : \pi$ onde il 3° proporzionale dopo OH e OB è $\pi : 2$ cioè il quadrante di cerchio.

CAPITOLO VI.

Le Coniche

1. — Equaz. dei luoghi piani di 2.^o ordine (coniche) in coord. cartesiane

$$(1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0; \text{ in coord. cartes. omogenee}$$

$$(2) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$$

Rappresenteremo con $f(x, y) = 0$ la (1), con $F(x, y, z) = 0$ la (2): con $F'_x(x, y, z)$, F'_y , F'_z le tre derivate parziali di

1'. — Equaz. degli involuppi piani di 2.^a classe (coniche) in coord. pluckeriane

$$(1') \quad b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2 + 2b_{13}u + 2b_{23}v + b_{33} = 0; \text{ in coord. pluck. omogenee}$$

$$(2') \quad b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2 + 2b_{13}uw + 2b_{23}vw + b_{33}w^2 = 0.$$

Rappresenteremo con $f(u, v) = 0$ la (1'), con $F(u, v, w) = 0$ la (2'): con $F'_u(u, v, w)$, F'_v , F'_w le tre derivate parziali di

F rapporto ad x, y e z rispettivamente, cioè i trinomi $2(a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z)$ per $i=1, 2, 3$ rispettivamente; con $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ le derivate parziali di $f(x, y)$ rapporto ad x e y , cioè F'_x , F'_y per $z=1$.

Discriminante della (2) è il determinante simmetrico

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

con A_{rs} denoteremo il complemento algebrico di a_{rs} in A : **discriminante** della (1) dicesi A_{33} .

Degenerare è una conica se il 1° membro di (1) è il prodotto di due fattori di 1° grado: la conica si compone di due rette (reali distinte, coincidenti o immaginarie) le cui equaz. si ottengono eguagliando a zero i due fattori.

Condizione di degenerescenza è $A=0$; le coordinate omog. del punto comune alle due rette sono le soluzioni comuni alle equaz. $F'_x=0$, $F'_y=0$, $F'_z=0$.

Conica per 5 punti (x_i, y_i) . I coefficienti a_{rs} della (1) o meglio i rapporti di 5 di essi ad

F rapporto ad u, v, w , rispettivamente, cioè i trinomi $2(b_{i1}u + b_{i2}v + b_{i3}w)$ per $i=1, 2, 3$ rispettivamente; con $f'_u(u, v)$, $f'_v(u, v)$ le derivate parziali di $f(u, v)$ rapporto ad u e v , cioè F'_u , F'_v per $w=1$.

Discriminante della (2') è il determinante simmetrico

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix};$$

con B_{rs} denoteremo il complemento algebrico di b_{rs} in B : **discriminante** della (1') dicesi B_{33} .

Degenerare è un'inviluppo del 2° ordine se il 1° membro di (1') è il prodotto di due fattori di 1° grado: l'inviluppo si compone di due punti (reali distinti, coincidenti, o immaginari) le cui equaz. si ottengono eguagliando a zero i due fattori.

Condizione di degenerescenza è $B=0$; le coordinate omogenee della retta pei due punti sono le soluzioni comuni alle equaz. $F'_u=0$, $F'_v=0$, $F'_w=0$.

Conica tangente a 5 rette (u_i, v_i) . I coefficienti b_{rs} della (1') o meglio i rapporti di 5 di

un sesto si determinano dalle 5 equaz. $f(x_i y_i) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$): per 5 punti passa sempre una conica, determinata se la caratteristica della matrice di cui le linee sono $x_i^2, x_i y_i, y_i^2, x_i, y_i, 1$ ($i = 1, \dots, 5$) è 5: in questo caso l'equaz. della conica pei 5 punti si ottiene eguagliando a zero il determinante del 6° ordine di cui la prima linea è $x^2, xy, y^2, x, y, 1$ e le altre 5 quelle della matrice precedente.

Intersezione della conica (2) con la retta pei due punti $(x_1 y_1 z_1) (x_2 y_2 z_2)$ sono i punti di coord. omogenee $kx_1 + x_2, ky_1 + y_2, kz_1 + z_2$ (di coord. cartes. $(kx_1 + x_2):(k+1)$, ecc.) ove si mettano per k le radici dell'equaz. $k^2 F(x_1 y_1 z_1) + k[x_2 F'_x(x_1 y_1 z_1) + y_2 F'_y(x_1 \dots) + z_2 F'_z(x_1 \dots)] + F(x_2 y_2 z_2) = 0$. I 2 punti sono reali distinti (*retta secante*) o reali coincidenti (*retta tangente*) o immaginari (*retta esterna*) se tali sono le radici k_1, k_2 .

Tangente alla conica (2) per un suo punto $(x_1 y_1 z_1)$ ha l'equaz. $x F'_x(x_1 y_1 z_1) + y F'_y(x_1 \dots) + z F'_z(x_1 \dots) = 0$; la tangente alla conica (1) per

essi ad un sesto si determinano dalle 5 equaz. $f(u_i v_i) = 0$ ($i = 1, \dots, 5$): tangente a 5 rette v'ha sempre una conica, determinata se la caratteristica della matrice di cui le linee sono $u_i^2, u_i v_i, v_i^2, u_i, v_i, 1$ ($i = 1, \dots, 5$) è 5: in questo caso l'equaz. dell'involuppo di cui fanno parte le 5 rette si ottiene eguagliando a zero il determ. del 6° ordine di cui la prima linea è $u^2, uv, v^2, u, v, 1$ e le altre 5 quelle della matrice precedente.

Tangenti alla conica (2') per il punto comune alle due rette $(u_1 v_1 w_1) (u_2 v_2 w_2)$ sono le rette di coord. omogenee $ku_1 + u_2, kv_1 + v_2, kw_1 + w_2$ (di coord. pluck. $(ku_1 + u_2):(k+1)$, ecc.) ove si mettano per k le radici dell'equaz. $k^2 F(u_1 v_1 w_1) + k[u_2 F'_u(u_1 v_1 w_1) + v_2 F'_v(u_1 \dots) + w_2 F'_w(u_1 \dots)] + F(u_2 v_2 w_2) = 0$. Le 2 tangenti sono reali distinte (*punto esterno*) o coincidenti (*punto sulla conica*) o immaginario (*punto interno*) se tali sono le radici k_1, k_2 .

Punto di contatto alla conica (2') di una retta dell'involuppo $u_1 v_1 w_1$ ha l'equaz. $u F'_u(u_1 v_1 w_1) + v F'_v(u_1 \dots) + w F'_w(u_1 \dots) = 0$; il punto di

un suo punto $(x_1 y_1)$ ha l'equazione $(x - x_1) f'_x(x_1 y_1) + (y - y_1) f'_y(x_1 y_1) = 0$ ossia $a_{11} x x_1 + a_{12} (x y_1 + x_1 y) + a_{22} y y_1 + a_{13} (x + x_1) + a_{23} (y + y_1) + a_{33} = 0$.

Coppia di tangenti alla conica (2) pel punto $(x_1 y_1 z_1)$

ha complessivamente l'equaz.

$$F(x y z) F(x_1 y_1 z_1) -$$

$$\frac{1}{4} [x F'_x(x_1 y_1 z_1) + y F'_y(x_1 \cdot \cdot) + z F'_z(x_1 \cdot \cdot)]^2 = 0.$$

L'equaz. in coord. cartes. si ha facendo $z = z_1 = 1$: le tangenti sono reali distinte se $A f(x_1 y_1) < 0$ (punto esterno), reali coincidenti se $f(x_1 y_1) = 0$ (punto sulla conica), immaginarie se $A f(x_1 y_1) > 0$ (punto interno).

contatto alla (1') su una retta $(u_1 v_1)$ dell'involuppo ha l'equazione $(u - u_1) f'_u(u_1 v_1) + (v - v_1) f'_v(u_1 v_1) = 0$ ossia $b_{11} u u_1 + b_{12} (u v_1 + u_1 v) + b_{22} v v_1 + b_{13} (u + u_1) + b_{23} (v + v_1) + b_{33} = 0$.

Coppia di punti comuni alla conica (2') sulla retta $(u_1 v_1 w_1)$

ha complessivamente l'equaz. $F(u v w) F(u_1 v_1 w_1) -$

$$\frac{1}{4} [u F'_u(u_1 v_1 w_1) + v F'_v(u_1 \cdot \cdot) + w F'_w(u_1 \cdot \cdot)]^2 = 0.$$

L'equazione in coord. pluck. si ha facendo $w = w_1 = 1$: i punti sono reali distinti se $B f(u_1 v_1) < 0$ (retta secante); reali coincidenti se $f(u_1 v_1) = 0$ (retta tangente) immaginari se $B f(u_1 v_1) > 0$ (retta esterna).

2. — **Punti impropri della conica (2)** sono quelli di coord. soddisfacenti alle 2 equaz. $F(x y z) = 0$, $z = 0$, cioè di coord. omogenee $(-a_{12} + \sqrt{-A_{33}}, a_{11}, 0)$ $(-a_{12} - \sqrt{-A_{33}}, a_{11}, 0)$.

I 3 generi di coniche. Se $A_{33} < 0$, i punti impropri della conica sono reali distinti e la conica dicesi del genere **iperbole**; se $A_{33} = 0$ sono reali coincidenti e la conica dicesi del genere **parabola**; se $A_{33} > 0$ i punti impropri sono immaginari e la conica dicesi del genere **ellisse**. Posto $-A_{33} x^2 + 2 A_{31} x y - A_{11} = -A_{33} (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ e supposto non nullo a_{11} o a_{22} , si ha

Se $A_{33} < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Iperbole non degenerare se } \alpha_1 \neq \alpha_2 \\ \text{» degenerare in 2 rette reali se } \alpha_1 = \alpha_2. \end{array} \right.$

Se $A_{33} > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellisse reale se } a_1 a_2 \text{ sono reali distinte} \\ \text{» immaginaria se } a_1 a_2 \text{ sono reali coincidenti} \\ \text{» degenerare in 2 rette immaginarie se } a_1 a_2 \\ \text{sono complesse.} \end{array} \right.$

Se $A_{33} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Parabola non degenerare se } A_{31} \neq 0 \\ \text{» degenerare in 2 rette pa-} \\ \text{rallele se } A_{31} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{reali se } A_{11} < 0 \\ \text{immaginarie se } \\ A_{11} > 0 \\ \text{coincidenti se } \\ A_{11} = 0. \end{array} \right.$

Se $a_{11} = a_{22} = 0$, posto $k = (2 a_{13} a_{23} - a_{12} a_{33}) : 2 a_{12}^2$, se $k = 0$ si ha un'iperbole degenerare in 2 parallele agli assi pel punto $P(-a_{23} : a_{12}, -a_{13} : a_{12})$; se $k \neq 0$ si ha un'iperbole non degenerare con gli asintoti paralleli agli assi pel punto P .

Intersezioni della conica (1) con la retta $ux + vy + w = 0$ hanno le coord.

$$x = \frac{(a_{12} v - a_{22} u) w - (a_{13} u - a_{23} v) v + v \sqrt{-\Phi(u v w)}}{a_{11} v^2 + a_{22} u^2 - 2 a_{12} uv};$$

$$y = \frac{(a_{13} u - a_{23} v) u - (a_{11} v - a_{12} u) w + u \sqrt{-\Phi(u v w)}}{a_{11} v^2 + a_{22} u^2 - 2 a_{12} uv}$$

ove $\Phi = A_{11} u^2 + 2 A_{12} uv + A_{22} v^2 + 2 A_{13} uv + 2 A_{23} vw + A_{33} w^2$.

Se $\Phi(u v w) < 0$ la retta è secante, se $\Phi(u v w) = 0$ è tangente, se $\Phi(u v w) > 0$ la retta è esterna. Se $a_{11} v^2 + a_{22} u^2 - 2 a_{12} uv = 0$ la retta taglia nel punto di ascissa

$x = (a_{22} w^2 - 2 a_{23} v w + a_{33} v^2) : \{ (a_{12} v - a_{22} u) w - (a_{13} u - a_{23} v) v \}$ e nel suo punto improprio; se anche $(a_{12} v - a_{22} u) w - (a_{13} u - a_{23} v) v = 0$ la retta è tangente all'infinito; se infine anche $a_{22} w^2 - 2 a_{23} v w + a_{33} v^2 = 0$, la retta appartiene alla conica (degenerare).

Centro di una conica. Centro di una conica è un punto C che biseca le corde per esso; l'ellisse e l'iperbole hanno centro proprio; la parabola no; le coordinate del centro sono le soluzioni comuni alle 2 equaz. $f'_x(x y) = 0$, $f'_y(x y) = 0$

cioè $x = A_{13} : A_{33}$, $y = A_{23} : A_{33}$. Nella parabola le coordinate omogenee sono A_{13} , A_{23} , 0. (Vedi § 3).

Se gli assi cartesiani hanno l'origine del centro, l'equazione manca dei termini di 1° grado in x e in y .

Diametro di una conica, è il luogo dei punti medi delle corde || ad una stessa direzione; passa pel centro; si dice *coniugato* a quella direzione. Se m è il coefficiente angolare di questa direzione, l'equaz. del diametro coniugato è $f'_x(xy) + m f'_y(xy) = 0$ e il suo coefficiente angolare è $m' = -(a_{11} + m a_{12}) : (a_{12} + m a_{22})$ (Vedi § 3).

Diametri coniugati sono due diametri l'uno coniugato alla direzione dell'altro. Le tangenti all'estremità di un diametro sono || al diametro coniugato. Se gli assi cartesiani coincidono con due diametri coniugati l'equaz. manca dei termini in x, y, xy . I coefficienti angolari m, m' di 2 diametri coniugati si corrispondono nell'involuzione $a_{22} mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0$, degenerare nella parabola (Vedi § 3).

Asintoti della conica (1) sono le rette doppie dell'involuzione suddetta; i coefficienti angolari si hanno risolvendo l'equaz. dell'involuzione ove si è fatto $m = m'$: essi sono $(-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}) : a_{22}$; sono reali nell'iperbole, immaginari nell'ellisse; per la parabola coincidono con la retta impropria. Gli asintoti sono tangenti all'infinito; le loro equaz. sono:

$$y - \frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}}{a_{22}} \left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}} \right)$$

Assi della conica (1) a centro sono la coppia di diametri coniugati ortogonali. I rapporti direttivi sono le soluzioni in m dell'equaz. $a_{12} m^2 + (a_{11} - a_{22}) m - a_{12} = 0$ se gli assi sono ortogonali 0 all'equaz. $(a_{12} - a_{22} \cos \vartheta) m^2 + (a_{11} - a_{22}) m + (a_{11} \cos \vartheta - a_{12}) = 0$ se gli assi fanno l'angolo ϑ . Se per assi ortogon. è $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, o in assi d'angolo ϑ , è $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{11} \cos \vartheta$, le equaz. preced. sono soddisfatte da ogni valore di m : la conica è un *cerchio* ed ogni coppia di diametri ortogon. sono assi. Gli asintoti di una iperbole bisecano gli angoli degli assi.

Asse della parabola è la retta $a_{11}x + a_{12}y + (a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23}) = 0$.

3. — **Punti coniugati** rispetto ad una conica non degenera diconsi 2 punti $P P'$ coniugati armonici delle intersezioni A, B della retta PP' con la conica: sulla PP' codesti 2 punti appartengono ad un' involuzione di cui A e B sono i punti doppi. 2 punti $P(x_1 y_1 z_1), P'(x_2 y_2 z_2)$ sono coniugati se $x_2 F'_x(x_1 y_1 z_1) + y_2 F'_y(x_1 \dots) + z_2 F'_z(x_1 \dots) = 0$. Tenendo fisso P e ritenendo variabile P' , il luogo di P' è una retta p la cui equaz. è la precedente ove si prendano $x_2 y_2 z_2$ come coordinate correnti; la p dicesi **polare** di P rispetto alla conica, e P **polo** di p . Le coord. omogenee di p sono $q u_1 = \frac{1}{2} F'_x(x_1 y_1 z_1), q v_1 = \frac{1}{2} F'_y(x_1 \dots), q w_1 = \frac{1}{2} F'_z(x_1 \dots)$

Polarità subordinata dalla conica (1) è la corrispondenza fra polo e polare definita dalle equaz. precedenti. Punti e rette coniugate nella polarità lo sono rispetto alla conica. Se P appartiene alla conica l'equaz. della polare coincide con quella della tangente per P : dunque i

3'. — **Rette coniugate** rispetto ad una conica non degenera diconsi 2 rette p, p' coniugate armoniche delle tangenti a e b pel punto $(p p')$ alla conica: nel fascio di centro il punto $(p p')$ codeste due rette appartengono ad un' involuzione di cui a e b sono le rette doppie. 2 rette $p(u_1 v_1 w_1), p'(u_2 v_2 w_2)$ sono coniugate se $u_2 F'_u(u_1 v_1 w_1) + v_2 F'_v(u_1 \dots) + w_2 F'_w(u_1 \dots) = 0$. Tenendo fissa p e ritenendo variabile p' , l'involuppo di p' è un punto P la cui equaz. è la precedente ove si prendano $u_2 v_2 w_2$ come coordinate correnti; P dicesi **polo** di p rispetto alla conica e p **polare** di P . Le coord. cartes. omogenee di P sono $\sigma x_1 = \frac{1}{2} F'_u(u_1 v_1 w_1), \sigma y_1 = \frac{1}{2} F'_v(u_1 \dots), \sigma z_1 = \frac{1}{2} F'_w(u_1 \dots)$.

Polarità subordinata dalla conica (1') è la corrispondenza fra polare e polo definita dalle equaz. precedenti. Rette e punti coniugati nella polarità lo sono rispetto alla conica. Se p appartiene all'involuppo l'equaz. del polo coincide con quella del punto di

punti autoconiugati sono quelli della conica: le rette autoconiugate sono le tangenti, quindi la conica involuppo fondamentale della polarità è la conica stessa (1) considerata come involuppo delle sue tangenti. Allora (v. Polarità Cap. X § 2) l'equaz. tangenziale della conica (1) è (3) $A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw = 0$ (A_{ih} compl. algebrico di a_{ih} in A) od anche

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Perchè la equaz. (1') rappresenti la stessa conica rappresentata da (1) bisogna dunque che b_{rs} sia uguale o proporzionale a A_{rs} . Data l'equaz. (3) l'equaz. puntuale della conica

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & x \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & y \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

coincide all'infuori del fattore A con la (1).

Rette principali nell'involuzione delle rette coniugate per un punto diconsi quelle della coppia ortogonale.

contatto di p : dunque le rette autoconiugate sono quelle dell'involuppo: i punti autoconiugati sono quelli di contatto, quindi la conica luogo fondamentale della polarità è la conica (1') considerata come luogo dei punti di contatto. Allora (v. Polarità Cap. X § 2) l'equaz. puntuale della conica (1') è (3') $B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + B_{33}z^2 + 2B_{12}xy + 2B_{13}xz + 2B_{23}yz = 0$ (B_{ih} compl. algebrico di b_{ih} in B) od anche

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & x \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & y \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & z \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Perchè la equaz. (1) rappresenti la stessa conica (1') bisogna dunque che a_{rs} sia uguale o proporzionale a B_{rs} .

Data l'equaz. tangenziale della conica

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & u \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & v \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

coincide all'infuori del fattore B con la (1'),

Il **centro** è il polo della retta all'infinito; è **autoconiugato** ed improprio nella parabola; i **diametri** sono le polari dei punti impropri; l'involuzione delle rette coniugate pel centro dicesi **involuzione dei diametri coniugati**: è ellittica nell'ellisse; iperbolica nella iperbole; degenera nella parabola. Gli **asintoti** sono i diametri autoconiugati e perciò tangenti all'infinito; sono reali distinti solo nell'iperbole.

Triangolo autopolare o **autoconiugato** rispetto ad una conica è un triangolo di cui ciascun vertice è polo del lato opposto.

Equaz. d'una conica riferita ad un triangolo autopolare come triangolo fondamentale in un sistema di coord. proiettive. Poichè le polari dei punti fondamentali $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sono $F'_{xx} = 0$, $F'_{yy} = 0$, $F'_{zz} = 0$ che devono coincidere con $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ porta ad essere $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$; l'equaz. della conica si riduce a: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0$ (**equazione normale o canonica**) e l'equazione tangenziale $a_{22}a_{33}u^2 + a_{33}a_{11}v^2 + a_{11}a_{22}w^2 = 0$.

Equaz. di una conica riferita a 2 diametri coniugati. Due diametri coniugati e la retta impropria formano un triangolo autoconiugato, perciò l'equaz. precedente è l'equaz. in coordin. cartes. omog., presi per assi i 2 diametri coniugati. In coord. cartes. ordinarie l'equaz. è $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0$: se $a_{33} = 0$ la conica degenera nelle rette (reali o no) $y = \pm x \sqrt{-a_{11} : a_{22}}$; se $a_{33} \neq 0$, l'equaz. è $\frac{a_{11}}{-a_{33}}x^2 + \frac{a_{22}}{-a_{33}}y^2 = 1$; se $\frac{a_{11}}{-a_{33}}, \frac{a_{22}}{-a_{33}}$ sono negativi la conica è immaginaria, se positivi è un'ellisse, se di segni contrari un'iperbole, nel qual caso l'asse x è trasverso se $-(a_{33} : a_{11}) > 0$, altrimenti lo è l'asse y . Le lunghezze dei semidiametri coniugati posti rispettiv. su gli assi x e y sono $\sqrt{|-a_{33} : a_{11}|}$, $\sqrt{|-a_{33} : a_{22}|}$.

Equaz. di una conica a centro riferita agli assi. L'equaz. cartes. dell'ellisse è (4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a e b i semiassi;

l'equaz. tangenziale $a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1$; l'equaz. dell'iperbole è (5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, se l'asse x è trasverso o (6) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se è trasverso l'asse y ; le due iperboli si dicono **coniugate**, hanno gli stessi asintoti $y = \pm b:a$. Si dicono **vertici** dell'iperbole i due punti che sono sull'asse trasverso; se questo è l'asse x , la distanza dei vertici dal centro è a (**semiasse trasverso**): le equaz. tangenziali sono $a^2 u^2 - b^2 v^2 = 1$ oppure $-a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1$ a seconda che è trasverso l'asse x o l'asse y .

Iperbole riferita agli asintoti ha l'equaz. $xy = k$ e l'equaz. tangenziale $uv = 1:4k$.

Equaz. parametriche delle coniche (4) (5) (6). L'ellisse (4) ha le equaz. parametriche $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ (se $a = b$ si ha un cerchio di raggio a); l'iperbole (5) ha le equaz. $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$, dell'iperbole (6) $x = a \sinh t$, $y = b \cosh t$ (Cap. XLIV, § 5 b).

Parabola riferita all'asse e alla tangente nel vertice (*punto della parabola sull'asse*) ha l'equaz. (7) $y^2 = 2px$ e l'equaz. tangenziale $v^2 = 2u:p$. Dicesi p *parametro* (§ 4).

Tangente e normale alle coniche (4) (5) (6) (7) **per un loro punto**. La tangente in (x_1, y_1) all'ellisse (4) ha l'equazione

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1, \text{ la normale } a^2(x - x_1):x_1 = b^2(y - y_1):y_1;$$

la tangente all'iperbole in (x_1, y_1) è $\pm (xx_1:a^2) \mp (yy_1:b^2) = 1$ e la normale $\pm a^2(x - x_1):x_1 = \mp b^2(y - y_1):y_1$, il segno superiore convenendo all'equaz. (5), l'inferiore a (6). L'equaz. della tangente in (x_1, y_1) alla parabola (7) è $y y_1 = p(x + x_1)$, della normale $(x - x_1):p = (y - y_1):y_1$.

Sottotangente e sottonormale, vedi Cap. XLV, § 7.

4. — **Fuoco** di una conica è un punto sostegno di una involuzione di rette coniugate coincidente con l'involuzione degli angoli retti. Dette α, β le coord. cartes. di un punto P , m, m' i coefficienti angolari di due rette coniugate per P , l'equaz. di detta involuzione per l'ellisse (4) o l'iperbole (5) è

$$(a^2 - a'^2) m m' + a \beta (m + m') \pm b^2 - \beta^2 = 0 \quad \{ + \text{ per (4), } - \text{ per (5)} \}.$$

Coinciderà con l'involuz. degli angoli retti $m m' + 1 = 0$, per l'ellisse (4) (sopposto $a > b$) se $\beta = 0$, $a = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$; per l'iperbole, se $\beta = 0$, $a = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$. Nell'ellisse i fuochi sono 2 posti sull'asse maggiore alla distanza del centro $c = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ (c , **distanza focale**); nel cerchio coincidono nel centro; nell'iperbole sono 2 posti sull'asse trasverso alla distanza dal centro $c = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ (c , **distanza focale**). Nella parabola $y^2 = 2px$, l'equaz. dell'involuzione delle rette coniugate per P è $2am' - \beta(m + m') + p = 0$ e coinciderà con quella degli angoli retti se $a = p:2$, $\beta = 0$. Nella parabola si ha un fuoco posto sull'asse alla distanza $p:2$ dal vertice e dalla parte ove volge la concavità.

Direttrici di una conica sono le polari dei fuochi; nell'ellisse (4) sono le rette $x = \pm a^2 : c$; nella iperbole (5) sono le rette $x = \pm a^2 : c$ (c le rispettive distanze focali); nella parabola (7) è la retta $x = -p:2$.

Eccentricità di un'ellisse è il rapporto della distanza focale al semiasse maggiore, nell'iperbole della distanza focale al semiasse trasverso, $a:c$; si indica con e ; è < 1 nell'ellisse, nulla nel cerchio, > 1 nell'iperbole.

Distanza di un punto di una conica dal fuoco. Se x è l'ascissa di un punto P dell'ellisse (4) la sua distanza dal fuoco $\bar{F}(c, 0)$, $|\bar{PF}| = a - ex$ e dal fuoco $F'(-c, 0)$ è $|\bar{PF}'| = a + ex$; se $\bar{P}$ è sull'iperbole (5), $|\bar{PF}| = \pm (ex - a)$, $|\bar{PF}'| = \pm (ex + a)$ prendendo per segno esterno quello di x ; se P è sulla parabola (7) di cui $F(p:2, 0)$ è il fuoco, $|\bar{PF}| = x + (p:2)$.

Rapporto delle distanze di un punto di una conica da un fuoco e dalla sua direttrice è nell'ellisse e iperbole uguale all'eccentricità; nella parabola è $= 1$; dicesi perciò che l'eccentricità della parabola è 1.

Proprietà metriche delle coniche: l'ellisse è il luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi F, F' (fuochi) è costante. Se $2a$ è questa costante, l'ellisse ha per asse maggiore

la retta per $F F'$; il semiasse maggiore è a , il minore $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ se $2c$ è la distanza $F F'$. L'ellisse è il luogo dei punti le cui distanze da un punto F (fuoco) e da una retta d (direttrice) hanno un rapporto costante e (eccentricità) < 1 . Se k è la distanza di F da d , il semiasse maggiore è $k e : (1 - e^2)$, il minore $k e : \sqrt{1 - e^2}$. L'**iperbole** è il luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi F, F' (fuochi) hanno differenza costante. Se questa è $2a$, l'asse trasverso è lungo $2a$, contiene i fuochi F, F' ; il semiasse non trasverso è $b = \sqrt{a^2 + c^2}$, se $2c$ è la distanza $F F'$. L'iperbole è il luogo dei punti le cui distanze da un punto F (fuoco) e da una retta d (direttrice) hanno rapporto costante e (eccentricità) > 1 . Se k è la distanza di F da d il semiasse trasverso è $k e : (e^2 - 1)$, il non trasverso è $ek : \sqrt{e^2 - 1}$. La **parabola** è il luogo dei punti equidistanti da un punto F (fuoco) e da una retta d (direttrice). Se p è la distanza di F da d , p è il *parametro* della parabola.

Nell'ellisse sono uguali i diametri coniugati che stanno sulle diagonali del rettangolo costruito sugli assi: l'angolo acuto che essi formano è il minimo fra gli angoli dei diametri coniugati.

In una conica a centro la distanza di una tangente dal centro è inversamente proporzionale, alla lunghezza del diametro $\parallel$ alla tangente.

Teor. di Apollonio: 1° Il parallelogrammo costruito su 2 semidiametri coniugati in un'ellisse od iperbole ha area costante ed uguale al rettangolo costruito sui semiassi. 2° In una ellisse è costante la somma dei quadrati costruiti su 2 semidiametri coniugati; in un'iperbole è costante la differenza dei detti quadrati.

Altre proprietà focali delle coniche. La tangente in un punto A di un'ellisse o di un'iperbole fa angoli uguali coi raggi che da A vanno ai fuochi (raggi focali). La tangente in un punto A di una parabola forma col raggio focale che va al punto A e con una parallela per A all'asse angoli uguali. Le rette congiungenti un fuoco d'una conica coi punti di con-

tatto di due tangenti sono ugualmente inclinate sulla retta che unisce il fuoco al punto d'intersezione delle due tangenti. Il segmento finito intercetto sopra una tangente variabile di una conica da due tangenti fisse è visto da un fuoco sotto un angolo costante che è la metà di uno degli angoli formati dai raggi proiettanti dal fuoco i punti di contatto delle due tangenti.

Le rette *principali* (v. pag. 52) rispetto ad una conica a centro segano sull'asse focale coppie di punti separati armonicamente dai fuochi, le rette principali rispetto ad una parabola segano sull'asse coppie di punti simmetrici rispetto al fuoco. Il luogo del punto simmetrico di un fuoco, rispetto ad una tangente variabile di una conica a centro è il cerchio che ha per centro l'altro fuoco e per raggio l'asse focale. Il luogo del piede della perpendicolare calata da un fuoco sopra una tangente variabile ad una conica a centro è il cerchio che ha per diametro l'asse focale. Il prodotto delle distanze dei fuochi di una conica a centro da una tangente variabile è costant. uguale al quadrato del semiasse non focale. Il luogo del piede della perpendicolare calato dal fuoco di una parabola sopra una tangente variabile è la tangente nel vertice.

Equaz. delle coniche in coordinate polari. Preso per l'ellisse o l'iperbole il fuoco per polo e l'asse per asse polare l'equaz. in coord. polari è $\varrho = p : (1 + e \cos \omega)$ ove p è l'ordinata nel fuoco, cioè $b^2 : a$, (**parametro**), e l'*eccentricità*, convenendo per l'iperbole che quando per un valore di ω il valore di ϱ è negativo, il punto corrispondente sia quello di coordinate polari $\varrho, \omega + \pi$. Per la parabola preso il fuoco per polo, e l'asse per asse polare, l'equaz. è $\varrho = p : (1 + \cos \omega)$, ove p è il *parametro* (v. § 3).

5. — Comportamento dell'equaz. di una conica per trasformazioni di coordinate. Se (2) $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ è l'equaz. cartes. di una conica, se si fa la traslazione di assi definita da $x = x' + \alpha, y = y' + \beta$, l'equaz. riferita ai nuovi assi è $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + x'f'_x(\alpha, \beta) + y'f'_y(\alpha, \beta) + f(\alpha, \beta) = 0$. Se α, β

sono le coordinate del centro, $f'_x(a, \beta) = 0$, $f'_y(a, \beta) = 0$; $f(a, \beta) = A : A_{33}$. Se gli assi sono ortogon. l'equaz. $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$, e $A_{33} \neq 0$, perde il termine in xy se si ruotano gli assi di un angolo α per cui $\operatorname{tg} 2\alpha = 2a_{12} : (a_{11} - a_{22})$; i nuovi assi coincidono cogli assi della conica. Se si passa da un sistema cartes. ortog. ad un altro pure ortog. avente o no la stessa origine, se si indicano colle lettere accentate i nuovi coefficienti, si ha $a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22}$; $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}$; se A è il discriminante di (2) e A' è il discriminante dell'equaz. trasformata, è $A = A'$.

Invarianti rispetto ad ogni trasformazione di coordinate ortogonali sono $I = a_{11} + a_{22}$, $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, A . Se si passa da un sistema di assi di angolo ϑ ad un sistema d'angolo ϑ' , si ha $\frac{A}{\sin^2 \vartheta} = \frac{A'}{\sin^2 \vartheta'}$; $\frac{A_{33}}{\sin^2 \vartheta} = \frac{A'_{33}}{\sin^2 \vartheta'}$; $\frac{I}{\sin^2 \vartheta} = \frac{I'}{\sin^2 \vartheta'}$ posto $I = a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \vartheta$, $I' = a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12} \cos \vartheta'$.

Coefficienti dell'equaz. ridotta di una conica calcolati mediante gli invarianti. Riferendoci ad assi ortogonali se la (2) è una conica a centro si può ridurre alla forma $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33} = 0$ prendendo per assi cartesiani gli assi della conica; i coefficienti $a'_{11}a'_{22}a'_{33}$ si calcolano colle formule $a'_{11} + a'_{22} = I$; $a'_{11}a'_{22} = A_{33}$; $a'_{11}a'_{22}a'_{33} = A$, essendo I, A_{33}, A gli invarianti calcolati per (2); a'_{11}, a'_{22} sono dati da $(I \pm \sqrt{I^2 - 4A_{33}}) : 2$ e $a'_{33} = A : A_{33}$. Se (2) rappresenta una parabola si riduce alla forma $a'_{22}y'^2 + 2a'_{33}x' = 0$ riferendo la parabola al suo asse e alla tangente nel vertice; si ha $a'_{22} = I$, $a'_{13} = \pm \sqrt{-A : I}$, il doppio segno dipendendo dalla scelta del verso positivo sull'asse x' .

Se $I = 0$ la (2) rappresenta un'iperbole *equilatera* (semi-assi uguali); se $A_{33} = 0$ rappresenta una parabola; se $A = 0$ una conica degenera.

6. — **Fasci di coniche.** Rappresentando con f_1 e f_2 i primi membri delle equaz. cartesiane di due coniche C_1, C_2 , l'equaz. $f_1 - k f_2 = 0$ rappresenta una conica passante pei 4 punti comuni a C_1 e C_2 . Tutte le coniche che si hanno al variare del

parametro k costituiscono un **fascio di coniche**, di cui i 4 punti comuni a C_1 e C_2 sono i **punti base**: una conica del fascio è individuata del valore $k = f_1(\bar{x}\bar{y}) : f_2(\bar{x}\bar{y})$ essendo $\bar{x}, \bar{y}$ un punto distinto dai punti base; quindi per ognuno di siffatti punti passa una ed una sola conica. Il discriminante della conica $f_1 - k f_2 = 0$ risulta di 3° grado in k ; la conica degenera pei valori di k che annullano il discriminante; in generale in un fascio vi sono tre coniche degeneri; se i punti base A, B, C, D sono reali distinti, esse sono le tre coppie di lati opposti del quadrangolo $ABCD$; il triangolo diagonale del quadrangolo è autoconiugato rispetto a tutte le coniche del fascio. Le coniche di un fascio segano su una retta coppie in involuzione.

Se i punti base del fascio sono le intersezioni della coppia di rette $R_1 = 0, R_2 = 0$, con la coppia di rette $R_3 = 0, R_4 = 0$, l'equaz. del fascio è $R_1 R_2 - k R_3 R_4 = 0$.

Schiere di coniche. Se φ_1 e φ_2 sono i primi membri delle equaz. pluckeriane di due coniche involuppo C_1, C_2 , l'equaz. $\varphi_1 - k \varphi_2 = 0$ rappresenta una conica involuppo tangente alle 4 rette comuni ai due involuppi $C_1 C_2$. Tutte le coniche involuppo che si hanno al variare del parametro k costituiscono una **schiera di coniche** di cui le 4 rette comuni a C_1 e C_2 sono le **rette basi**. Ogni retta del piano distinta dalle rette basi fa parte di un solo involuppo della schiera, che è individuato dal valore $k = \varphi_1(\bar{u}\bar{v}) : \varphi_2(\bar{u}\bar{v})$, essendo $\bar{u}\bar{v}$ le coord. pluck. della retta. In generale 3 sono gli involuppi degeneri, le 3 coppie vertici opposti del quadrilatero completo determinato dalle 4 rette. Generalmente un fascio di coniche non è una schiera.

Coniche concentriche e omotetiche sono quelle del sistema $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = k$ dove k è un parametro variabile. Il centro di omotetia è il centro comune (origine); l'involuzione dei diametri coniugati è la stessa per tutte le coniche del sistema dello stesso genere. Tutte le ellissi costituiscono un fascio i cui punti base sono i punti (contati ciascuno due volte) all'infinito

delle due rette di coefficiente angolare $\pm ib : a$; tutte le iperboli un fascio i cui punti base sono i punti impropri degli asintoti comuni. Questi due sistemi di coniche sono oltrechè *fasci* (coniche fondamentali $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0, z^2 = 0$) anche *schiere* di coniche (involuppi fondamentali $a u^2 \pm b v^2 = 0, w^2 = 0$).

Coniche omofocali sono quelle del sistema $\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1$ ove k è un parametro arbitrario. L'equazione precedente rappresenta per $k > a^2 > b^2$ ellissi immaginarie; per $k < b^2$ ellissi reali; per $b < k < a^2$ iperboli reali. Tutte le coniche del sistema hanno gli stessi fuochi ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$). Per ogni punto del piano passa sempre una ellisse ed un'iperbole reale che si tagliano ad angolo retto. Essi determinano un sistema di *coordinate ellittiche*. Formano una schiera di coniche (coniche fondamentali $a u^2 + b^2 v^2 = 1, u^2 + v^2 = 0$). Una coppia di rette principali rispetto a una conica lo è rispetto a tutte le coniche della schiera. Se da un punto si conducono le tangenti a due coniche confocali, queste tangenti formano angoli uguali tra loro.

CAPITOLO VII.

Il piano nello spazio e il punto come involuppo di piani per esso - La retta nello spazio

1. — **Varie forme dell'equaz. del piano.** Ogni equazione $ax + by + cz + d = 0$ di primo grado nelle coordinate cartesiane x, y, z di un punto rappresenta un piano. I numeri a, b, c sono proporzionali ai coseni direttori della normale al piano. Se $d = 0$, il piano passa per l'origine; se $a = b = 0$, l'equaz. rappresenta un piano $\parallel$ al piano xy alla distanza ($\parallel az$) $= d : c$;

se $a = c = 0$ rappresenta il piano $\parallel$ al piano xz alla distanza $(\parallel a y) - d : b$; se $b = c = 0$ rappresenta il piano $\parallel$ al piano yz alla distanza $(\parallel ad x) - d : a$; se $a = 0$ l'equaz. $by + cz + d = 0$ rappresenta il piano $\parallel$ all'asse x che taglia il piano yz secondo la retta $by + cz + d = 0$; le equazioni $ax + cz + d = 0$, $ax + by + d = 0$ rappresentano piani $\parallel$ rispettivamente agli assi y e z . Viceversa ogni piano proprio è rappresentabile da un'equaz. di 1° grado in x, y, z .

In coordinate cartesiane omogenee l'equaz. di un piano diviene $aX + bY + cZ + dT = 0$ ed allora è rappresentabile anche il piano improprio, il quale ha l'equaz. $T = 0$.

Due equaz. $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ rappresentano lo stesso piano se e solo se $a : a' = b : b' = c : c' = d : d'$.

Equazione segmentaria del piano: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

se p, q, r sono i segmenti tagliati sugli assi.

Equaz. parametriche del piano: $x = a_1 u + b_1 v + c_1$, $y = a_2 u + b_2 v + c_2$, $z = a_3 u + b_3 v + c_3$, ove u, v sono i parametri, $c_1 c_2 c_3$ coordinate d'un punto pel quale passa il piano; $(a_1 a_2 a_3)$, $(b_1 b_2 b_3)$ due terne di numeri definienti due direzioni parallele al piano.

Equaz. del piano di coordinate pluckeriane $u_1 v_1 w_1$ è $u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = 0$.

Equaz. normale è $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0$ ove α, β, γ sono i coseni direttori della normale al piano, δ la distanza dell'origine dal piano, supposti gli assi ortogonali. Data l'equaz. $ax + by + cz + d = 0$ si riduce a normale moltiplicando per il coefficiente di normalità $1 : \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, col segno del radicale contrario a quello di d .

Segmenti tagliati dal piano $ax + by + cz + d = 0$ sugli assi sono $-d : a$, $-d : b$, $-d : c$ sugli assi x, y, z rispettivamente.

Coordinate pluckeriane del piano $ax + by + cz + d = 0$ sono $u = a : d$, $v = b : d$, $w = c : d$; quindi le coordinate pluck. omogenee sono a, b, c, d .

2. — Problemi sul piano nello spazio. Equaz. del piano

pei tre punti $x_i y_i z_i$ ($i = 1, 2, 3$) non allineati è

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Angolo di due piani π, π' di equaz. $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ è l'angolo delle due normali ai piani per uno stesso punto; si ha $\sin \pi \pi' = \frac{\sqrt{(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)}}$

$\cos \pi \pi' = \frac{aa' + bb' + cc'}{\pm \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)}}$ dove il segno del

radicale dipende dall'arbitrarietà dei sensi positivi sulle 2 normali.

Condizione di parallelismo fra i 2 piani precedenti è $a : a' = b : b' = c : c'$.

Condizione di ortogonalità fra gli stessi piani è $aa' + bb' + cc' = 0$.

Piano per $(x_1 y_1 z_1)$ || al piano $ax + by + cz + d = 0$ ha l'equaz. $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$.

Condizione perchè 4 punti $(x_i y_i z_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) appartengano ad un piano è che sia nullo il determinante formato colle quattro linee $x_i y_i z_i 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Condizione perchè 4 piani $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) appartengano ad un punto è che il determinante formato con le quattro linee $a_i b_i c_i d_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sia nullo; il punto è proprio se non tutti i minori di 3° ordine sono nulli; se questi minori sono tutti nulli il punto è improprio. Detta condizione equivale alla possibilità di trovare 4 numeri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ non tutti nulli per cui si abbia identicamente $\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \lambda_3 \pi_3 + \lambda_4 \pi_4 = 0$ se con $\pi_i = 0$ si indicano le equaz. dei piani.

Fascio di piani. Dati i due piani distinti $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$, un terzo piano $a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$ appartiene al fascio (improprio se $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$, proprio in ogni altro caso) determinato dai primi due, se la matrice formata dalle 3 quaterne di coefficienti ha la caratteristica 2. Rappresentando con π_1, π_2 i due

primi membri delle equaz., ogni piano $\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 = 0$ appartiene al fascio dei primi due; viceversa un piano $\pi_3 = 0$ appartiene al detto fascio se ci sono 2 numeri λ_1, λ_2 per cui si abbia identicamente $\pi_3 = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$.

Condizione perchè tre piani $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$

($i = 1, 2, 3$) siano $\parallel$ ad una direzione è che $H = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

sia nullo; se anche i minori di 2° ordine sono nulli, i tre piani sono $\parallel$ fra loro.

Punto comune ai 3 piani $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) è proprio se H (vedi sopra) non è nullo e in questo caso ha le coordinate $H_1 : H, H_2 : H, H_3 : H$ essendo H_1, H_2, H_3 i 3 determinanti ottenuti da H sostituendo $-d_1, -d_2, -d_3$ alla colonna 1ª, 2ª, 3ª rispettivamente. Se $H = 0$ ma non sono nulli contemporaneamente H_1, H_2, H_3 il punto è improprio o i 3 piani sono $\parallel$ ed hanno una retta impropria in comune. Se poi $H = H_1 = H_2 = H_3 = 0$ i 3 piani appartengono ad un fascio.

Stella di piani. Dati 3 piani $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0, \pi_3 = 0$ che non formino un fascio, ogni piano della stella propria o impropria determinata da essi ha un'equaz. della forma $\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \lambda_3 \pi_3 = 0$.

Spazio di piani. Dati 4 piani $\pi_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) non appartenenti ad una stella, ogni piano dello spazio si può rappresentare con $\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \lambda_3 \pi_3 + \lambda_4 \pi_4 = 0$ prendendo opportunamente i numeri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Distanza d'un punto $x_1 y_1 z_1$ dal piano $x a + y \beta + z \gamma - p = 0$ contata dal punto al piano col segno fissato sulla normale al piano è $-(x_1 a + y_1 \beta + z_1 \gamma - p)$; se l'equazione è $ax + by + cz + d = 0$, è $-k(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)$ ove k è il coeff. di normalità: in particolare la origine O dista dal piano di $-kd$.

Due punti $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$ sono dalla stessa banda o no del piano $ax + by + cz + d = 0$ a seconda che sono dello stesso segno o no i quadrimoni $ax_1 + by_1 + cz_1 + d, ax_2 + by_2 + cz_2 + d$

che sono proporzionali alle distanze dei due punti dal piano.

3. -- **Il punto come involuppo di piani.** Ogni equaz. $au + bv + cw + d = 0$ di 1° grado in u, v, w , coord. pluckeriane di piano, rappresenta un punto. Se $d \neq 0$ il punto ha le coord. cartesiane $a : d, b : d, c : d$; se $d = 0$ il punto è improprio nella direzione (a, b, c) . Viceversa, ogni punto proprio, all'infuori dell'origine, (x_1, y_1, z_1) , ha l'equaz. $ux_1 + vy_1 + wz_1 + 1 = 0$. Il punto improprio nella direzione (a, b, c) ha l'equaz. $au + bv + cw = 0$.

In coordinate pluckeriane omogenee l'equaz. del punto è $aU + bV + cW + dR = 0$ ed allora è rappresentabile anche l'origine, la quale ha l'equaz. $R = 0$.

Due equaz. $au + bv + cw + d = 0, a'u + b'v + c'w + d' = 0$ rappresentano lo stesso punto se e solo se $a : a' = b : b' = c : c'$.

Condizione di appartenenza di un punto $x_1 y_1 z_1$ ad un piano $u_1 v_1 w_1$ è $u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1 + 1 = 0$.

Punto del piano $u_1 v_1 w_1$ allineato con l'origine ed il punto $au + bv + cw + d = 0$ ha l'equaz. $a(u - u_1) + b(v - v_1) + c(w - w_1) = 0$.

Condizione perchè 4 piani $u_i v_i w_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) appartengano ad un punto è che sia nullo il determinante del 4° ordine di cui le linee sono $u_i v_i w_i$ 1.

Equaz. del punto dei 3 piani $u_i v_i w_i$ ($i = 1, 2, 3$) non

$$\text{formanti fascio è } \begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Punteggiata. Dati 2 punti distinti $a_1 u + b_1 v + c_1 w + d_1 = 0$ $a_2 u + b_2 v + c_2 w + d_2 = 0$ un terzo punto $a_3 u + b_3 v + c_3 w + d_3 = 0$ appartiene alla retta dei 2 precedenti se la matrice formata dalle 3 quaterne di coeffic. ha la caratteristica 2. Rappresentando un P_1 e P_2 i primi membri dell'equaz. dei punti, ogni punto $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ appartiene alla punteggiata dei 2 punti $P_1 = 0, P_2 = 0$ e viceversa un punto $P_3 = 0$ appartiene

alla punteggiata solo se esistono 2 numeri λ_1, λ_2 per cui sia *identicamente* $P_3 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$.

Condizione di complanarità di 3 punti $a_i u + b_i v + c_i w + d_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) con l'origine è che $H = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

Se in H sono nulli anche i minori di 2° ordine i 3 punti sono allineati con l'origine.

Piano per 3 punti. Le equaz. essendo le preced. se $H \neq 0$ il piano ha le coordinate $u = H_1 : H$, $v = H_2 : H$, $w = H_3 : H$ ove $H_1 H_2 H_3$ si ottengono da H sostituendo alla 1ª, 2ª, 3ª, colonna rispettivamente $-d_1, -d_2, -d_3$. Se $H = 0$ senza che siano nulli tutti e tre i determ. H_1, H_2, H_3 il piano passa per l'origine. Se è anche $H_1 = H_2 = H_3 = 0$ i punti sono allineati con l'origine.

Condizione perchè 4 punti $a_i u + b_i v + c_i w + d_i = 0$ appartengano ad un piano è che il determinante formato con le 4 quaterne di coeff. $a_i b_i c_i d_i$ sia nullo. Se i minori di 3° ordine sono tutti nulli il piano passa per l'origine. La detta condiz. di appartenenza ad un piano di 4 punti $P_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) equivale alla possibilità di trovare 4 numeri $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ per cui identicam. sia $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0$.

Piano punteggiato. Dati 3 punti $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$ non allineati, ogni punto del piano dei 3 punti ha un'equaz. della forma $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$.

Spazio punteggiato. Dati 4 punti $P_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) non complanari, ogni punto dello spazio si può rappresentare con $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0$ prendendo opportunamente i numeri λ .

4. — **Varie forme delle equaz. di una retta nello spazio.** Due piani di equaz. (1) $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, se non è $a:a' = b:b' = c:c'$, determinano una retta r : le due equaz. diconsi **equaz. della retta r** . Ogni retta è rappresentabile da 2 equaz. di 1° grado in x, y, z che siano

le equaz. di due piani per la retta. In particolare, $x = x_0, y = y_0$ rappresenta una retta $\parallel$ all'asse z pel punto $(x_0, y_0, 0)$.

Equaz. in forma ridotta della retta. Risolvendo le equaz. precedenti per x e y (se la retta non è $\parallel$ al piano xy , cioè non è $ab' = a'b$) si hanno le equaz. (2) $x = lz + p, y = mz + q$ che diconsi in **forma ridotta**. Le 2 equaz. separatam. rappresentano i piani che proiettano la retta r rispettiv. sui piani xz e yz . I numeri p, q sono le coordinate del punto del piano xy pel quale passa la retta; se r_1 è la proiezz. di r su xz e r_2 su yz , l e m rappresentano i due coeff. angolari $-(zx r_1), -(zy r_2)$ quindi in assi ortogonali $l = \widehat{\text{tg } x r_1}, m = \widehat{\text{tg } y r_2}$. Se la retta è $\parallel$ al piano xy si risolve per altre due delle coordinate.

Equaz. normali di una retta. Se α, β, γ sono i coseni direttori della retta rispetto ad una terna di assi ortog., (x_0, y_0, z_0) un punto della retta, le equazioni normali sono (3) $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$. Se le equaz. d'una retta sono (4) $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ i suoi coseni direttori sono proporzionali ad l, m, n . Se la retta ha le equaz. ridotte, i coseni sono proporzionali a: $l, m, 1$; se ha le equaz. (1) i coseni direttori sono proporzionali a $bc' - b'c, ca' - c'a, ab' - a'b$.

Equaz. parametriche. Tre equaz. $x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$ rappresentano una retta; (x_0, y_0, z_0) è un punto sulla retta, abc danno la direzione della retta, t il parametro. Se a, b, c sono i veri coseni direttori della retta, t rappresenta la distanza del punto (xyz) dal punto (x_0, y_0, z_0) .

5. — **Alcuni problemi sulla retta e sul piano nello spazio.**
Angolo di due rette. Al Cap. I § 11 è dato il coseno ed il seno dell'angolo di due direzioni di noti coseni direttori. Mediante queste formole si hanno seno e coseno dell'angolo di due rette r, r' riducendo le loro equaz. a normali. Se le equaz. delle r, r' sono della forma (4), $l, m, n; l', m', n'$ i denominatori, è

$$\cos \widehat{r r'} = \frac{l l' + m m' + n n'}{+ \sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}}$$

$$\sin \widehat{r r'} = \pm \sqrt{\frac{(m n' - m' n)^2 + (n l' - n' l)^2 + (l m' - l' m)^2}{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}}; \text{ il}$$

doppio segno dipende dai sensi che si fissano su r e r' come positivi.

Se r ha le equaz. (2) e r' le equaz. $x = l' z + p'$, $y = m' z + q'$, si ottengono $\sin \widehat{r r'}$, $\cos \widehat{r r'}$ dalle formule preced. facendo $n = n' = 1$.

Condizione di parallelismo di 2 rette. Se r ha le equaz. $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$, $a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z + d'_1 = 0$ ed r' le equaz. $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$, $a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z + d'_2 = 0$, sono || se $(b_1 c'_1 - b'_1 c_1) : (b_2 c'_2 - b'_2 c_2) = (c_1 a'_1 - c'_1 a_1) : (c_2 a'_2 - c'_2 a_2) = (a_1 b'_1 - a'_1 b_1) : (a_2 b'_2 - a'_2 b_2)$. Se le equaz. di r sono le (2) e quelle di r' sono $x = l' z + p'$, $y = m' z + q'$, la condiz. di parallel. è $l = l'$, $m = m'$. Se le equaz. di r sono le (4) e quelle di r' , $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ la condiz. di parallel. è $l : l' = m : m' = n : n'$.

Condizione di perpendicolarità di due rette. Se le due rette sono date nel primo dei modi qui sopra indicati sono ortogonali se $(b_1 c'_1 - b'_1 c_1)(b_2 c'_2 - b'_2 c_2) + (c_1 a'_1 - c'_1 a_1) \times (c_2 a'_2 - c'_2 a_2) + (a_1 b'_1 - a'_1 b_1)(a_2 b'_2 - a'_2 b_2) = 0$; se sono date nel 2° modo, sono ortogonali se $l l' + m m' + 1 = 0$, se nel 3° sono ortogonali se $l l' + m m' + n n' = 0$.

Angolo ω della retta $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ col piano $ax + by + cz + d = 0$ è il complemento dell'angolo della retta con la normale al piano; si ha $\sin \omega = (al + bm + cn) : \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(l^2 + m^2 + n^2)}$.

Condizione di parallelismo e ortogonalità fra retta e piano. Se la retta ha l'equaz. (1) e il piano $Ax + By + Cz + D = 0$, sono paralleli se il determ. formato da $a b c$, $a' b' c'$, $A B C$ è nullo e sono ortogonali se in esso determinante $A B C$

sono proporzionali ai loro complementi algebrici. Se la retta ha le equaz. (2), sono paralleli se $Al + Bm + C = 0$, sono ortogonali se $A:l = B:m = C$. Se la retta ha le equaz. (3), sono paralleli se $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, sono ortogonali se $A:\alpha = B:\beta = C:\gamma$. Se la retta ha le equaz. (4), sono parall. se $Al + Bm + Cn$, sono ortog. se $A:l = B:m = C:n$.

Retta per (x_1, y_1, z_1) parallela alla direzione l, m, n ha per equaz. $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$.

Retta pei due punti $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ ha per equaz. $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Retta per (x_1, y_1, z_1) perpendicolare al piano $ax + by + cz + d = 0$ ha per equaz. $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$.

Retta per (x_1, y_1, z_1) parallela al piano $ax + by + cz + d = 0$ ha per equazione $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ con la condizione $al + bm + cn = 0$.

Piano per (x_1, y_1, z_1) normale alla retta $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ ha l'equaz. $l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0$.

Piano per due punti $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ ha l'equaz. $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = 0$ con k_1, k_2, k_3 qualunque.

Piano per la retta $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ ha l'equaz. $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l & m & n \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = 0$ con k_1, k_2, k_3 qualunque non proporzionali a l, m, n .

Piano per (x_1, y_1, z_1) **parallelo alla retta** $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ **ha l'equazione superiore.**

Piano per la retta $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ **parallelo alla direzione** (k_1, k_2, k_3) **ha l'equazione superiore.** È anche la equazione del piano per la retta e normale al piano $k_1 x + k_2 y + k_3 z + d = 0$.

Piano per la retta $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ **e pel punto** (x_2, y_2, z_2) **ha l'equaz.**
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Retta pel piano $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ **e pel punto** (x_1, y_1, z_1) , **ha le equaz.** $\frac{x - x_1}{a'} = \frac{y - y_1}{b'} = \frac{z - z_1}{c'}$ **sotto la condiz.** $aa' + bb' + cc' = 0$.

Retta nel piano $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ **pel punto** (x_1, y_1, z_1) **normale alla direzione** l, m, n **ha per equaz.**
$$\frac{x - x_1}{bn - cm} = \frac{y - y_1}{cl - an} = \frac{z - z_1}{am - bl}.$$

Condizione di complanarità di due rette r, r' : **se le equaz.** di r sono $x = lz + p, y = mz + q$, **quelle di** r' : $x = l'z + p', y = m'z + q'$ **la condizione di complanarità è** $(l' - l) : (m' - m) = (p' - p) : (q' - q)$.

Intersezione di una retta con un piano. La retta abbia le equazioni (2) ed il piano $ax + by + cz + d = 0$; le coordinate dell'intersezione della retta col piano sono $x = \{p(bm + c) - l(bq + d)\} : (al + bm + c)$; $y = \{q(al + c) - m(ap + d)\} : (al + bm + c)$; $z = -(ap + bq + d) : (al + bm + c)$.

Distanza di un punto (x_0, y_0, z_0) **dalla retta** $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma}$ **(equaz. normali) è**

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - \{a(x_1 - x_0) + \beta(y_1 - y_0) + \gamma(z_1 - z_0)\}^2}$$

Minima distanza fra 2 rette r, r' sghembe. Se le equaz. di r sono $\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}$, quelle di $r' : \frac{x-x_2}{\alpha_2} =$

$$= \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2} \text{ è } \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\widehat{\text{sen } rr'}}$$

e se le equazioni sono $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$; $\frac{x-x_2}{l_2} =$
 $= \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ la minima distanza è

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} : \sqrt{(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)} \cdot \widehat{\text{sen } rr'}.$$

Equazioni della retta in coordinate pluckeriane. Due equaz. di due punti $P_1 P_2 : au + bv + cw + d = 0, a'u + b'v + c'w + d' = 0$ sono soddisfatte simultaneamente dalle coordinate dei piani passanti per la retta $P_1 P_2$: le due equaz. scritte sono le equaz. pluckeriane della retta.

Punto che divide il segmento $P_1 P_2$ nel rapporto $\overline{P_1 P} : \overline{P P_2} = k$ ha le coordinate $x = (x_1 + k x_2) : (1 + k)$; $y = (y_1 + k y_2) : (1 + k)$; $z = (z_1 + k z_2) : (1 + k)$.

Condizione perchè tre punti $(x_1 y_1 z_1) (x_2 y_2 z_2) (x_3 y_3 z_3)$ siano allineati è che siano nulli i minori di 3° ordine della matrice le cui linee sono $x_1, y_1, z_1, 1$; $x_2, y_2, z_2, 1$; $x_3, y_3, z_3, 1$.

6. — Alcuni problemi di Geometria nella spazio. Distanza di 2 punti. In assi ortogonali, se d è la distanza di due punti $(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2)$ si ha $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$; in assi non ortogonali, $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + 2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \cos \widehat{yz} + 2(z_2 - z_1)(x_2 - x_1) \cos \widehat{zx} + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \widehat{xy}$.

Proiezione ortogonale di una figura piana. Se A è l'area di una porzione di superficie piana appartenente al piano π , la sua proiezione ortogonale sopra il piano π' ha l'area $A' =$

$= A \cos \widehat{n n'}$ se $\widehat{n n'}$ sono le normali ai due piani. Se un'area A appartiene ad un piano π , A_x , A_y , A_z rappresentano le proiezioni di A rispettiv. sui piani yz , zx , xy mutuamente ortogonali, si ha $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$.

Area del triangolo i cui vertici $P_1 P_2 P_3$ hanno le coordinate cartes. ortogonali $x_i y_i z_i$ ($i = 1, 2, 3$) è data da

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

in coordinate non ortogonali si ha

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & 1 & \cos \widehat{x y} & \cos \widehat{x z} \\ S_2 & \cos \widehat{y x} & 1 & \cos \widehat{y z} \\ S_3 & \cos \widehat{z x} & \cos \widehat{z y} & 1 \end{vmatrix}} \quad \text{ove } S_1 S_2 S_3 \text{ sono la metà dei determinanti che compaiono nella formula superiore.}$$

Volume del tetraedro i cui vertici $P_1 P_2 P_3 P_4$ hanno le

$$\text{coordinate } x_i y_i z_i \text{ (} i = 1, 2, 3, 4 \text{)} \text{ è } \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \text{ sen } xyz$$

intendendo con $\text{sen } xyz$ il seno del triedro degli assi (Cap. I § 11) che è 1 per assi ortogonali.

Angolo di due rette r, s orientate in assi non ortogonali

$$\text{ha } \cos \widehat{r s} = - \frac{1}{\text{sen}^2 xyz} \begin{vmatrix} 0 & \cos \widehat{x s} & \cos \widehat{y s} & \cos \widehat{z s} \\ \cos \widehat{x r} & 1 & \cos \widehat{x y} & \cos \widehat{x z} \\ \cos \widehat{y r} & \cos \widehat{y x} & 1 & \cos \widehat{y z} \\ \cos \widehat{z r} & \cos \widehat{z x} & \cos \widehat{z y} & 1 \end{vmatrix}$$

ove $\text{sen } xyz$ è il seno del triedro degli assi (Cap. I § 11).

Angoli Euleriani. Siano dati due triedri trirettangoli colla stessa origine $O x y z$, $O x_1 y_1 z_1$ e destrorsi. Si dice **linea nodale** l'intersezione dei piani $x y$ e $x_1 y_1$ sulla quale si fissi come positivo il senso secondo cui è disposto un osservatore coi piedi in O perchè guardando Oz abbia Oz_1 alla sinistra; l'an-

golo ψ che questa forma con l'asse x dicesi **longitudine** della linea nodale o *precessione*; l'angolo φ che la linea nodale forma con x_1 dicesi **azimut**; l'angolo $z z_1$ si dice **inclinazione** (o *nutatione*); si indichi con ϑ .

Se i coseni direttori degli assi $x_1 y_1 z_1$ rispetto al triedro $Oxyz$ sono quelli dati al Cap. I § 11, pag. 14, si hanno le relazioni: $\alpha_1 = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta$, $\beta_1 = -(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta)$, $\gamma_1 = \sin \psi \sin \vartheta$, $\alpha_2 = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta$, $\beta_2 = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta$, $\gamma_2 = -\cos \psi \sin \vartheta$, $\alpha_3 = \sin \varphi \sin \vartheta$, $\beta_3 = \cos \varphi \sin \vartheta$, $\gamma_3 = \cos \vartheta$.

CAPITOLO VIII.

Alcune superficie e curve storte speciali

1. — **Sfera** di centro l'origine e raggio r ha l'equaz. in assi cartesiani ortogonali $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; se il centro è nel punto (a, b, c) l'equaz. è $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$. In coordinate polari se la sfera ha il centro nel polo: $\varrho = r$. Una equaz. di 2° grado nelle coordin. cartes. ortogonali x, y, z rappresenta una sfera se manca dei termini in xy, xz, yz e i coefficienti dei tre termini in x^2, y^2, z^2 sono uguali. L'equaz. $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ rappresenta una sfera che ha il centro nel punto di coordinate $a = -A:2$, $b = -B:2$, $c = -C:2$ ed il raggio $(\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}):2$.

Equaz. parametriche della sfera di centro (a, b, c) e raggio r sono $x = a + r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = b + r \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = c + r \cos \vartheta$ ove φ e ϑ sono parametri variabili in $0 \leq \varphi < 2\pi$ il 1° e in $0 \leq \vartheta < \pi$ il 2° (v. coordin. polari, Cap. I § 13).

Piano tangente alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ in $(x_1 y_1 z_1)$ è $xx_1 + yy_1 + zz_1 = r^2$.

Intersezioni della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ **colla retta**
 $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$ hanno le coordinate $x_1 = x_0 + \alpha t_1$,

$y_1 = y_0 + \beta t_1$, $z_1 = z_0 + \gamma t_1$ e $x_2 = x_0 + \alpha t_2$, $y_2 = y_0 + \beta t_2$,
 $z_2 = z_0 + \gamma t_2$ ove t_1 e t_2 sono le due radici dell'equaz. $t^2 + 2(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)t + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0$. La retta è tangente alla sfera se $(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$.

Equaz. pluckeriana della sfera involuppo è $u^2 + v^2 + w^2 = 1:r^2$.

Intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ **col piano**
 $\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$ (equaz. normale) è il cerchio posto in questo piano di raggio $\sqrt{r^2 - p^2}$ e il centro nel punto $(\alpha p, \beta p, \gamma p)$. Il piano è secante, tangente od esterno a seconda che $p < r$, $p = r$, $p > r$.

Intersez. della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ **con la sfera** $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r_1^2$ è il cerchio comune ad una delle sfere e al piano $2(\alpha x + \beta y + \gamma z) = r^2 - r_1^2 + a^2 + b^2 + c^2$.

Potenza del punto $A(x_1, y_1, z_1)$ **rispetto alla sfera** $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ è $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 - r^2$ la quale è negativa, nulla o positiva a seconda che A è interno, sopra o esterno alla sfera (Cfr. Cap. V § 1, pag. 40).

Fascio di sfere. Rappresentando con $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ le equaz. di due sfere, l'equaz. $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$ rappresenta al variare di λ_1 e λ_2 tutte le sfere passanti pel cerchio (reale o no) (*base* del fascio) comune alle due sfere; esse diconsi costituire un fascio di sfere. Per ogni punto x_1, y_1, z_1 passa una ed una sola sfera del fascio determinato da $\lambda_1 : \lambda_2 = - \{ S_2(x_1, y_1, z_1) : S_1(x_1, y_1, z_1) \}$. Il piano $S_1 - S_2 = 0$ (che contiene il cerchio base) dicesi **piano radicale**; è il luogo dei punti di ugual potenza rispetto ad ogni sfera del fascio; ed anche il luogo dei centri delle sfere ortogonali alle sfere del fascio.

Asse centrale è la retta perpendicolare pel centro del cerchio base al piano radicale; è il luogo dei centri delle sfere del fascio.

Rete di sfere. Se $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ sono le equaz. di 3 sfere non appartenenti ad un fascio, l'equaz. $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 +$

$+ \lambda_3 S_3 = 0$ per valori non tutti nulli nè infiniti dei parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ rappresenta al variare di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ le ∞^2 sfere che passano pei due punti (*punti base*) comuni alle tre sfere $S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0$: esse costituiscono una *rete di sfere*. Per due punti dello spazio $(x_1 y_1 z_1) (x_2 y_2 z_2)$ passa una ed una sola sfera della rete individuata dai numeri $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 =$

$$= \begin{vmatrix} S_2(x_1 y_1 z_1) & S_3(x_1 y_1 z_1) \\ S_2(x_2 y_2 z_2) & S_3(x_2 y_2 z_2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} S_3(x_1 y_1 z_1) & S_1(x_1 y_1 z_1) \\ S_3(x_2 y_2 z_2) & S_1(x_2 y_2 z_2) \end{vmatrix} \\ : \begin{vmatrix} S_1(x_1 y_1 z_1) & S_2(x_1 y_1 z_1) \\ S_1(x_2 y_2 z_2) & S_2(x_2 y_2 z_2) \end{vmatrix}$$

Asse radicale è la retta che congiunge i due punti base; per essa passano i piani radicali di tutti i fasci appartenenti alla rete ed è il luogo dei punti di egual potenza rispetto alle sfere della rete; è il luogo dei centri delle sfere ortogonali a tutte le sfere della rete. Queste sfere costituiscono un fascio il cui cerchio base sta nel **piano centrale**, luogo dei centri delle sfere della rete.

Sistema lineare ∞^3 di sfere. Se $S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, S_4 = 0$ sono 4 sfere non appartenenti ad una rete, l'equaz. $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0$, per $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ finiti e non tutti nulli, rappresenta al variare di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ una tripla infinità di sfere. Al sistema appartengono ogni rete ed ogni fascio individuato da tre o due sfere del sistema. V'ha una ed una sola sfera, in generale, che passa per 3 punti dati o che ha il centro in un punto dato.

Centro radicale è il punto per cui passano i piani radicali e gli assi radicali dei fasci e delle reti contenute nel sistema: è il centro della sfera ortogonale a tutte le sfere del sistema.

2. — **Toro** è la superficie di rotazione generale dalla rotazione di un cerchio intorno ad una retta del suo piano che non lo taglia. Se il cerchio ha il raggio r e il suo centro dista dall'asse di rotazione di a e z è l'asse di rotazione, l'equaz. è $4a^2(x^2 + y^2) = (r^2 - z^2 - x^2 - y^2 - a^2)^2$. La sezione con il piano $y = r$ è una *cassinoide* (Cap. V § 3).

In coordinate polari l'equaz. del toro è $\varrho^2 - 2a\varrho \sin \vartheta + a^2 - r^2 = 0$.

Catenoide è la superficie generata dalla rotazione di una catenaria (Cap. V § 4) intorno alla sua direttrice. Se questa è l'asse z , l'equaz. è $x^2 + y^2 = a^2 (e^{\frac{2z}{a}} + e^{-\frac{2z}{a}} + 2) : 4$.

Elicoide sviluppabile è il luogo delle tangenti all'elica circolare (Vedi § 3).

Elicoide a piano direttore è il luogo delle rette che passando per un punto dell'elica circolare sono normali all'asse del cilindro (*normali principali*): la sua equaz. è $y - x \operatorname{tg}(z:r \operatorname{tg} \varphi) = 0$.

Pseudosfera è la superficie generata dalla rotazione della trattrice intorno all'asintoto. Se questo è l'asse z , l'equaz. della pseudosfera è $z = \sqrt{k^2 - x^2 - y^2} - k \log [(k + \sqrt{k^2 - x^2 - y^2}) : \sqrt{x^2 + y^2}]$.

Asteroide solido è la superficie di equaz. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$. I piani tangenti incontrano gli assi nei vertici di un triangolo il cui baricentro dista di r dall'origine. L'equaz. in coordin. pluckeriane è $u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = r^2u^2v^2w^2$.

3. — **Alcune linee storte. Elica circolare.** Se sopra un cilindro circolare di raggio r si avvolge un angolo φ in guisa che un lato si disponga su un cerchio, l'altro lato si dispone secondo un'elica circolare; φ è detta l'*inclinazione*; il segmento di generatrice compresa fra due passaggi consecutivi della elica dicesi *passo* dell'elica ed è $2\pi r \operatorname{tg} \varphi$. Le equaz. parametriche sono $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = r t \operatorname{tg} \varphi$, ove t , parametro, misura l'angolo che un piano per l'asse z e per un punto dell'elica fa col piano $z x$.

Elica conica. L'intersezione del cono $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \gamma$ coll'elicoide a piano direttore $y - x \operatorname{tg}(z:c) = 0$ (§ 2) è l'elica conica: le sue equaz. parametriche sono $x = ct \operatorname{tg} \gamma \cos t$, $y = ct \operatorname{tg} \gamma \sin t$, $z = ct$ ove il parametro è t .

Loxodromica è l'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ col cilindro $\sqrt{x^2 + y^2} \left(e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} - e^{-\operatorname{arctg} \frac{x}{y}} \right) = 2a$.

Curva del Viviani è l'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ col cilindro $x^2 - rx + y^2 = 0$ (che ha il raggio $r:2$, e una generatrice coincidente con un diametro della sfera). Le equaz. parametriche sono $x = r \cos^2 t$, $y = r \cos t \sin t$, $z = r \sin t$.

4. — Superficie cilindriche. Al Cap. III § 3 si è detto come un'equaz. fra due sole coordinate rappresenti una superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse omonimo alla coordinata che non figura nell'equaz. Più in generale un'equaz. $F(L, M) = 0$ ove $L = 0$, $M = 0$ rappresentano due piani è una superficie cilindrica con le generatrici parallele alla retta $L = 0$, $M = 0$.

Se il cilindro deve contenere la curva $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ e le generatrici hanno la direzione (a, b, c) , l'equaz. del cilindro si ottiene eliminando t fra $\varphi(x + at, y + bt, z + ct) = 0$, $\psi(x + at, y + bt, z + ct) = 0$.

Superficie coniche. Al Cap. III § 3 si è detto che l'equaz. $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ rappresenta un cono di vertice l'origine.

Più in generale $F\left(\frac{L}{N}, \frac{M}{N}\right) = 0$ ove $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$

rappresentano tre piani per un punto $V(x_0, y_0, z_0)$ rappresenta una superficie conica di vertice V . Se il cono deve contenere la curva $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ si trova la sua equazione

eliminando λ fra $\varphi\left(\frac{x + \lambda x_0}{1 + \lambda}, \frac{y + \lambda y_0}{1 + \lambda}, \frac{z + \lambda z_0}{1 + \lambda}\right) = 0$, e

$\psi\left(\frac{x + \lambda x_0}{1 + \lambda}, \frac{y + \lambda y_0}{1 + \lambda}, \frac{z + \lambda z_0}{1 + \lambda}\right) = 0$.

Le Quadriche

1. — Equaz. delle superficie di 2° ordine (quadriche) in coord. cartesiane

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \\ & + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ & + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + \\ & + a_{44} = 0; \text{ in coord. omogenee:} \\ (2) \quad & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \\ & + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ & + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + \\ & + 2a_{34}zt = 0. \end{aligned}$$

Il primo membro di (1) rappresenteremo con $f(x, y, z)$, il 1° membro di (2) con $F(x, y, z, t)$. Il determinante simmetrico

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

dicesi **discriminante** della quadrica: rappresenteremo con A_{rs} il complemento algeb. di a_{rs} . Con $F'_x(x, y, z, t)$, F'_y , F'_z , F'_t rap-

1'. — Equaz. degli involuppi di 2ª classe (quadriche) in coordinate pluckeriane

$$\begin{aligned} (1) \quad & b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + \\ & + 2b_{12}uv + 2b_{13}uw + 2b_{23}vw + \\ & + 2b_{14}u + 2b_{24}v + 2b_{34}w + \\ & + b_{44} = 0; \text{ in coord. omogenee:} \\ (2') \quad & b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + \\ & + b_{44}r^2 + 2b_{12}uv + 2b_{13}uw + \\ & + 2b_{14}ur + 2b_{23}vw + 2b_{24}vr + \\ & + 2b_{34}wr = 0. \end{aligned}$$

Il primo membro di (1') rappresenteremo con $f(u, v, w)$, il 1° membro di (2') con $F(u, v, w, r)$. Il determinante simmetrico

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

dicesi **discriminante** della quadrica involuppo; rappresenteremo con B_{rs} il complemento algeb. di b_{rs} . Con $F'_u(u, v, w, r)$,

presentheremo le derivate parziali di $F(x, y, z, t)$ rapporto ad x, y, z, t , cioè rispettiv. i 4 quadrimoni $2(a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4}t)$ per $i = 1, 2, 3, 4$; con $f'_x(x, y, z)$, f'_y, f'_z le derivate parziali di $f(x, y, z)$, od anche F'_x, F'_y, F'_z , per $t = 1$.

Sussistono le relazioni $x F'_x + y F'_y + z F'_z + t F'_t = 2F$ (caso particolare del Teor. di Eulero; Cap. XXXVII § 8) $x_2 F'_x(x_1 y_1 z_1 t_1) + y_2 F'_y(x_1 \dots) + z_2 F'_z(x_1 \dots) + t_2 F'_t(x_1 \dots) = x_1 F'_x(x_2 y_2 z_2 t_2) + y_1 F'_y(x_2 \dots) + z_1 F'_z(x_2 \dots) + t_1 F'_t(x_2 \dots)$.

2. — **Quadriche degeneri** sono quelle per cui $A = 0$: se la caratteristica di A è 3, la quadrica è un **cono** col centro in un punto di coord. omogenee soddisfacenti alle 4 equaz. $F'_x = 0, F'_y = 0, F'_z = 0, F'_t = 0$ cioè proporz. ai compl. algebrici degli elementi di una stessa linea di A ; od un cilindro se $A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = 0$ il vertice diventando improprio e definendo così la direzione delle generatrici; se la caratteristica è 2, la quadrica degenera in una **coppia di piani** (*) per la retta determinata dalla

F'_u, F'_v, F'_w, F'_r rappresenteremo le derivate parziali di $F(u, v, w, r)$ rapporto ad u, v, w, r , cioè rispettivamente i 4 quadrimoni $2(b_{i1}u + b_{i2}v + b_{i3}w + b_{i4}r)$ per $i = 1, 2, 3, 4$; con $f'_u(u, v, w)$, f'_v, f'_w le derivate parziali di $f(u, v, w)$, od anche F'_u, F'_v, F'_w per $r = 1$.

Sussistono le relazioni $u F'_u + v F'_v + w F'_w + r F'_r = 2F$; $u_2 F'_u(u_1 v_1 w_1 r_1) + v_2 F'_v(u_1 \dots) + w_2 F'_w(u_1 \dots) + r_2 F'_r(u_1 \dots) = u_1 F'_u(u_2 v_2 w_2 r_2) + v_1 F'_v(u_2 \dots) + w_1 F'_w(u_2 \dots) + r_1 F'_r(u_2 \dots)$.

2'. — **Involuppi degeneri** sono quelli per cui $B = 0$; se la caratteristica di B è 3, l'involuppo si compone di infiniti fasci di piani i cui sostegni sono tangenti ad una conica (**quadrica limite**) che sta nel piano le cui coordinate omogenee soddisfano le 4 equaz. $F'_u = 0, F'_v = 0, F'_w = 0, F'_r = 0$; se la caratteristica è 2 la quadrica involuppo degenera in due stelle in cui i centri hanno per equaz. le 2 equaz. indipendenti fra le 4 precedenti (**coppie di punti**): se la caratteristica è 1 le due stelle hanno uno stesso centro (**punto doppio**) rappresentato

(*) Alcuni intendono per quadriche degeneri solo le coppie dei piani.

coppia di equaz. indipendenti fra le 4 precedenti: se la caratteristica è 1, la quadrica si riduce ad un **piano doppio** rappresentato da quella delle 4 equaz. di cui le rimanenti 3 sono conseguenze. Se la (1) è omogenea in $x y z$ (cioè $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$) la quadrica è un cono col centro nell'origine.

3. — Quadrica per 9 punti.

Per 9 punti $(x_i y_i z_i)$ passa sempre una quadrica e generalm. una sola. Se i 9 punti sono sopra l'intersez. di due quadriche $f(x, y, z) = 0, \varphi(x, y, z) = 0$, per essi passano tutte le quadriche del fascio (vedi § 13) da quelle determinate. Se la quadrica per 9 punti è determinata, la sua equaz. si ottiene uguagliando a zero il determinante del 10° ordine di cui la prima linea è $x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz, x, y, z, 1$ e le altre 9 sono formate similmente dalle coordinate $x_i y_i z_i$ dei 9 punti.

Intersezione di una quadrica con una retta. Se la retta congiunge i due punti $(x_1 x_1 z_1 t_1)$ $(x_2 y_2 z_2 t_2)$ le intersezioni della

da quella fra le 4 equaz. precedenti di cui le rimanenti 3 sono conseguenza. Se la (1) è omogenea in u, v, w (cioè se $b_{14} = b_{24} = b_{34} = b_{44} = 0$) l'inviluppo rappresenta una quadrica limite sul piano improprio ($u = v = w = 0$).

3'. — **Quadrica inviluppo tangente a 9 piani.** Tangente a 9 piani $u_i v_i w_i$ c'è sempre una quadrica e generalm. una sola. Se i 9 piani appartengono all'inviluppo semplicemente infinito di piani comuni a due quadriche inviluppi $f(u, v, w) = 0, \varphi(u, v, w) = 0$ ad essi sono tangenti tutte le quadriche della schiera (vedi § 14) da quelle determinata. Se la quadrica tangente ai 9 piani è determinata, la sua equaz. plucker. si ottiene eguagliando a 0 il determinante del 10° ordine di cui la prima linea è $u^2, v^2, w^2, uv, uw, vw, u, v, w, 1$ e le altre 9 sono formate similmente dalle coordin. $(u_i v_i w_i)$ dei 9 piani.

Piani comuni ad una quadrica inviluppo e ad un fascio di piani. Se il fascio è individuato dai piani $(u_1 v_1 w_1 r_1)$

retta con la quadrica (2) hanno le coordinate $x_1 + k x_2, y_1 + k y_2, z_1 + k z_2, t_1 + k t_2$ (in coordin. cartes. ordinarie $(x_1 + k x_2) : (1 + k), (y_1 + k y_2) : (1 + k), (z_1 + k z_2) : (1 + k)$) ove per k si prendano le radici dell'equazione (3) $k^2 F(x_2, y_2, z_2, t_2) + k[x_2 F'_x(x_1, y_1, z_1, t_1) + y_2 F'_y(x_1, \dots) + z_2 F'_z(x_1, \dots) + t_2 F'_t(x_1, \dots)] + F(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0$. Se le radici k_1, k_2 sono reali distinte, la retta è *secante* in due punti reali distinti; se $k_1 = k_2$ le intersezioni coincidono e la retta è *tangente*; se k_1, k_2 sono complesse coniugate, le intersezioni sono immaginarie e la retta è *esterna*.

Se l'equaz. in k è un'identità la retta appartiene alla quadrica: ciò avviene se oltre ad essere i due punti sulla quadrica, è nullo il coefficiente di k (v. Polarità, Cap. XI § 3). Il piano tangente in P taglia la quadrica secondo una conica degenerare in 2 rette per P : a seconda che le rette sono reali distinte, reali coincidenti, o immaginarie, P dicesi punto *iperbolico*, *parabolico* od *ellittico*.

(u_2, v_2, w_2, r_2) , i piani comuni al fascio e alla quadrica (2') sono di coordin. $u_1 + k u_2, v_1 + k v_2, w_1 + k w_2, r_1 + k r_2$ (in coord. plucker. ordinarie $(u_1 + k u_2) : (1 + k), (v_1 + k v_2) : (1 + k), (w_1 + k w_2) : (1 + k)$) ove per k si prendano le radici dell'equaz. (3') $k^2 F(u_2, v_2, w_2, r_2) + k[u_2 F'_u(u_1, v_1, w_1, r_1) + v_2 F'_v(u_1, \dots) + w_2 F'_w(u_1, \dots) + r_2 F'_r(u_1, \dots)] + F(u_1, v_1, w_1, r_1) = 0$. Se le radici k_1, k_2 sono reali distinte vi sono 2 piani reali distinti comuni (la retta sostegno del fascio è *esterna* alla quadrica); se $k_1 = k_2$ i piani coincidono (la retta è *tangente* alla quadrica); se k_1, k_2 sono complesse coniugate i piani sono immaginari (la retta è *secante*). Se l'equaz. in k è un'identità tutti i piani del fascio appartengono all'involuppo (la retta sta sulla quadrica). Ciò avviene quando oltre ad appartenere i 2 piani all'involuppo è nullo il coefficiente di k (vedi Polarità, Cap. XI § 3). Il punto di contatto di un piano π dell'involuppo è il punto comune a, rette di π sostegno di due fasci di piani dell'involuppo. Il punto è *iperbolico*, *parabolico* od *ellittico* a seconda che le due rette sono reali distinte, coincidenti od immaginarie.

Intersezione di una quadrica con un piano π è una conica (reale od immaginaria); a meno che la quadrica non degeneri nel piano π e in un altro che può anche essere sovrapposto a π .

Piano tangente in un punto (x_1, y_1, z_1, t_1) è il luogo delle tangenti in (x_1, y_1, z_1, t_1) alla quadrica; ha la equazione $x F'_x(x_1, y_1, z_1, t_1) + y F'_y(x_1, \dots) + z F'_z(x_1, \dots) + t F'_t(x_1, \dots) = 0$; in coord. cartes. il piano tangente alla (1) in (x_1, y_1, z_1) ha l'equaz. $(x - x_1) f'_x(x_1, y_1, z_1) + (y - y_1) f'_y(x_1, \dots) + (z - z_1) f'_z(x_1, \dots) = 0$ od anche $a_{11}xx_1 + a_{22}yy_1 + a_{33}zz_1 + a_{12}(xy_1 + x_1y) + a_{13}(xz_1 + x_1z) + a_{23}(yz_1 + y_1z) + a_{14}(x + x_1) + a_{24}(y + y_1) + a_{34}(z + z_1) + a_{44} = 0$. In ogni punto di una quadrica si ha un piano tangente unico, a meno che non sia il vertice di un cono.

Piani tangenti per un punto $P(x_1, y_1, z_1, t_1)$ non posto sulla quadrica involuppano un cono di vertice P e di equazione $F(x, y, z, t) \cdot F(x_1, y_1, z_1, t_1) - \{x_1 F'_x + y_1 F'_y + z_1 F'_z + t_1 F'_t\}^2 = 0$.

Punti coniugati rispetto una quadrica sono 2 punti P, P' che separano armonicamente

Inviluppo dei piani che appartengono alla quadrica involuppo e ad un punto P è un cono (reale od immaginario) di vertice P a meno che la quadrica non degeneri in una coppia di punti di cui uno è P e l'altro distinto o coincidente con P .

Punto di contatto del piano (u_1, v_1, w_1, r_1) è il centro del fascio delle tangenti alla quadrica giacenti in (u_1, v_1, w_1, r_1) ha l'equaz. $u F'_u(u_1, v_1, w_1, r_1) + v F'_v(u_1, \dots) + w F'_w(u_1, \dots) + r F'_r(u_1, \dots) = 0$; in coord. pluck. ordinarie il punto di contatto del piano (u_1, v_1, w_1) ha l'equazione $(u - u_1) f'_u(u_1, v_1, w_1) + (v - v_1) f'_v(u_1, \dots) + (w - w_1) f'_w(u_1, \dots) = 0$ od anche $b_{11}uu_1 + b_{22}vv_1 + b_{33}ww_1 + b_{12}(uv_1 + u_1v) + b_{13}(uw_1 + u_1w) + b_{23}(vw_1 + v_1w) + b_{14}(u + u_1) + b_{24}(v + v_1) + b_{34}(w + w_1) + b_{44} = 0$.

Punti di contatto su un piano $\pi(u_1, v_1, w_1, r_1)$ non appartenente all'inviluppo costituiscono una conica (quadrica limite) di equazione $F(u, v, w, r) \cdot F(u_1, v_1, w_1, r_1) - \{u_1 F'_u + v_1 F'_v + w_1 F'_w + r_1 F'_r\}^2 = 0$.

Piani coniugati rispetto ad una quadrica sono due piani π, π' che separano armoni-

le intersezioni S_1, S_2 , della retta PP' colla quadrica. Ciò avviene quando fra le radici dell'equaz. (3) passa la relazione $k_1 = -k_2$, ossia quando $x_2 F_x'(x_1 y_1 z_1 t_1) + y_2 F_y'(x_1 \dots) + z_2 F_z'(x_1 \dots) + t_2 F_t'(x_1 \dots) = 0$; questa è la *condizione di coniugio* dei 2 punti $(x_1 y_1 z_1 t_1)$, $(x_2 y_2 z_2 t_2)$. Sopra una retta le coppie di punti coniugati si corrispondano in un'involuzione di cui S_1, S_2 sono i punti doppi.

Piano polare di un punto $(x_1 y_1 z_1 t_1)$ è il luogo dei punti a lui coniugati; la sua equaz. è $x_1 F_x' + y_1 F_y' + z_1 F_z' + t_1 F_t' = 0$; il punto dicesi **polo**. Se il polo appartiene alla quadrica il piano polare è il piano tangente. Le coord. pluck. omogenee del piano polare sono $q u_1 = \frac{1}{2} F_x'(x_1 y_1 z_1 t_1)$; $q v_1 = \frac{1}{2} F_y'(x_1 \dots)$; $q w_1 = \frac{1}{2} F_z'(x_1 \dots)$; $q r_1 = \frac{1}{2} F_t'(x_1 \dots)$.

Autoconiugato è il piano che appartiene al proprio polo.

Rette coniugate. I punti di una retta r hanno per piani polari i piani di un fascio di sostegno r' ; r ed r' si dicono *rette coniugate* rispetto alla quadrica.

camente la coppia di piani σ_1, σ_2 appartenenti all'involuppo e alla retta (π, π') . Ciò avviene quando fra le radici della equaz. (3') passa la relazione $k_1 = -k_2$ ossia quando $u_2 F_u'(u_1 v_1 w_1 r_1) + v_2 F_v'(u_1 \dots) + w_2 F_w'(u_1 \dots) + r_2 F_r'(u_1 \dots) = 0$; questa è la *condizione di coniugio* dei due piani $(u_1 v_1 w_1 r_1)$, $(u_2 v_2 w_2 r_2)$. In un fascio le coppie di piani coniugati si corrispondono in un'involuzione di cui σ_1, σ_2 sono i piani doppi.

Polo di un piano $(u_1 v_1 w_1 r_1)$ è il punto involuppo dei piani coniugati a $(u_1 v_1 w_1 r_1)$; la sua equaz. è $u_1 F_u' + v_1 F_v' + w_1 F_w' + r_1 F_r' = 0$; il piano dicesi **piano polare**. Se il piano appartiene alla quadrica involuppo, il polo è il punto di contatto. Le coord. cartes. omogenee del polo sono $\sigma x_1 = \frac{1}{2} F_u'(u_1 v_1 w_1 r_1)$; $\sigma y_1 = \frac{1}{2} F_v'(u_1 \dots)$; $\sigma z_1 = \frac{1}{2} F_w'(u_1 \dots)$; $\sigma t_1 = \frac{1}{2} F_r'(u_1 \dots)$. **Autoconiugato** è il punto che appartiene al proprio piano polare.

Rette coniugate. I piani di un fascio di sostegno r hanno per poli i punti di una retta r' ; r ed r' si dicono *rette coniugate* rispetto alla quadrica.

4. — **Polarità definita da una quadrica luogo.** La corrispondenza fra punti e piani definita dalle ultime equaz. costituisce una polarità nello spazio (vedi Cap. XI § 3) se la quadrica non è degenera, che dicesi subordinata dalla quadrica. *Punti, piani e rette coniugati* nella polarità lo sono rispetto alla quadrica. Due rette r, r' coniugate si dicono l'una *polare* dell'altra. I piani *autoconiugati* sono i piani tangenti.

Equazione tangenziale della quadrica (2) si ha determinando l'involuppo dei piani autoconiugati (Cap. XI § 3), cioè $A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + A_{44}r^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{14}ur + 2A_{23}vw + 2A_{24}vr + 2A_{34}wr = 0$ od anche

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & r \\ u & v & w & r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Le equaz. in coord. pluck. ordinarie si hanno facendo $r=1$ nelle precedenti. Perchè la (2) sia l'equaz. tangenziale della (2) bisogna dunque che b_{rs} sia uguale o proporz. ad A_{rs} . Se gli a_{rs}

4'. — **Polarità definita da una quadrica involuppo.** La corrispondenza fra piani e punti definita dalle ultime equaz. costituisce una polarità nello spazio (v. Cap. XI § 3) se l'involuppo non è degenera, che dicesi subordinata dalla quadrica. *Piani, punti e rette coniugate* nella polarità lo sono rispetto alla quadrica. Due rette r, r' coniugate si dicono l'una *polare* dell'altra. I punti *autoconiugati* sono i punti di contatto dei piani dell'involuppo.

Equazione in coordinate di punto della quadrica involuppo (2') si ha determinando il luogo dei punti autoconiugati (Cap. XI § 3), cioè $B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + B_{33}z^2 + B_{44}t^2 + 2B_{12}xy + 2B_{13}xz + 2B_{14}xt + 2B_{23}yz + 2B_{24}yt + 2B_{34}zt = 0$ od anche

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & x \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & y \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & z \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & t \\ x & y & z & t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Le equaz. in coord. cart. ordinarie si hanno facendo $t=1$ nelle precedenti. Poichè la (2) sia l'equaz. in coordinate di punti delle (2') bisogna che a_{rs} sia uguale o propor-

fossero uguali ai B_{rs} (con ciò l'equaz. (2)) sarebbe l'equaz. in coord. di punti della quadrica (2') l'equaz. superiore $A_{11}u^2 + \dots = 0$ è la (2') salvo il fattore B .

zionale a B_{rs} . Se i b_{rs} fossero uguali agli A_{rs} (con ciò l'equaz. (2') sarebbe l'equaz. tangenziale della quadrica (2)) l'equaz. superiore $B_{11}x^2 + \dots = 0$ è la (2) salvo il fattore A .

Polarità rispetto ad un cono. Rispetto ad un cono $F(xyz) = 0$ di vertice $V(x_0, y_0, z_0, t_0)$ ogni punto $P'(x_1, y_1, z_1, t_1)$ distinto da V ha un piano polare definito come al § 3 e perciò di equaz. $x_1 F'_x + y_1 F'_y + z_1 F'_z + t_1 F'_t = 0$. Questo piano passa sempre per V perchè l'equaz. è soddisfatta dalle coordinate di V , e contiene le infinite rette coniugate di VP' , rispetto alla coppia di rette secondo cui il cono è segato dai piani passanti per VP' . Mentre P' descrive una retta p' uscente da V , il piano polare π' non varia; il piano polare del vertice V , è indeterminato perchè l'equaz. precedente si riduce all'identità $0 = 0$ se si fa $x_1 = x_0, y_1 = y_0, z_1 = z_0, t_1 = t_0$. Un piano non passante per V ha per polo V ; un piano π' , per V ha infiniti poli che stanno su una retta p' per V . La polarità definisce una corrispondenza fra le rette p' ed i piani π' della stella V .

Ogni piano pel vertice taglia il cono secondo due rette, reali o immaginarie; il piano tangente in un punto del cono è tangente lungo tutta la generatrice che passa pel punto, nella quale generatrice coincidono le due intersezioni del piano tangente del cono.

Figure autoconiugate (o autopolari) rispetto ad una quadrica: un triangolo dicesi autoconiugato quando il piano polare di ciascun vertice passa per il lato opposto; un triedro dicesi autoconiugato quando il polo di ciascuna faccia sta sullo spigolo opposto. Un tetraedro dicesi autoconiugato, quando ciascun vertice ha per piano polare la faccia opposta; 3 vertici o 3 faccie di un tetraedro autoconiugato formano un triangolo o un triedro autoconiugato. Un triedro autoconiugato rispetto ad un cono è la proiezione dal vertice di un triangolo auto-

niugato rispetto ad una conica sezione del cono con un piano non passante pel vertice.

5. — **Piani tangenti ad una quadrica per una retta r** sono i 2 determinati da r e dalle intersezioni della sua polare r' con la quadrica; se la r sta sulla quadrica ogni piano per r è tangente (vedi § 1').

Tangenti coniugate ad una quadrica in un punto. Una retta r tangente ad una quadrica in un punto P ha per polare una retta r' pure tangente nello stesso punto; se r descrive il fascio di centro P , r' descrive un fascio sovrapposto; r e r' si corrispondono in una involuzione (Cap. II § 4) che dicesi **involuzione delle tangenti coniugate**. Le *rette doppie* dell'involuzione appartengono alla quadrica.

Punto ellittico, parabolico, iperbolico (§ 3) è il punto P a seconda che l'involuzione delle tangenti coniugate di centro P è ellittica, parabolica o iperbolica; cioè a seconda che le 2 rette della quadrica per P sono immaginarie, reali coincidenti, reali distinte. **Ombelico** dicesi P se l'involuzione delle tangenti coniugate è circolare (Cap. II § 5).

Il vertice di un cono pel quale passano infinite rette appartenenti alla quadrica è un *punto singolare*.

Una quadrica ha tutti i suoi punti di una specie. Quadriche a punti parabolici sono i *coni* ed in particolare, i *cilindri*.

6. — **Le tre famiglie di quadriche.**

Intersezione della quadrica (2) col piano all'infinito è la conica impropria C_∞ i cui punti soddisfano al sistema $F(xyzt)=0$, $t=0$. L'equazione $F(xyz0)=0$ rappresenta in coordinate cartesiane il cono che proietta dall'origine la C_∞ . Se C_∞ è immaginaria non degenerare, la quadrica appartiene alla famiglia degli **elissoidi**, se C_∞ è reale non degenerare a quella degli **iperboloidi**, se C_∞ è degenerare a quella dei **paraboloidi**. Perchè una quadrica sia un paraboloide deve $F(xyz0)$ scindersi in 2 fattori lineari e ciò avviene quando $A_{44}=0$ (Cfr. Cap. VII, § 1).

7. — **Centro, diametri e piani diametrali.**

Centro di una quadrica è il polo del piano all'infinito; ha le coordin. omogene $A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}$ (cartes. $A_{14}:A_{44}; A_{24}:A_{44}; A_{34}:A_{44}$; soluzioni comuni a $f'_x = 0, f'_y = 0, f'_z = 0$) è proprio se $A_{44} \neq 0$ cioè negli ellissoidi ed iperboloidi (*quadriche a centro proprio*), è improprio se $A_{44} = 0$, cioè nei paraboloidi (*quadriche a centro improprio*). Il piano all'infinito è autopolare rispetto ai paraboloidi, cioè tangente. Il centro è indeterminato se $A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = 0$, nel qual caso la quadrica è un cilindro (§ 1). Nelle quadriche a centro proprio, tutte le corde pel centro sono bisecate dal centro stesso. Le quadriche si dicono a centro o prive di centro a seconda che il centro dianzi definito è proprio od improprio.

Piano diametricale è il piano polare di un punto improprio P_∞ ; come tale passa pel centro. Biseca le corde parallele alla direzione di P_∞ ; si dice coniugato a questa direzione; sega la quadrica secondo una conica (reale o no) luogo dei punti di contatto delle tangenti parallele alla direzione coniugata. Se P_∞ ha le coordin. cartes. omogenee $l, m, n, 0$ (cioè la direzione l, m, n) l'equaz. del piano diametricale in coord. omogenee è $lF'_x + mF'_y + nF'_z = 0$ e in coord. cartes. ordinarie $lf'_x + mf'_y + nf'_z = 0$.

Diametri. Ogni retta pel centro di una quadrica dicesi diametro; i diametri sono le polari delle rette improprie; nel paraboloide tutti i diametri sono paralleli. Se un diametro incontra la propria polare è tangente alla quadrica nel punto d'incontro.

Cono asintotico è il luogo dei diametri tangenti all'infinito; proietta dal centro la conica impropria della quadrica (la cui equaz. è $F(xyz0) = 0$) epperò l'equaz. del cono asintotico è $F(x - x_0, y - y_0, z - z_0, 0) = 0$, se x_0, y_0, z_0 sono le coord. cartes. del centro od anche $f(xyz) - (A : A_{44}) = 0$.

Coppie e terne di piani diametrali coniugati. a) **Coniugati** diconsi 2 piani diametrali se l'uno contiene il polo dell'altro; per un diametro passano infinite coppie di piani diametrali coniugati che formano un'involuzione di cui i piani doppi sono i piani tangenti condotti per quel diametro (**piani asin-**

totici). I piani diametrali coniugati² passanti per un diametro p sono i piani che congiungono p con i diametri coniugati della conica sezione della quadrica con un piano coniugato a p .

b) Se la quadrica ha centro proprio C il piano π coniugato al diametro p taglia la quadrica secondo una conica K a centro; se r, s sono due diametri coniugati di K , il triedro $p r s$ è autoconiugato; le sue faccie costituiscono una **terna di piani diametrali coniugati**, gli spigoli una **terna di diametri coniugati**. Il triedro insieme al piano all'infinito formano un *tetraedro autopolare*.

Piani principali si dicono i piani diametrali ortogonali al diametro coniugato. Il piano diametrale coniugato alla direzione $x : l = y : m = z : n$ ha l'equaz. $l F'_x + m F'_y + n F'_z = 0$ od anche $x F'_x (l m n 1) + y F'_y (l m n 1) + z F'_z (l m n 1) + F'_t (l m n 1) = 0$; sarà ortogonale alla detta direzione se $F'_x (l m n 1) : l = F'_y (l m n 1) : m = F'_z (l m n 1) : n$. Detto k il valore comune dei 3 rapporti ed associando questi a due a due si hanno 3 equaz. in l, m, n compatibili se e solo se k soddisfa all'equaz.

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0. \text{ Le 3 radici } k_1, k_2, k_3$$

sono sempre reali: in generale una quadrica ha 3 piani principali.

Piani principali in una quadrica a centro. Se la quadrica è a centro, trovata una radice k_1 , il piano principale corrispondente sega la quadrica secondo una conica che avrà una coppia di assi $r s$: i piani per $r s$ contenenti il diametro p coniugato al piano principale sono gli altri 2 piani principali. I piani principali sono piani di simmetria. **Assi delle quadriche** sono i 3 diametri $p r s$ dianzi determinati; i punti comuni agli assi e alla quadrica si dicono **vertici** delle quadriche.

Sezioni principali delle quadriche diconsi le sezioni con i piani principali.

Piani principali nei paraboloidi. Il termine noto di $\Delta(k) = 0$ è A_{44} che è nullo pei paraboloidi, onde $\Delta(k) = 0$ ha la solu-

zione $k = 0$ a cui corrisponde il piano improprio. Si dicono **piani principali** quelli che corrispondono alle altre 2 soluzioni non nulle in k . Asse del paraboloide è l'intersezione dei suoi 2 piani principali.

Quadriche rotonde. Se l'equaz. $\Delta(k) = 0$ ha una radice doppia, la quadrica è *rotonda*, cioè un piano principale e tutti i piani paralleli segano la quadrica secondo cerchi; l'asse normale a codesto piano principale è l'asse di rotazione, e tutti i piani per l'asse sono piani principali. Se l'equaz. $\Delta(k) = 0$ ha una radice tripla, la quadrica è una *sfera*: ogni piano diametrale è principale.

8. — **Equaz. delle quadriche riferite a sistemi particolari di coordinate** a) Se la quadrica ha centro proprio e gli assi cartesiani hanno l'origine sul centro è $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$, cioè l'equaz. ha soli termini di 2° grado e termine noto. b) Se i piani coordinati costituiscono una terna di piani diametrali coniugati, è di più $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ cioè l'equaz. ha la forma $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$ (**equazione normale delle quadriche a centro**); in particolare se i 3 piani coordinati sono principali. c) Se si prende come tetraedro fondamentale di un sistema di coordinate omogenee un tetraedro autopolare l'equaz. contiene solo i termini in x^2, y^2, z^2, t^2 : come caso particolare si ha il risultato b).

d) L'equaz. di un paraboloide, riferito a 2 piani diametrali coniugati (xz, yz) e al piano (xy) tangente all'estremo proprio del diametro z , ha la forma $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0$ (**equazione normale dei paraboloidi**): in particolare se i piani xz, yz sono i due principali e xy il piano tangente nel vertice (*sistema ortogonale*).

9. — **Classificazione e forme delle quadriche a centro.** Riferita la quadrica ad una terna di piani principali come piani coordinati, l'equaz. normale è (v.s.) $(3)a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$.

a) **Quadriche degeneri**: se qualcuno dei coefficienti è nullo la quadrica degenera.

Coni. Se $a_{44} = 0$ l'equaz. (3) rappresenta un cono con il vertice nell'origine, immaginario se i 3 coefficienti hanno lo stesso segno, reale nel caso contrario. Se $a_{11} = a_{22}$ il cono è di rotazione intorno a z .

Cilindri. Se uno dei 3 coefficienti a_{11} , a_{22} , a_{33} è nullo la (3) rappresenta un cilindro con le generatrici parallele all'asse che non figura nell'equazione e la cui direttrice nel piano degli altri 2 è la conica la cui equazione è la (3) stessa.

Coppie di piani. Se 2 coefficienti della (3) sono nulli la quadrica degenera in una coppia di piani; ad es. $a_{11} x^2 + a_{22} y^2 = 0$ rappresenta i 2 piani (reali o no) $x : y = \pm \sqrt{-a_{22} : a_{11}}$ la $a_{11} x^2 + a_{44} = 0$ rappresenta i 2 piani (reali o no) $x = \pm \sqrt{-a_{44} : a_{11}}$. Se 3 coefficienti sono nulli l'equaz. rappresenta 2 piani sovrapposti; così $a_{11} x^2 = 0$ rappresenta il piano z y contato 2 volte. La (3) scritta in coordinate omogenee ed in cui $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ rappresenta il piano improprio ($t = 0$) contato 2 volte.

b) Quadriche non degeneri. Quando i 4 coefficienti della (3) sono $\neq 0$, la quadrica non è degenera. Porremo $|-a_{11} : a_{44}| = 1 : a^2$, $|-a_{22} : a_{44}| = 1 : b^2$, $|-a_{33} : a_{44}| = 1 : c^2$ e distingueremo i 4 sottocasi a cui danno luogo i coefficienti della (3), divisa per $-a_{44}$.

Ellissoide reale ha l'equaz. (4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; sega l'asse x nei due punti $x = \pm a$, l'asse y in $y = \pm b$, l'asse z in $z = \pm c$; questi punti sono i 6 *vertici*; a , b , c le *lunghezze* dei *semiassi*. Ogni piano $x = k$ sega l'ellissoide secondo una ellisse $\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right)} = 1$ reale solo se

$|k| \leq |a|$; ogni piano $y = k$ sega secondo una ellisse, reale solo se $|k| \leq |b|$; ogni piano $z = k$ sega secondo una ellisse, reale solo se $|k| \leq |c|$.

Se $a = b$ l'ellissoide è di rotazione intorno a z , essendo circoli le sezioni con i piani $z = k$. Se $a = b = c$ la (4) di-

viene $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e rappresenta la *sfera* di raggio a (Cap. VIII, § 1).

Ellissoide immaginario (5) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Iperboloide ad una falda (6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Segna l'asse x nei 2 punti $x = \pm a$ e l'asse y nei 2 punti $y = \pm b$: l'asse z non segna la quadrica. Ogni piano $z = \pm k$ segna l'iperboloide secondo una ellisse reale

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1$$

i cui semiassi crescono con k . Per $k = 0$ si ha l'ellisse più piccola (**ellisse di gola**). Ogni piano $y = \pm k$ segna l'iperboloide secondo una iperbole reale

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right)} = 1$$

la quale ha l'asse trasverso $\parallel$ ad x se $|k| < |b|$, parallelo a z se $|k| > |b|$; se $k = \pm b$ l'iperbole degenera nelle 2 rette $cx \pm az = 0$ poste nei piani $y = \pm b$: ognuno di questi 2 piani è tangente nel vertice, il quale (come tutti gli altri punti dell'iperboloide) è *iperbolico*: la quadrica è **rigata**;

contiene i 2 sistemi di rette, l'uno $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right)$,

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{y}{b}\right); \text{ e l'altro } \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu \left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \text{ con } \lambda \text{ e } \mu \text{ paramenti variabili.}$$

Per ogni punto dell'iperboloide passa una retta di ciascuno dei due sistemi. L'iperboloide può essere generato da una retta che si muove appoggiandosi a 3 rette sghembe non parallele ad uno stesso piano.

Se $a = b$ l'iperboloide è di rotazione intorno all'asse z .

Iperboloide a due falde (7) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Degli assi taglia solo l'asse x e questo nei punti $x = \pm a$, che sono i

vertici. Ogni piano $x = k$ taglia l'iperboloide secondo la ellisse

$$\frac{y^2}{b^2 \left(\frac{k^2}{a^2} - 1 \right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(\frac{k^2}{a^2} - 1 \right)} = 1 \text{ reale solo se } |k| \geq |a|, \text{ i}$$

cui semiassi, || agli assi y e z , crescono al crescere di k . L'iperboloide (7) si compone di 2 falde distinte non essendovi punti reali dell'iperboloide fra i piani $x = \pm a$. Se $b = c$ l'iperboloide (7) è di rotazione intorno all'asse x .

10. — **Classificazione delle quadriche prive di centro (paraboloidi).** L'equaz. ridotta è (8) $a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{34} z = 0$, presi per piani xz e yz i 2 piani principali e per piano xy il piano tangente nel vertice dell'asse z .

Paraboloidi degeneri: se qualche coefficiente è nullo, il paraboloide degenera: $a_{11} x^2 + 2 a_{34} z = 0$ **cilindro parabolico** con le generatrici || ad y e la cui direttrice è la parabola $a_{11} x^2 + 2 a_{34} z = 0$ nel piano xz ; l'equaz. $a_{11} x^2 + a_{22} y^2 = 0$ rappresenta la coppia di piani $x:y = \pm \sqrt{-a_{22}:a_{11}}$; l'equaz. $2 a_{34} z = 0$ che scritta in coord. omogenee è equivalente a $z:t = 0$ rappresenta il piano xy e il piano all'infinito ($t = 0$).

Paraboloidi non degeneri. Quando nella (8) nessun coefficiente è nullo, il paraboloide non è degenerare. Divisa l'equaz. per $-a_{34}$, poniamo $|-a_{11}:a_{34}| = 1:a^2$; $|-a_{22}:a_{34}| = 1:b^2$; allora distinguiamo i casi a cui i segni dei coefficienti danno luogo.

Paraboloide ellittico: (9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$. Il piano xy è tangente nel vertice, taglia il paraboloide nelle coppie di rette immaginarie $b^2 x^2 + a^2 y^2 = 0$ onde il vertice e quindi tutti gli altri punti sono *ellittici*. Il piano $z = k$ taglia secondo la ellisse $\frac{x^2}{2a^2k} + \frac{y^2}{2b^2k} = 1$, reale solo se $k > 0$: non ci sono punti della banda delle z negative; al crescere di k crescono i semiassi delle ellissi sezioni.

Il piano $y = k$ taglia secondo le parabole $x^2 = 2a^2z - (k^2 a^2:b^2)$; il piano $x = k$ taglia secondo la parabola $y^2 = 2b^2z -$

— $(b^2 k^2 : a^2)$. Detta P la parabola sezione del paraboloide con il piano $y = 0$, il paraboloide è il luogo delle parabole uguali alla precedente poste in piani $\parallel$ al piano $z y$ coi vertici sulla P . Se $a = b$ il paraboloide è di rotazione intorno all'asse z .

Paraboloide iperbolico (10): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$. Il piano $z = 0$ sega il paraboloide secondo le 2 rette reali $b x \pm a y = 0$; è tangente nell'origine, la quale, insieme con tutti i punti del paraboloide, è punto *iperbolico*. Il piano $z = k$ taglia secondo l'iperbole $\frac{x^2}{2 a^2 k} - \frac{y^2}{2 b^2 k} = 1$, che ha l'asse trasverso $\parallel$ ad x se $k > 0$ e l'asse trasverso $\parallel$ ad y se $k < 0$. I piani $x = k$ tagliano secondo parabole $y^2 = -2 b^2 z + (b^2 k^2 : a^2)$ tutte uguali e similmente poste, i cui vertici sono sulla parabola P_1 di equaz. $x^2 = 2 a^2 z$, sezione del paraboloide col piano $y = 0$. I piani $y = k$ tagliano secondo le parabole $x^2 = 2 a^2 z + (a^2 k^2 : b^2)$ tutte uguali e similmente poste, eguali alle precedenti salvo il verso dell'asse, i cui vertici sono sulla parabola P_2 sezione del paraboloide con il piano $x = 0$. Il paraboloide si può generare mediante la traslazione di P_1 in guisa che il suo vertice percorra P_2 .

Il paraboloide iperbolico è rigato: contiene i due sistemi di rette, l'uno $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2 \lambda z$; $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}$, l'altro $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu$; $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2z}{\mu}$, con λ e μ parametri variabili. Per ogni punto del paraboloide passa una retta di ciascuno dei 2 sistemi. Il paraboloide può essere generato dal movimento di una retta che si appoggi a 2 rette fisse, mantenendosi parallele ad un piano (*piano direttore*).

11. — **Equazioni tangenziali ridotte delle quadriche.** Dell'ellissoide (4) l'eq. tangenziale è $a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 = 1$; dell'iperboloide ad una falda (6) è $a^2 u^2 + b^2 v^2 - c^2 w^2 = 1$; dell'iperboloide a 2 falde (7) è $a^2 u^2 - b^2 v^2 - c^2 w^2 = 1$; del paraboloide ellittico (9) è $a^2 u^2 + b^2 v^2 = 2w$; del paraboloide iperbolico (10) è $a^2 u^2 - b^2 v^2 = 2w$.

Equazione del piano tangente in (x_1, y_1, z_1) alle quadriche di equaz. ridotte. Il piano tangente in (x_1, y_1, z_1) all'ellissoide

(4) è $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$; all'iperboloide ad una falda (6)

è $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2}$; all'iperboloide a due falde (7) è $\frac{xx_1}{a^2} -$

$-\frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1$; al paraboloide ellittico (9) è $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} =$

$= z + z_1$, e al paraboloide iperbolico (10) è $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} =$

$= z + z_1$.

Equaz. della normale in (x_1, y_1, z_1) alle quadriche di equaz. ridotte sono $a^2(x - x_1):x_1 = b^2(y - y_1):y_1 = c^2(z - z_1):z_1$ per l'ellissoide (4); $a^2(x - x_1):x_1 = b^2(y - y_1):y_1 = -c^2(z - z_1):z_1$ per l'iperboloide ad una falda (6); $a^2(x - x_1):x_1 = -b^2(y - y_1):y_1 = -c^2(z - z_1):z_1$ per l'iperboloide a 2 falde (7); $a^2(x - x_1):x_1 = b^2(y - y_1):y_1 = -(z - z_1)$ per il paraboloide ellittico (9); $a^2(x - x_1):x_1 = -b^2(y - y_1):y_1 = -(z - z_1)$ per il paraboloide iperbolico (10).

12. — Comportamento dell'equaz. di una quadrica rispetto a trasformazioni di assi ortogonali. Se una quadrica riferita ad una terna di assi ortogon. ha l'equaz. $f(xyz) = 0$ e si fa una traslazione di assi definita da $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$, $z = z' + \zeta$, l'equaz. diviene $a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + x f'_x(\xi \eta \zeta) + y f'_y(\xi \eta \zeta) + z f'_z(\xi \eta \zeta) + f(\xi \eta \zeta) = 0$. Quando si passi da una terna di assi xyz ad un'altra $x'y'z'$ colla stessa origine ed orientata rispetto alla prima come al Cap. I, § 11, la equaz. $f(xyz) = 0$ diviene $x'^2 \psi(a_1 a_2 a_3) + y'^2 \psi(\beta_1 \beta_2 \beta_3) + z'^2 \psi(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) + x' y' [a_1 \psi'_x(\beta_1 \beta_2 \beta_3) + a_2 \psi'_y(\beta_1 \beta_2 \beta_3) + a_3 \psi'_z(\beta_1 \beta_2 \beta_3)] + y' z' [\beta_1 \psi'_x(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) + \beta_2 \psi'_y(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) + \beta_3 \psi'_z(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)] + z' x' [\gamma_1 \psi'_x(a_1 a_2 a_3) + \gamma_2 \psi'_y(a_1 a_2 a_3) + \gamma_3 \psi'_z(a_1 a_2 a_3)] + 2x'(a_{14}a_1 + a_{24}a_2 + a_{34}a_3) + 2y'(a_{14}\beta_1 + a_{24}\beta_2 + a_{34}\beta_3) + 2z'(a_{14}\gamma_1 + a_{24}\gamma_2 + a_{34}\gamma_3) + a_{44} = 0$, posto $\psi(xyz) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$; $\psi'_x, \dots$ le derivate di ψ .

Per una qualsivoglia trasformazione di assi ortogonali (Cap. I) sono **invarianti** (Cap. XXVIII § 4) le quattro espressioni

$$I = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad J = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$A_{44}, \quad A \text{ (discriminante).}$$

Calcolo dei coefficienti dell'equaz. ridotta di una quadrica mediante gli invarianti. Sia $A_{44} \neq 0$, cioè la quadrica abbia centro proprio: indichiamo con $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, a'_{44}$ i coefficienti nell'equaz. ridotta: allora $a'_{44} = A : A_{44}$; $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$ sono le

3 radici $k_1 k_2 k_3$ dell'equaz.
$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

che può anche scriversi $k^3 - I k^2 + J k - A_{44} = 0$.

Se $A_{44} = 0$, cioè se la quadrica è un paraboloide, $a'_{11}, a'_{22}, a'_{34}$ i coeff. dell'equaz. ridotta, si ha $a'_{34} = \pm \sqrt{-A : J}$ (il doppio segno dipendendo dal verso dell'asse z); a'_{11}, a'_{22} sono le radici dell'equaz. $k^2 - I k + J = 0$.

Classificazione delle quadriche mediante i segni degli invarianti

I	J	A_{44}	A	QUADRICA	
$\pm$	$+$	$\pm$	$+$	Ellissoide immaginario.	Si prendono insieme o i segni superiori o gli inferiori
$\pm$	$+$	$\pm$	0	Cono.	
$\pm$	$+$	$\pm$	$-$	Ellissoide reale.	
Altri casi	Altri casi	$\pm$	$+$	Iperboloide ad una falda.	
		$\pm$	0	Cono reale.	
		$\pm$	$-$	Iperboloide a due falde.	
$\pm$	$+$	0	$-$	Paraboloide ellittico	
$\pm$	$+$	0	0	Cilindro ellittico.	
Arbitrario	$-$	0	$+$	Paraboloide iperbolico.	
	$-$	0	0	Cilindro iperbolico.	
	0	0	0	Cilindro parabolico.	

13.— **Fascio di quadriche.** Date 2 quadriche $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, l'equaz. $f_1 - k f_2 = 0$ rappresenta una quadrica, qualunque sia k , passante per l'intersez. delle due quadriche $f_1 = 0, f_2 = 0$; le infinite quadriche al variare di k costituiscono un **fascio** di quadriche; la intersez. di $f_1 = 0, f_2 = 0$ dicesi **curva base del fascio**. Per ogni punto dello spazio $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ non appartenente alla curva base passa una ed una sola quadrica caratterizzata da $k = f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) : f_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Le quadriche di un fascio segano sopra una retta coppie in involuzione, sono tagliate da un piano secondo un fascio di coniche i cui punti base sono le intersezioni del piano con la curva base. Entro un fascio esistono 2 quadriche che toccano una retta assegnata ed i punti di contatto sono coniugati rispetto a tutte le quadriche del fascio; esistono 3 quadriche che toccano un piano assegnato e i 3 punti di contatto formano un triangolo autocongiugato rispetto a tutte le quadriche del fascio.

Quadriche degeneri di un fascio sono quelle determinate dai valori di k che annullano il discriminante di $f_1 - k f_2 = 0$; poichè questo è di 4° grado in k , generalmente vi sono 4 coni i cui vertici formano un tetraedro autopolare rispetto alle quadriche del fascio. Se per qualche valore di k anche i minori di 3° o 2° ordine del discriminante si annullano, vi saranno quadriche degeneri in coppie di piani, o in piani contati 2 volte. Ogni piano tangente lungo una generatrice ad uno dei detti coni sega le quadriche lungo coniche che si toccano in 2 punti fissi su quella generatrice.

14. — **Schiera di quadriche.** Date due quadriche involuppi $\varphi_1(u, v, w) = 0$, $\varphi_2(u, v, w) = 0$, l'equaz. $\varphi_1 - k \varphi_2 = 0$ rappresenta, qualunque sia k , una quadrica involuppo tangente all'involuppo semplicemente infinito di 4ª classe (**involuppo base**) dei piani che sono tangenti ad entrambe le quadriche $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$. Le infinite quadriche, al variare di k costituiscono una **schiera** di quadriche.

Ogni piano $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ dello spazio non appartenente all'involuppo base, è toccato da una e da una sola quadrica della

schiera, individuata da $k = \varphi_1(\bar{u}\bar{v}\bar{w}) : \varphi_2(\bar{u}\bar{v}\bar{w})$. Le coppie di piani tangenti alle quadriche di una schiera per una retta formano una involuzione.

Una retta generica è tangente a 2 quadriche della schiera; i piani tangenti relativi (appartenenti alla retta) sono coniugati rispetto a tutte le quadriche della schiera. I coni circoscritti alle quadriche di una schiera da un punto generico formano una schiera. Per un punto generico dello spazio passano tre quadriche della schiera aventi tre piani tangenti in quel punto che formano un triedro autoconiugato (§ 4) rispetto a tutte le quadriche della schiera.

Inviluppi degeneri appartenenti ad una schiera, cioè coniche considerate come inviluppi di piani, sono quelli che corrispondono ai valori di k che annullano il discriminante di $\varphi_1 - k\varphi_2 = 0$: in generale sono 4. Se per qualche valore di k si annullano anche i minori di 3° ordine del discriminante, gli inviluppi degeneri si riducono ad una coppia di punti che coincidono nel caso che siano nulli anche i minori di 2° ordine.

I piani delle 4 coniche anzidette formano un tetraedro autoconiugato rispetto a tutte le quadriche della schiera. I coni circoscritti alle quadriche di una schiera da un punto qualunque delle 4 coniche sono tangenti lungo due generatrici.

15. — **Sezioni circolari.** Diconsi **piani ciclici** i piani che tagliano una quadrica (supposto che non sia una sfera) secondo cerchi. La lunghezza del semidiametro dell'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, di coseni direttori α, β, γ , è dato da $\frac{1}{e^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\beta^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\gamma^2$. Il luogo dei semidiametri di lunghezza b (supposto $a \geq b \geq c$) si compone dei due piani reali $z \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} \pm x \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} = 0$ che si tagliano secondo l'asse di lunghezza intermedia, quindi l'intersezione di

questi piani con l'ellissoide sono due cerchi di raggio b : i piani || a questi due tagliano pure secondo cerchi e costituiscono i due fasci di piani ciclici reali. Gli estremi dei diametri coniugati sono i 4 ombelichi dell'ellissoide: le equaz. di codesti diametri sono $y = 0$, $x : a\sqrt{a^2 - b^2} = \pm z : c\sqrt{b^2 - c^2}$ e le coord. degli ombelichi sono $\pm a\sqrt{(a^2 - b^2):(a^2 - c^2)}$, 0, $\pm c\sqrt{(b^2 - c^2):(a^2 - c^2)}$. I piani ciclici reali per il centro di un iperboloide ad una falda passano per il maggiore degli assi trasversi, e nell'iperboloide a 2 falde per il maggiore dei due assi non trasversi. Per il paraboloido ellittico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ i 2 piani ciclici reali pel vertice, supposto $a > b$, hanno le equazioni $y\sqrt{a^2 - b^2} \pm zb = 0$ e i due ombelichi reali, propri, hanno le coordinate $(0, \pm b\sqrt{a^2 - b^2}, (a^2 - b^2):2)$.

16. — **Quadriche a centro confocali** sono quelle della famiglia (11) $\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} + \frac{z^2}{c^2 - k} = 1$, che costituiscono una schiera, potendosi scrivere l'equazione tangenziale nella forma $a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 - k(u^2 + v^2 + w^2) = 0$. Esse hanno lo stesso centro, gli stessi piani principali; segano ciascuno di questi in una schiera di coniche confocali (Cap. VI § 6), Supposto $a > b > c$ l'equaz. (11) rappresenta ellissoidi reali se $-\infty < k < c^2$, iperboloidi ad una falda se $c^2 < k < b^2$, iperboloidi a due falde se $b^2 < k < a^2$, ellissoidi immaginari se $a^2 < k < +\infty$. Per $k = c^2$ si ha l'ellisse reale (12) $\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1$ nel piano xy (inviluppo degenero, § 2'), per $k = b^2$ si ha l'iperbole (13) $\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1$ nel piano xz , per $k = a^2$ si ha l'ellisse immaginaria $\frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = -1$ nel piano yz : esse costituiscono le coniche focali della schiera, delle quali 2 sole sono reali.

L'ellisse focale (12) ha i fuochi nei punti $(\pm \sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0)$ che sono i vertici dell'asse trasverso dell'iperbole focale (13), i cui fuochi $(\pm \sqrt{a^2 - c^2}, 0, 0)$ sono i vertici dell'asse maggiore dell'ellisse focale (12).

In una schiera di quadriche confocali ve n'è una sola che tocca un piano generico assegnato; le coppie di piani tangenti condotte per una retta alle quadriche della schiera formano un'involuzione simmetrica. Fra le quadriche della schiera ve ne sono due, sempre reali, che toccano una retta assegnata; i relativi piani tangenti, passanti per la retta, sono perpendicolari tra loro. I coni circoscritti, da un punto generico dello spazio, alle quadriche confocali formano una schiera che dicesi **schiera dei coni confocali**.

I coni circoscritti alle quadriche confocali, da un punto di una conica focale, sono rotondi ed hanno come asse comune di rotazione la tangente a quella conica in quel punto.

Dato un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ si determinano le quadriche della schiera che passano per P determinando i valori di k che soddisfanno alla (11) ove si è posto $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Ridotta l'equaz. intera è di 3° grado; le tre radici k_1, k_2, k_3 sono reali l'una minore di c^2 , un'altra compresa fra c^2 e b^2 e la 3ª fra b^2 e a^2 ; cioè per P passa un ellissoide, un iperboloide ad una falda ed un iperboloide a due falde. Viceversa dati tre numeri reali k_1, k_2, k_3 appartenenti ai detti intervalli si hanno tre quadriche confocali che si intersecano in 8 punti ciascuno dei quali sta in uno determinato triedro degli assi. I numeri k_1, k_2, k_3 si possono assumere come coordinate di P in un triedro: si dicono **coordinate ellittiche**.

Paraboloidi confocali sono i paraboloidi della famiglia

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 2z - k, \text{ che costituiscono una schiera,}$$

potendosi l'equazione tangenziale scriversi nella forma $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 2w - k(u^2 + v^2 + w^2) = 0$. Per $k < b^2$ e per $k > a^2$ (supposto $a^2 > b^2$) si hanno paraboloidi ellittici, per $b^2 < k < a^2$ si hanno paraboloidi iperbolici; per $k = b^2$ una *parabola focale*

$x^2 = (a^2 - b^2) (2z - b^2)$ nel piano principale $y = 0$; per $k = a^2$ un'altra *parabola focale* $y^2 = (b^2 - a^2) (2z - a^2)$ nel piano principale $x = 0$, le quali due parabole hanno lo stesso parametro (Cap. VI § 4) $a^2 - b^2$ e gli assi sull'asse z in senso opposto. Il fuoco della prima parabola è il vertice della seconda e viceversa. Per un punto passano tre paraboloidi confocali dei quali uno iperbolico e 2 ellittici che si tagliano ortogonalmente.

Coniche focali di una quadrica. Poichè data una quadrica è determinata la schiera delle quadriche confocali ad essa, sono anche determinate le *coniche focali* (v. s.) le quali diconsi *coniche focali della quadrica*. Il luogo dei punti da cui si possono circoscrivere coni rotondi (reali se i vertici sono esterni, immaginari se interni) ad una quadrica è composto delle due coniche focali reali, una ellisse e l'altra iperbole nelle quadriche a centro, aventi gli assi focali sopra l'asse trasverso maggiore: se le quadriche sono paraboloidi le due coniche focali sono parabole. Nell'ellissoide l'iperbole focale e nell'iperboloide a due falde l'ellisse focale tagliano la quadrica in ombelichi.

Il luogo dei punti da cui una conica reale è proiettata mediante coni rotondi è una seconda conica reale, la quale è proiettata dai punti della prima secondo coni rotondi. Se l'una è a centro è a centro anche la seconda ma di generi diversi ed hanno l'asse focale in comune; se una è una parabola anche l'altra è una parabola. I piani delle due coniche che si dicono coniugate si tagliano ortogonalmente.

CAPITOLO X.

Proiettività fra forme di 2^a specie

1. — **Collineazione fra due piani.** Fissati due piani π, π' due sistemi di coordinate omogenee x, y, z ; x', y', z' , le tre equaz. (1):
 $\varrho x' = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z$; $\varrho y' = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z$;

$\varrho z' = a_{34} x + a_{32} y + a_{33} z$ (ove ϱ è un fattore di proporzionalità ed il determinante A dei 9 coefficienti a_{ik} è $\neq 0$) fanno corrispondere ad ogni punto (x, y, z) di π un punto (x', y', z') di π' ; ad ogni punto (x', y', z') di π' un punto (x, y, z) di π le cui coordinate sono date da $\sigma x = A_{11} x' + A_{21} y' + A_{31} z'$; $\sigma y = A_{12} x' + \dots$; $\sigma z = A_{13} x' + \dots$, ove A_{ik} è il complemento algebrico di a_{ik} in A ($\sigma = A : \varrho$); ad ogni retta (u', v', w') di π' corrisponde una retta di π di coord. u, v, w date da (2) $\tau u = a_{11} u' + a_{21} v' + a_{31} w'$; $\tau v = a_{12} u' + a_{22} v' + a_{32} w'$; $\tau w = a_{13} u' + \dots$; viceversa ad una retta (u, v, w) di π corrisp. una retta $(u' v', w')$ di π' essendo $\varphi u' = A_{11} u + A_{12} v + A_{13} w$; $\varphi v' = A_{21} u + \dots$; $\varphi w' = A_{31} u + \dots$ ($\varphi = A : \tau$); a 4 punti allineati e a 4 rette di un fascio in π corrisp. 4 punti allineati e 4 rette di un fascio in π' di uguale birapporto, cioè forme di 1^a specie corrispondenti sono proiettive (Cap. II, § 3). La corrispondenza così definita fra π e π' dicesi **collineazione**; i piani diconsi **collineari**.

In coord. cartes. ordinarie le equaz. della collineazione sono $X' = (a_{11} X + a_{12} Y + a_{13}) : (a_{31} X + a_{32} Y + a_{33})$; $Y' = (a_{21} X + a_{22} Y + a_{23}) : (a_{31} X + a_{32} Y + a_{33})$. L'ordine di una curva algebrica e la classe di un involuppo algebrico non sono alterati da una collineazione. 4 coppie di punti corrispondenti individuano generalmente una collineazione.

Rette limiti di π e π' diconsi le rette che corrispondono rispett. alle rette improprie, di equaz. $z' = 0$; $z = 0$ in coord. cartes. omogenee.

Affinità dicesi la collineaz. se le rette improprie di π e π' si corrisp. Le equaz. in coord. cartes. omog. sono le (1) ove alla terza si sostituisca $\varrho z' = a_{33} z$: in coord. cartes. ordinarie $X' = a_{11} X + a_{12} Y + a_{13}$, $Y' = a_{21} X + a_{22} Y + a_{23}$ ($a_{ik} = a_{ik} : a_{33}$); se gli assi coord. si corrisp. le equaz. sono $X' = m X$, $Y' = n Y$. Punteggiate corrisp. sono simili; le aree di figure corrisp. hanno il rapporto costante $m n \text{ sen } \widehat{X'Y'} : \text{sen } \widehat{XY}$. Se questo rapporto $= 1$, l'affinità dicesi **equivalente**.

Similitudine è l'affinità che conserva gli angoli; il rapporto fra 2 segmenti corrisp. è costante: le equaz. cartes. sono

$X' = m X$, $Y' = m Y$ se gli assi si corrispondono. **Uguaglianza** è la similitudine in cui $m = 1$.

Collineazione fra piani sovrapposti. Dicesi *unito* un elemento (punto o retta) di π che ha per corrisp. in π' se stesso. Si trovano le coord. dei punti uniti ponendo in (1) $x' = x, y' = y, z' = z$: si chiami (1') il sistema che ne risulta. Siano $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ le 3

radici dell'equaz. (3)
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

In (1') un'equaz. è conseguenza dell'altre due: se queste sono le prime due, i punti uniti hanno le coord. $x_i : y_i : z_i = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - \varrho_i & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} - \varrho_i \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho_i \end{vmatrix} (i = 1, 2, 3)$. Se $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sono reali distinte i punti uniti sono reali distinti e le 3 rette che li coniugano sono tre rette unite, le cui coordinate si possono anche ottenere dalla (2) fatto $u = u', v = v', w = w'$. Se ϱ_1 è reale, ϱ_2, ϱ_3 complesse, un punto unito u_1 è reale, gli altri 2 immaginari; una retta unita non passante per u_1 è reale, le altre due immaginarie. Se $\varrho_1 = \varrho_2$ sono reali e distinte da ϱ_3 (pure reale) due punti uniti coincidono e un terzo è distinto da questi; due rette unite coincidono e la terza passa pei punti uniti coincidenti. Se $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ (reali) i tre punti uniti coincidono e le tre rette unite coincidono e passano pel punto unito. Se ϱ_1 annulla tutti i minori di (3) (è doppia almeno), delle 3 equaz. (1') due sono conseguenze della 3ª la quale rappresenta una retta di punti uniti; dualmente v'ha un fascio di rette unite.

Omologia è la collineazione nell'ultimo dei casi esaminati: la retta di punti uniti dicesi *asse* di omologia, il sostegno del fascio di rette unite *centro*. Punti corrisp. distinti sono allineati col centro; rette distinte corrisp. si tagliano sull'asse. Un'omologia è individuata dal centro, asse, ed una coppia di elementi corrispondenti.

Caratteristica di una omologia è il birapporto (costante) di 2 punti omologhi, centro, ed intersezione della congiungente i

2 punti coll'asse. Le rette unite sono || all'asse; la bisettrice della striscia determinata da esse è ugualmente distante (in versi opposti) dal centro e dall'asse.

Omotetia è l'omologia con l'asse improprio. Se S è il centro, AA' , BB' punti corrispond. $\overline{SA} : \overline{SA'} = \overline{SB} : \overline{SB'} = \dots = \text{caratteristica} = \text{rapporto di omotetia}$. Dicesi *diretta* od *inversa* l'omotetia a secondo che il rapporto è ≥ 0 . Se il rapporto $= -1$ l'omotetia dicesi **simmetria** rispetto ad S .

Affinità omologica è l'omologia col centro improprio S_∞ ; le congiungenti punti omologhi sono parallele. Se AA' sono punti corrispond. U è l'intersez. di AA' con l'asse, è $\overline{A'U} : \overline{AU} = \text{costante} = \text{rapporto di affinità}$.

Affinità ortogonale se la direzione S_∞ è normale all'asse; **simmetria obliqua** se rapporto d'affinità $= -1$.

Equipollenza è l'omologia in cui centro ed asse sono impropri: definisce una traslazione del piano.

2. — **Correlazione fra piani**. Fissati su 2 piani π, π' due sistemi di coordinate omogenee cartes. e pluck. il sistema di equaz.: (4) $\varrho u' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$; $\varrho v' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$; $\varrho w' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$, ove ϱ è un fattore di proporzionalità e il determinante A dei 9 coefficienti a_{ik} è $\neq 0$, fa corrispondere ad ogni punto di π una retta di π' e viceversa ad ogni retta (u', v', w') di π' un punto di π di coord. $\sigma x = A_{11}u' + A_{21}v' + A_{31}w'$; $\sigma y = A_{12}u' + A_{22}v' + A_{32}w'$; $\sigma z = A_{13}u' + \dots$. Ad un punto $(x' y' z')$ di π' corrisponde la retta di π di coord. (4') $\tau u = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z'$; $\tau v = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z'$; $\tau w = a_{13}x' + \dots$ e viceversa ad una retta (u, v, w) corrisp. il punto $\varphi x' = A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w$; $\varphi y' = A_{21}u + \dots$; $\varphi z' = A_{31}u + \dots$. A punto e retta che s'appartengono corrisponde retta e punto che si appartengono. Una correlazione è in generale individuata da 2 quaterne di elementi corrispond. ; essa trasforma una curva algebrica di ordine n in un involuppo algebrico di classe n .

Correlazione fra piani sovrapposti. Ad un punto considerato come appartenente a π o a π' corrispondono in π' e π due rette, generalm. distinte; coincidono se i secondi membri di (4)

e (4') sono proporzionali, fatto $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$; cioè se (5) $(a_{i1} - k a_{1i})x + (a_{i2} - k a_{2i})y + (a_{i3} - k a_{3i})z = 0$ ($i = 1, 2, 3$), k essendo il fattore di proporzionalità. Il sistema è possibile per valori di k che annullano il determ. dei coeff. di x, y, z ; poichè il determinante è il 3° grado in k , ci saranno, in generale, 3 punti che corrispondono in doppio modo a tre rette.

Correlazione involutoria o polarità si ha se $A (\neq 0)$ è simmetrico, poichè in questo caso le equaz. (5) sono per $k = 1$ identità, cioè ogni punto corrisponde in doppio modo alla sua retta corrisp. Un punto e una retta corrisp. si dicono **polo e polare**.

Se il punto appartiene alla polare di Q la polare di P appartiene a Q . **Coniugati o reciproci** nella polarità si dicono P e Q .

Condizione perchè (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) **siano coniugati** è $a_{11}x_1x_2 + a_{22}y_1y_2 + a_{33}z_1z_2 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{13}(x_1z_2 + x_2z_1) + a_{23}(y_1z_2 + y_2z_1) = 0$.

Autoconiugato è un punto che appartiene alla propria polare.

Conica fondamentale della polarità è il luogo dei punti autoconiugati: l'equaz. si ottiene dalla condiz. di coniugio facendo $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = y_2 = y$, $z_1 = z_2 = z$ cioè: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33} = 0$ (vedi Cap. VI § 3).

Se la retta p appartiene al polo della q il polo di p appartiene a q . **Coniugate o reciproche** nella polarità si dicono le rette p e q .

Condizione perchè (u_1, v_1, w_1) e (u_2, v_2, w_2) **siano coniugate** è $A_{11}u_1u_2 + A_{22}v_1v_2 + A_{33}w_1w_2 + A_{12}(u_1v_2 + u_2v_1) + A_{13}(u_1w_2 + u_2w_1) + A_{23}(v_1w_2 + v_2w_1) = 0$.

Autoconiugata è una retta che appartiene al proprio polo.

Conica involuppo fondamentale della polarità è l'involuppo delle rette autoconiugate; l'equaz. si ottiene dalle condiz. di coniugio facendo $u_1 = u_2 = u$, $v_1 = v_2 = v$, $w_1 = w_2 = w$, cioè $A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw + A_{33} = 0$.

Proiettività fra forme di terza specie

1. — **Collineazione fra due spazi.** In due spazi Σ e Σ' siano fissati due sistemi di coordinate omogenee x, y, z, t ; x', y', z', t' : le equaz. (1): $\varrho x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$; $\varrho y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t$; $\varrho z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t$; $\varrho t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$ dove ϱ è un fattore di proporzionalità ed il determinante A dei 16 coefficienti a_{ik} è $\neq 0$, fa corrispondere ad un punto di Σ un punto di Σ' ; viceversa ad un punto $x'y'z'$ corrisponde il punto $\sigma x = A_{11}x' + A_{21}y' + A_{31}z' + A_{41}t'$; $\sigma y = A_{12}x' + \dots$; $\sigma z = A_{13}x' + \dots$; $\sigma t = A_{14}x' + \dots$, detto A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} in A . Ad un piano (u', v', w', r') di Σ' corrisponde in Σ un piano $\tau u = a_{11}u' + a_{21}v' + a_{31}w' + a_{41}r'$; $\tau v = a_{12}u' + \dots$; $\tau w = a_{13}u' + \dots$; $\tau r = a_{14}u' + \dots$; viceversa ad un piano (u, v, w, r) di Σ corrisponde in Σ' un piano $\varphi u' = A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w + A_{14}r$; $\varphi v' = A_{21}u + \dots$; $\varphi w' = A_{31}u + \dots$; $\varphi r' = A_{41}u + \dots$. Ad elementi che si appartengono di Σ , corrispondono elementi che si appartengono in Σ' : a forme di 1^a o di 2^a specie corrispondono forme di 1^a e 2^a specie proiettive a quelle. Una collineaz. è determinata date che siano 5 coppie di elem. (punti o piani) corrispondenti. Una collineaz. non altera nè l'ordine di una curva algebrica nè la classe di un involuppo algebrico.

Piani limiti in Σ e Σ' sono i piani corrispondenti ai piani impropri di Σ' e Σ .

Affinità dicesi la collineaz. se i piani impropri di Σ e Σ' si corrispondono. Se si prendono coordin. cartes. omog. le equaz. sono le (1) ove alla quarta si è sostituita la $\varrho t' = a_{44}t$. Riferendoci a 2 sistemi di assi cartes. che si corrispondono, le equaz.

dell'affinità sono $x' = lx$, $y' = my$, $z' = nz$: punteggiate corrispondenti sono simili, piani corrisp. sono affini; piani e rette || hanno per corrisp. piani e rette ||; è costante il rapporto fra i volumi di figure corrispondenti.

Similitudine è l'affinità in cui si conservano gli angoli di rette o i diedri di piani: le equazioni sono $x' = kx$, $y' = ky$, $z' = kz$ se si corrisp. i 2 sistemi di assi cartes.; segmenti corrisp. hanno il rapporto k , aree corrisp. hanno il rapporto k^2 , volumi corrisp. hanno il rapporto k^3 .

2. — **Collineazione fra spazi sovrapposti.** Dicesi **unito** un elemento (*punto, retta o piano*) di Σ che ha in Σ' per corrisp. se stesso. Le coordin. dei punti uniti si trovano ponendo in (1) $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$ e sia (1') il sistema che ne risulta. Ponendo in queste in luogo di ϱ le 4 radici $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ dell'equaz.

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

tre al più risultano indipendenti dalle quali si trovano le coord. dei punti uniti, che in generale sono 4. I piani del tetraedro che ha i 4 punti uniti per vertici sono i 4 **piani uniti** e gli spigoli le 6 **rette unite**.

Collineazione assiale è la collineazione in cui sono uniti i punti di una retta e i piani per un'altra retta: si ha questo caso se una radice ϱ annulla anche i minori di 3° ordine di (2).

Omologia solida è la collineaz. in cui sono uniti tutti i punti e le rette di un piano (**piano di omologia**) e tutti i piani e le rette per un punto (**centro d'omologia**). Punti distinti corrisp. sono allineati col centro, piani distinti corrisp. si segano sul piano di omologia, rette distinte corrisp. si segano sul piano d'omologia e formano un piano pel centro.

Omotetia è l'omologia col centro proprio e il piano d'omologia improprio; rette e piani corrisp. sono ||; punti corrisp. hanno dal centro distanze in rapporto costante.

Simmetria rispetto ad un centro è l'omotetia se quest'ultimo rapporto è — 1.

Affinità omologica è l'omologia col centro improprio ed il piano d'omologia proprio. Segmenti che congiungono punti corrisp. sono $\parallel$ e divisi dal piano d'omologia in rapporto costante: se esso è — 1 si ha la **simmetria rispetto ad un piano**.

Equipollenza è l'omologia in cui centro e piano d'omologia sono impropri.

3. — **Correlazione fra spazi.** Fissati in Σ e Σ' due sistemi di coord. omogene di punti e piani le equaz. (3)

$\varrho u' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$; $\varrho v' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t$;
 $\varrho w' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t$; $\varrho r' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$;
 dove ϱ è un fattore di proporz. ed il determ. A dei 16 coeff. a_{ik} è $\neq 0$, fa corrisp. ad un punto di Σ un piano di Σ' ; al piano (u', v', w', r') di Σ' il punto di Σ $\sigma x = A_{11}u' + A_{21}v' + A_{31}w' + A_{41}r'$; $\sigma y = A_{12}u' + \dots$; $\sigma z = A_{13}u' + \dots$; $\sigma t = A_{14}u' + \dots$;
 ad un punto (x', y', z', t') di Σ' il piano di Σ (4): $\tau u = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' + a_{41}t'$; $\tau v = a_{12}x' + \dots$, $\tau w = a_{13}x' + \dots$, $\tau r = a_{14}x' + a_{24}y' + \dots$; infine ad un piano (u, v, w, r) di Σ il punto di Σ' : $\varphi x' = A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w + A_{14}r$; $\varphi y' = A_{21}u + \dots$; $\varphi z' = A_{31}u + \dots$; $\varphi t' = A_{41}u + A_{42}v + \dots$.
 Ad elementi che si appartengono corrisp. elem. che si appartengono: ad un piano punteggiato una stella di piani, ad una retta l una retta l' sostegno del fascio di piani corrisp. ai punti della l .

Elementi che si corrispondono in doppio modo. Riferendosi ad uno stesso triedro di assi cartesiani, ad un punto P considerati in Σ o Σ' corrisponderà in Σ' o Σ lo stesso piano se i primi membri di 3 sono proporz. ai primi membri di (4) fatto $x = x'$ ecc. cioè se $(a_{i1} - k a_{4i})x + (a_{i2} - k a_{2i})y + (a_{i3} - k a_{3i})z + (a_{i4} - k a_{4i})t = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Se k_1, k_2, k_3, k_4 sono le 4 radici in k del determ. dei coefficienti, sostituendole a k si ottengono le coord. dei punti che corrisp. doppiamente ai loro piani corrisp. In generale ci sono 4 siffatti punti. Se una radice k_i annulla i minori del 3° ordine del determ. precedente

v'ha una retta di tali punti; se annulla i minori del 2° ordine v'ha un piano; se annulla tutti gli elementi del determ. ogni punto dello spazio corrisp. doppiamente ad un piano: la correlazione è *involutoria*: ciò accade se A è simmetrico o emisimmetrico (Cap. XVI § 3).

Correlazione nulla (o focale) è la correlaz. involutoria se A è emisimmetrico: ogni punto appartiene al piano a cui corrisponde doppiamente.

Polarità (nello spazio) è la correlazione se A è simmetrico. Un punto ed un piano corrisp. si dicono **polo** del piano e **piano polare** del punto: di due rette corrisp. l'una dicesi **retta polare** dell'altra. Se un punto percorre una retta r , il piano polare genera un fascio di sostegno la polare di r , proiettiva alla retta r .

Se di 2 piani il secondo appartiene al polo del primo, il primo appartiene al polo del secondo; i 2 piani diconsi **coniugati** o **reciproci**.

Condiz. perchè (u_1, v_1, w_1, r_1) (u_2, v_2, w_2, r_2) **siano coniugati** è $A_{11}u_1u_2 + A_{22}v_1v_2 + A_{33}w_1w_2 + A_{44}r_1r_2 + A_{12}(u_1v_2 + u_2v_1) + A_{13}(u_1w_2 + u_2w_1) + A_{14}(u_1r_2 + u_2r_1) + A_{23}(v_1w_2 + v_2w_1) + A_{24}(v_1r_2 + v_2r_1) + A_{34}(w_1r_2 + w_2r_1) = 0$.

Autoconiugato è un piano che appartiene al proprio polo.

Quadrica inviluppo fondamentale della polarità è l'inviluppo dei piani autoconiugati: $A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + A_{44}r^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{14}ur + 2A_{23}vw + 2A_{24}vr + 2A_{34}wr = 0$. (Cap. IX § IV)

Se di 2 punti il secondo appartiene al piano polare del primo, il primo appartiene al piano polare del secondo; i 2 punti diconsi **coniugati** o **reciproci**.

Condiz. perchè (x_1, y_1, z_1, t_1) (x_2, y_2, z_2, t_2) **siano coniugati** è $a_{11}x_1x_2 + a_{22}y_1y_2 + a_{33}z_1z_2 + a_{44}t_1t_2 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{13}(x_1z_2 + x_2z_1) + a_{14}(x_1t_2 + x_2t_1) + a_{23}(y_1z_2 + y_2z_1) + a_{24}(y_1t_2 + y_2t_1) + a_{34}(z_1t_2 + z_2t_1) = 0$.

Autoconiugato è un punto che appartiene al proprio piano polare.

Quadrica fondamentale della polarità è il luogo dei punti autoconiugati: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0$.

ALGEBRA.

Congruenze

1. — **Congruenze (*)**. Se a e b divisi per n danno lo stesso resto si dicono **congrui fra loro rispetto al numero n** ; n dicesi **modulo** della congruenza: la detta proprietà si traduce, in simboli, con $a \equiv b \pmod{n}$.

Supponendo che il modulo delle congruenze sia sempre n , si ha: se $a \equiv b$ e $b \equiv c$ è $a \equiv c$; se $a \equiv b$ è $a - b \equiv 0$; $ka \equiv kb$ $a^k \equiv b^k$; se $a \equiv b$ e $c \equiv d$ è $a + c \equiv b + d$ e $ac \equiv bd$; se $a \equiv b$ e d primo con n , divide a e b , è $(a:d) \equiv (b:d)$. Se d non è primo con n la congruenza $(a:d) \equiv (b:d)$ può non sussistere (Es. $a = 33$, $b = 21$, $n = 12$, $d = 3$). Se $f(x)$ è una funzione razionale intera $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$, ed $a \equiv \beta$, si ha $f(a) \equiv f(\beta)$.

Sistema completo di numeri non congruo rispetto ad n è l'insieme di n numeri che divisi per n danno tutti i resti inferiori ad n .

Teor. della progressione aritmetica. Se n è primo con a , n termini consecutivi di una progressione aritmetica di ragione a formano un sistema completo non congruo rispetto ad n .

Equazione di Diofanto. Le soluzioni intere dell'equaz. $ax + by = c$ supposti a, b, c primi fra loro (a cui possono sempre ridursi dividendo l'equaz. pel loro massimo comun divisore) ed a e b primi fra loro (condiz. di possibilità) sono date da $x = \bar{x} + kb$, $y = \bar{y} - ka$ essendo $\bar{x}, \bar{y}$ una particolare coppia di soluzioni e k un qualsivoglia intero positivo o negativo (v. Cap. XXII § 4).

(*) Le lettere rappresentano in questo paragrafo numeri interi.

Se a è primo con n , dicesi **coniugato di a rispetto al mod. n** un numero b per cui $ab \equiv 1 \pmod{n}$. I numeri 1 ed $n - 1$ sono coniugati di se stessi rispetto al mod. n .

2. — Funzione di Gauss. Il numero dei numeri inferiori ad n e primi con esso, compresa l'unità, si indica con $\varphi(n)$ (Es. $\varphi(8) = 4$); $\varphi(n)$, funzione aritmetica di n , dicesi **funzione di Gauss**. Se n è primo, $\varphi(n) = n - 1$; per $n > 2$, $\varphi(n)$ è pari; se a e b sono primi fra loro, $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Se p è primo $\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1} = p^a \left(1 - \frac{1}{p}\right)$; se n , decomposto in fat-

tori primi; è uguale a $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, è $\varphi(n) = \varphi(p_1^{a_1}) \dots \dots \dots \varphi(p_r^{a_r}) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$. La somma dei numeri primi con n (> 1) ed inferiori ad n è $(n:2) \varphi(n)$. Se $1, d_1, d_2, \dots, d_r, n$ sono i divisori di n è $1 + \varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_r) + \varphi(n) = n$. Dell'equazione di Diofanto $ax + by = c$, una coppia di soluzioni è $\bar{x} = ca^{\varphi(b)-1}$; $\bar{y} = c(1 - a^{\varphi(b)}) : b$.

Teor. di Fermat: se p è primo ed a è primo con p è $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Teor. di Fermat generalizzato: se a ed n sono primi fra loro si ha $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Teor. di Wilson: se p è primo, $p - 1! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ (*); viceversa se $p - 1! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, p è primo. Se p è un numero primo sussistono le congruenze $1^m \equiv 2^m \equiv 3^m \dots \equiv (p-1)^m \equiv 1 \pmod{p}$ se e soltanto se m è multiplo di $p-1$.

(*) Il prodotto dei primi m numeri naturali dicesi **fattoriale** di m ; si indica con $m!$, $|m, \pi(m)$; noi useremo il primo simbolo.

Calcolo combinatorio e sue applicazioni

1. — **Permutazioni** di m oggetti si dicono i gruppi che si possono formare con gli m oggetti ordinandoli in tutti i modi possibili. Il loro numero P_m è $m!$

Vale la formula di ricorrenza $P_m = m P_{m-1}$ da cui, pel principio della permanenza delle leggi formali (*principio di Hankel*) si ha $P_0 = 0! = 1$. Se gli m oggetti sono disposti in linea chiusa, il numero delle permutazioni è $m - 1!$

Se degli m oggetti α sono uguali fra loro, le permutazioni sono $m! : \alpha!$; se altri β sono pure uguali fra loro, ma diversi dai precedenti, il numero delle permutazioni è $m! : \alpha! \beta!$. Se $\beta = m - \alpha$ il numero delle permutazioni è uguale a quello delle combinazioni semplici di m oggetti ad α ad α (§ 3).

Spostamento (od **inversione**) si ha in una permutazione ogni volta che un oggetto di numero d'ordine maggiore si trova innanzi a un oggetto di numero d'ordine minore. La permutazione (indicando gli oggetti col loro numero d'ordine) 7314562 ha 9 spostamenti (7 dà luogo a 6 spostamenti, 3 ad 1, 4 ad 1 e 5 ad 1). **Primitiva** (o **fondamentale**) è la permutazione che non ha alcuno spostamento; **inversa** quella in cui gli elementi si succedono nell'ordine inverso della primitiva; essa ha il numero massimo di spostamenti e cioè $n(n-1):2$, se n sono gli elementi. La primitiva e le permutazioni che hanno un numero pari di spostamenti si dicono di **1ª classe** (o di *classe pari*); le altre di **2ª classe** (o di *classe dispari*). Di n elementi $n!:2$ permutazioni sono di 1ª classe ed altrettante di 2ª classe. Ad ogni scambio (Cap. XV § 1) di 2 elementi cambia la classe.

2. — **Disposizioni semplici** di m oggetti ad n ad n ($n \leq m$) sono i gruppi che si possono formare prendendo n degli oggetti dati, senza ripeterne alcuno, e considerando diversi quei gruppi che differiscono o per qualche oggetto o per il loro ordine. Il loro numero è $D_{m,n} = m(m-1) \cdot (m-n+1)$. Vale la formula di ricorrenza $D_{m,n} = (m-n+1) D_{m,n-1}$.

Disposizioni con ripetizioni sono i gruppi che si possono formare con le regole di dianzi, salvo a poter ripetere fino ad n volte uno stesso oggetto in uno stesso gruppo. Il loro numero è $D^{(r)}_{m,n} = m^n$; vale la formula ricorrente $D^{(r)}_{m,n} = m D^{(r)}_{m,n-1}$.

3. — **Combinazioni semplici** di m oggetti ad n ad n ($n < m$) sono i gruppi che si possono formare prendendo n degli oggetti dati senza ripeterne alcuno e ritenendo diversi due gruppi solo se differiscono per qualche oggetto. Il loro numero è $C_{m,n} = \frac{m(m-1) \cdot (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$.

La frazione del secondo membro si rappresenta con $\binom{m}{n}$; si ha $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ e per il principio di Hankel $\binom{m}{0} = 1$; si ha ancora $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! (m-n)!}$; $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$; $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1}$; $\binom{m+m'}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} \binom{m'}{1} + \binom{m}{n-2} \binom{m'}{2} + \dots + \binom{m'}{n}$; $\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2$.

Combinazioni con ripetizione di m oggetti ad n ad n si dicono i gruppi che contengono n oggetti scelti fra gli m , ciascun oggetto potendo essere ripetuto nello stesso gruppo fino ad n volte e ritenendo disuguali due gruppi quando diversificano per qualche oggetto o per il numero di volte che uno è ripe-

tuto. Il loro numero si rappresenta con $C^{(r)}_{m,n}$. Vale la formula ricorrente. $\frac{n C^{(r)}_{m,n}}{m} = \frac{(n-1) C^{(r)}_{m,n-1}}{m} + C^{(r)}_{m,n-1}$ da cui

$$C^{(r)}_{m,n} = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)m}{n!} = C_{m+n-1,n}.$$

4. — **Triangolo di Tartaglia** è lo specchio che contiene all'incrocio della linea $(m+1)$ -esima e della colonna $(n+1)$ -esima il numero $C_{m,n}$.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
1	7	21	35	35	21	7
.	.	.	.	.	.	.

Ciascun elemento del triangolo è la somma dell'immediatamente superiore col superiore di sinistra. La somma degli elementi di una colonna fino ad un dato posto è data dall'elemento della colonna e linea successiva a quella dell'ultimo addendo. Le dimostrazioni di queste proprietà sono contenute nelle formule del § 3.

Numeri triangolari diconsi i numeri della 3^a colonna: sono le successive somme dei numeri naturali: la denominazione deriva dal fatto che essi rappresentano il numero dei punti con cui sono formati i triangoli qui indicati i quali hanno per ogni lato 1, 2, 3... punti.

Numeri piramidali diconsi i numeri della 4^a colonna: sono le somme successive dei triangolari: la ragione della denominazione è analoga; sovrapponendo ad es. i quattro triangoli segnati sopra si ha una piramide nella quale in ciascuno spigolo sono 4 punti: il numero dei punti impiegato è il 4° numero piramidale.

Numeri figurati d'ordine $k-1$ sono i numeri della colonna k . La somma dei primi m di questi numeri è l' m -esimo numero figurato d'ordine superiore.

5. — **Potenza del binomio** (*formula del Newton*) $(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \cdots + \binom{m}{m-1} a b^{m-1} +$

$$+ b^m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} a^{m-r} b^r; (a-b)^m = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} a^{m-r} b^r.$$

Si deduce $2^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m}$;
 $0 = \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} + (-1)^m \binom{m}{m}$.
 $\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \dots = \binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \dots = 2^{m-1}$.

Potenza del polinomio (formula di *Leibnitz*) $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p)^m = \sum \frac{m!}{a_1! a_2! \dots a_p!} a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_p^{a_p}$ estesa la Σ a tutte le combinazioni di numeri interi $a_1 a_2 \dots a_p$ (positivi o nulli) per cui $a_1 + a_2 + \dots + a_p = m$. Il numero dei termini dissimili è $\binom{p+m-1}{m}$.

Somma delle potenze simili di numeri in progressione aritmetica. Se a_1 è il 1° termine di una progressione aritmetica di ragione d , e se S_k indica la somma delle potenze k -esime dei primi m numeri della progressione, si ha la formula:

$$(a_1 + m d)^{p+1} = a_1^{p+1} + \binom{p+1}{1} S_p d + \binom{p+1}{2} S_{p-1} d^2 + \dots + \binom{p+1}{p} S_1 d^p + m d^{p+1}; S_1 = m [2 a_1 + (m-1) d]: 2 = m(a_1 + a_m):2; S_2 = [6 a_1^2 m + 6 a_1 d m (m-1) + m(m-1)(2m-1) d^2]:6.$$

Facendo $a_1 = 1, d = 1$ si ha la formula $\binom{k+1}{1} s_k + \binom{k+1}{2} s_{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k} s_1 + s_0 = (m+1)^{k+1} - 1$ che dà le somme delle potenze simili dei numeri naturali fino ad m . In particolare $s_0 = m$; $s_1 = m(m+1):2$; $s_2 = m(m+1)(2m+1):6$; $s_3 = m^2(m+1)^2:4$; $s_4 = m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1):30$.

Probabilità

Probabilità matematica di un avvenimento è il rapporto del numero dei casi favorevoli a quello dei casi possibili. Un avvenimento si verifica in eventualità che diconsi *casi favorevoli*, non si verifica in eventualità che diconsi *casi contrari*: la somma dei casi favorevoli e contrari è il numero dei *casi possibili*. Ad es. la probabilità che estraendo da un'urna contenente m palle numerate, p palle ($p \leq m$) ve ne siano r ($r \leq p$) prefissate è $\binom{m-r}{p-r}$; $\binom{m}{p} = D_{p,r} : D_{m,r}$. *Probabile* si dice l'avvenimento atteso se la probabilità è $> 1:2$, *improbabile* se $< 1:2$, *dubbio* se $= 1:2$, *certo* se $= 1$, *impossibile* se $= 0$.

Probabilità totale. Se sono possibili n casi dei quali m_1 corrispondono ad una prima aspettativa, m_2 ad una seconda, $\dots m_r$ ad una r -esima per modo che se è soddisfatta l'una aspettativa rimangano necessariamente insoddisfatte le altre, la probabilità che venga ottemperato ad una qualunque delle aspettative è $(m_1 + m_2 + \dots + m_r) : n$, cioè la somma delle r probabilità relative alle singole aspettative.

Probabilità composta. Se sopra un avvenimento sono possibili due ipotesi A, B l'una indipendente dall'altra e $m : p, m' : p'$, sono le probabilità rispettive, la probabilità che gli eventi A e B si presentino insieme è il prodotto di quelle, cioè $mm' : pp'$. Se le ipotesi A e B non sono indipendenti, la probabilità che si avverino insieme è il prodotto della probabilità relativa ad A moltiplicata per la probabilità relativa a B , quando si è avverata la A .

Probabilità negli esperimenti ripetuti. Se, eseguendo un dato esperimento, si presentano come possibili più avvenimenti che si escludono ma di cui uno deve necessariamente avvenire, l'uno A_1 di probabilità p_1 , un secondo A_2 di probabilità $p_2, \dots$ un r -esimo A_r di probabilità p_r , la probabilità che eseguendo m volte l'esperimento si presentino a_1 volte A_1 , a_2 volte $A_2, \dots a_r$ volte A_r , indipendentemente dall'ordine, ed essendo $a_1 + a_2 + \dots + a_r = m$ è $\frac{m!}{a_1! a_2! \dots a_r!} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$. In particolare se è solo possibile l'avvenimento A o il suo contrario, e p è la probabilità di A , ripetendo m volte l'esperimento la probabilità che a volte e non più si presenti l'avvenimento A è $\binom{m}{a} p^a (1-p)^{m-a}$.

Aspettativa matematica in un gioco dicesi il prodotto della somma che si può guadagnare per la probabilità di vincere. *Equo* si dice un gioco se le poste dei giocatori sono uguali alle loro aspettative matematiche.

CAPITOLO XV.

Sostituzioni

1. — **Sostituzione** è l'operazione per cui si passa da una permutazione ad un'altra. La sostituzione che dalla permutazione 1 2 3 4 5 6 7 fa passare a 7 3 1 4 6 5 2 si indica con $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

La prima permutazione dicesi **numeratore**, la seconda **denominatore**. Se nel numeratore e denominatore ad uno stesso posto si trovano gli stessi elementi si possono sopprimere; si scriverà dunque indifferentemente $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Se il nu-

meratore è uguale al denominatore la sostituzione dicesi **identica**, o **sostituzione unità**.

Scambio (o **trasposizione**) è la sostituzione in cui numeratore e denominatore differiscono per il posto di due soli oggetti. Ogni sostituzione si può eseguire in più modi con un numero finito di scambi, del quale numero è *determinata la parità*.

Sostituzione circolare o ciclica è la sostituzione per la quale l'ultimo oggetto (o il primo) è portato al primo posto (o all'ultimo) e ciascuno degli altri un posto innanzi (o indietro). Una sostituzione circolare sopra r elementi si può effettuare mediante $r - 1$ scambi e non meno. Ogni sostituzione si può eseguire mediante un numero finito di sostituzioni circolari.

Prodotto di due sostituzioni è l'operazione che consiste nell'eseguire le due sostituzioni l'una dopo l'altra. Se si eseguisce prima la sostituzione S , poi la T , si dice che si è fatto il prodotto TS . In generale non è $TS = ST$. Si dicono **permutabili** due sostituzioni se $TS = ST$. Se dopo di aver fatto la sostituzione S e sul risultato la T , sul nuovo risultato si eseguisce la sostituzione U si dice che si è fatto il prodotto delle tre sostituzioni che si indica con il simbolo UTS . È $U(TS) = (UT)S$ (legge *associativa*). In luogo di scrivere SS , si scrive S^2 ; in luogo di SSS si scrive S^3 ecc. È $S^p S^q = S^{p+q}$. Esiste sempre un esponente μ per cui S^μ coincide con la sostituzione identica, ossia $S^\mu = 1$.

Ordine di una sostituzione. Se k è il più piccolo numero per cui $S^k = 1$ si dice che la sostituzione S appartiene all'esponente k o che è *di ordine* k ; è $S^{mk} = 1$ per qualunque m ; $S^\lambda = S^\mu$ per $\lambda \equiv \mu \pmod{k}$, da ciò è $S^0 = 1$. La sostituzione S^{-r} è definita da $S^{-r} S^r = 1$. Se S è una sostituzione circolare su n elementi è di ordine n . Sia la sostituzione S il prodotto delle sostituzioni circolari $S_1, S_2, \dots, S_m$ degli ordini $r_1, r_2, \dots, r_m$; allora l'ordine di S è il minimo comune multiplo di $r_1, r_2, \dots, r_m$.

2. — **Gruppo di sostituzioni** dicesi un complesso di sostituzioni che combinate mediante prodotto riproducano una sostituzione dello stesso complesso: il numero delle sostituzioni distinte che compongono un gruppo si dice **ordine** del gruppo. Le sostituzioni di 1^a classe formano un gruppo che dicesi **alternante**. Tutte le potenze di una sostituzione S formano un gruppo.

Sottogruppo. Se tutte le sostituzioni di un gruppo G' appartengono alle sostituzioni di un altro gruppo G , si dice che G' è un **sottogruppo** di G ; l'ordine di G' è un divisore dell'ordine di G (*teor. di Lagrange*). Di un gruppo di sostituzioni operanti su n elementi l'ordine è sempre divisore di $n!$. Se un gruppo contiene una permutazione di classe dispari, ha un ordine pari. Le sostituzioni comuni a due gruppi formano un gruppo che è perciò sottogruppo di entrambi i dati.

Transitivo si dice un gruppo di sostituzioni su n lettere $a_1 \dots a_n$ se contieno sostituzioni che fanno andare al posto di ogni lettera rispettivamente ciascuna delle rimanenti lettere. La sostituz. circolare è transitiva.

k volte transitivo è un gruppo di sostituzioni se, mediante esse, k lettere comunque scelte si cambiano in k altre lettere comunque scelte. L'ordine di un gruppo k volte transitivo fra n lettere è divisibile per $n(n-1) \dots (n-k+1)$.

Intransitivo si dice un gruppo non transitivo.

Primitivo è un gruppo transitivo G se non è possibile distribuire le n lettere su cui si opera in sistemi $A, B, C, \dots$ tali che ogni sostituzione di G trasformi tutte le lettere di un sistema in tutte le lettere di uno stesso sistema diverso od uguale al precedente.

Imprimitivo è un gruppo in cui tale distribuzione è possibile.

Determinanti

1. — **Matrice** dicesi uno specchio di $m\ n$ numeri disposti in m linee ed n colonne. Indicando l'elemento della linea r -esima e colonna s -esima con a_{rs} (r si dice primo indice, s secondo indice) la matrice si indica con

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & & & \end{array} \quad \text{oppure con } |a_{hk}| \begin{pmatrix} h = 1, 2, \dots n \\ k = 1, 2, \dots m \end{pmatrix}$$

Se $m = n$ la matrice dicesi **quadrata**, n l'**ordine** della matrice.

Determinante è il polinomio somma di tutti i prodotti di n elementi presi da una matrice di ordine n in guisa che ciascun prodotto contenga uno ed un sol termine di ciascuna linea e di ciascuna colonna, i prodotti essendo preceduti del segno $+$ o dal segno $-$, secondo che le due permutazioni dei primi e dei secondi indici sono o no della stessa classe. Esso si rappresenta scrivendo la matrice nel 1° modo e racchiudendola fra due linee verticali; n è l'**ordine** del determinante: ogni prodotto dicesi **termine** del determinante, il numero dei termini è $n!$; gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ si dicono gli **elementi principali**, la diagonale che li contiene dicesi **diagonale principale**; l'altra diagonale che contiene gli elementi $a_{1,n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n,1}$ dicesi **diagonale secondaria** (o *seconda diagonale*).

Il determinante può essere definito come il polinomio degli $n!$ termini che si deducono da $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$ tenendo fissi i primi (o secondi) indici e facendo tutte le permuta-

zioni sui secondi (o primi) indici e dando il segno $+$ o $-$ a seconda che la permutazione dei secondi (o primi) è di prima o di seconda classe. Talora simbolicamente si scrive

$$D = \sum \pm a_{1, \lambda_1} a_{2, \lambda_2} \dots a_{n, \lambda_n}.$$

Determinanti minori contenuti in una matrice di m linee ed n colonne, diconsi i determinanti formati con gli elementi comuni a k linee e k colonne, k essendo minore o al più uguale al minore dei numeri m, n .

Caratteristica o rango di una matrice dicesi il numero r tale che nella matrice vi sia almeno un determinante di ordine r non nullo, mentre tutti quelli di ordine $r - 1$ sono nulli.

Una matrice B si dice **derivata** da una matrice A quando si ottenga da essa mediante un numero finito delle seguenti operazioni: 1° aggiungere o sopprimere una linea di elementi nulli; 2° scambiare due linee o colonne; 3° moltiplicare gli elementi di una linea (o colonna) per un numero diverso da zero; 4° aggiungere ad una linea (o colonna) un'altra linea (o colonna). Due matrici derivate l'una dall'altra hanno la stessa caratteristica.

Minori di un determinante. In un determinante d'ordine n sopprimendo m qualsivogliano linee ed m colonne si ha un *minore* d'ordine $n - m$ (detto anche *sottodeterminante*, *suddeterminante*, *determinante parziale*, *determinante derivato*): vi sono $(C_{m, n})^2$ minori d'ordine $n - m$.

Minore principale (o minore diagonale) dicesi il minore che ha per diagonale principale elementi appartenenti alla diagonale principale del determinante dato. Un minore è di *classe pari* o *dispari* a seconda che è pari o dispari la somma dei numeri d'ordine corrispondenti alle linee e alle colonne che le formano. (Es. in un deter. di 4° ordine il minore d'ordine

2, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$ è di classe dispari poichè è formato con le colonne 1, 3 e le linee 1, 4 ed è $1 + 3 + 1 + 4 = 9$).

Minore complementare di un minore di ordine $n - m$ è il determinante d'ordine m che si ottiene da D sopprimendo le

$n - m$ linee e le $n - m$ colonne con cui è formato il minore d'ordine $n - m$. Le classi di due minori complementari sono entrambe pari o entrambi dispari.

Complemento algebrico (o *aggiunto*) di un dato minore è il minore complementare preceduto dal segno $+$ o $-$ a seconda che è di classe pari o dispari.

Complemento algebrico (o **elemento reciproco** o senz'altro, **reciproco**) di un elemento a_{rs} (minore d'ordine 1) dicesi, in particolare, il determinante che si ottiene sopprimendo la linea r -esima e la colonna s -esima, moltiplicato per $(-1)^{r+s}$: si indica di solito con A_{rs} .

2. — **Proprietà dei determinanti.** *a)* Ogni proposizione dimostrata per le linee vale per le colonne. *b)* Un determinante non muta di valore se si cambiano le linee in colonne. *c)* Se in un determinante si eseguisce uno scambio fra due linee (o colonne) il determinante cambia di segno e non di valore assoluto. *d)* Si moltiplica o si divide un determinante moltiplicando o dividendo gli elementi di una qualsivoglia linea o colonna. *e)* Se tutti gli elementi di un determinante sono divisibili per p , il determ. è divisibile per p^n : se tutti i minori di 2° ordine sono divisibili per p (senza che lo siano gli elementi) il determinante è divisibile per p^{n-1} . *f)* Se in un determ. gli elementi di due linee sono uguali o proporzionali, il determ. è nullo. *g)* Se gli elementi di una linea sono combinazioni lineari simili degli elementi di due linee (*), il determ. è nullo. *h)* Se tutti gli elementi di una linea sono nulli all'infuori di uno, il determ. è uguale a questo termine moltiplicato pel suo complemento algebrico. *i)* Indicando con D il determ. è $a_{r_1} A_{s_1} + a_{r_2} A_{s_2} + \dots + a_{r_n} A_{s_n} = 0$, se $r \neq s$, $= D$, se $r = s$. *l)* (*Teor. di Laplace*). Un determ. è uguale alla somma dei prodotti dei minori contenuti in m qualsivogliano linee per i

(*) Si dice combinazione lineare di $a_1 a_2 \dots a_r$, l'espressione $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_r a_r$: due combinazioni $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_r a_r$ e $c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_r b_r$ si dicono combinazioni simili di $a_1 a_2 \dots a_r$; $b_1, b_2, \dots, b_r$.

loro complementi algebrici. *m*) Il prodotto dei minori di ordine m contenuti in m qualsivogliano linee per i complementi algebrici dei minori contenuti in m linee non coincidenti (in parte od in tutto) con le precedenti è nullo. *n*) Se tutti gli elementi da una parte della diagonale principale sono nulli, $D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$. *o*) Se tutti gli elementi da una parte della diagonale secondaria sono nulli, $D = (-1)^{n(n-1):2} a_{n,1} a_{n-1,2} \cdots a_{1,n}$. *p*) Un determinante d'ordine n si può far divenire d'ordine $n + 1$ aggiungendo una prima linea in cui il primo elemento sia 1 e gli altri nulli e mettendo nella prima colonna, al di sotto dell'1 aggiunto, n numeri qualunque; ne segue che si può trasformare in un determ. eguale d'ordine $m > n$. *q*) Se gli elementi della colonna r -esima di un determ. sono polinomi di p termini il determ. è uguale alla somma di p determ. i quali hanno tutte le colonne uguali al dato tranne la r -esima che è sostituita successivamente dagli addendi di 1° , di $2^\circ \dots$ di p -esimo posto. *r*) In un determ. si può aggiungere agli elementi di una linea gli elementi di un'altra linea moltiplicati per uno stesso numero scelto ad arbitrio. *s*) Se un deter. è nullo, i complementi algebrici degli elementi di una linea sono proporzionali a quelli degli elementi di una qualunque altra linea.

Determinante reciproco di D è il determ. Δ formato coi reciproci degli elementi di D . È: $\Delta = D^{n-1}$ (in particolare per $n = 2$, $\Delta = D$). In Δ ogni minore di 2° ordine è uguale al complemento algebrico del minore corrispondente di D moltiplicato per D . Se $D = 0$ è $\Delta = 0$ e nulli sono i minori di Δ fino a quelli del 2° ordine inclusi.

Simmetrico dicesi un determinante se $a_{sr} = a_{rs}$, **gobbo** se $a_{rs} = -a_{sr}$; **emisimmetrico** dicesi un determinante gobbo in cui $a_{rr} = 0$. Chiamando coniugati a_{rs} e a_{sr} , si ha: in un determ. simmetrico i minori complementari di due elementi coniugati sono uguali; in un emisimmetrico l'uno è uguale all'altro moltiplicato per $(-1)^n$; il reciproco di un determ. simmetrico è simmetrico; il reciproco di un deter. emisimmetrico è simmetrico o emisimmetrico secondo che n è pari o dispari. Un de-

term. emisimmetrico di ordine dispari è nullo. In un deter. simmetrico se è nulla la somma dei suoi minori principali, sono nulli tutti i minori di ordine $n - 1$.

3. — **Calcolo di un determinante di 3° ordine.** 1) Si scrivano parallelamente al determ. e a destra le prime due colonne: i prodotti degli elementi delle diagonalì che dall'alto in basso, vanno da sinistra a destra, si prendono col segno che hanno, i prodotti degli elementi delle diagonalì che da destra vanno a sinistra si prendono col segno contrario a quello che hanno e si sommano i 6 prodotti.

2) **Regola di Sarrus.** Si prendano col proprio segno il prodotto degli elem. della diagonale principale ed i prodotti delle due terne di elem. che sono vertici di 2 triangoli col lato minore parallelo a detta diagonale, si prendano con il segno contrario il prodotto degli elem. della seconda diagonale ed i prodotti delle terne di elementi che sono vertici dei 2 triangoli i cui lati minori sono paralleli alla seconda diagonale.

4. — **Determinante delle differenze (di Cauchy o di Vandermonde)** è il determ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{r=1}^{n-1} (a_r - a_{r+1}) \times \dots \times (a_r - a_n).$$

Il determ. di ordine n in cui la linea r -esima è $\sin x_r$, $\sin 2x_r, \dots$ $\sin nx_r$ è uguale al prodotto di $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{r=1}^n \sin x_r$ per il determ. di Vandermonde in cui $a_r = \cos x_r$ ($r = 1, 2, \dots, n$). Il determ. di n -esimo ordine in cui la linea r -esima è $1, \cos x_r, \cos 2x_r, \dots, \cos(n-1)x_r$ è uguale al prodotto di $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ per il determ. di Vandermonde in cui $a_r = \cos x_r$ ($r = 1, 2, \dots, n$).

$$\begin{aligned} \text{Si ha } & \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \sin \gamma \cos \gamma \end{vmatrix} = \\ & = \sin(\beta - \gamma) \sin(\gamma - \alpha) \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Determinante circolante è un determ. in cui ciascuna linea si ottiene della precedente con una sostituzione circolare. Il circolante di 4° ordine di cui la prima linea è a, b, c, d è uguale ad $(a + b + c + d)(a + b - c - d)(a - b + c - d)(a - b - c + d)$. Il polimONIO $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ si può mettere sotto la forma del determ.

Il determ.	$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$	
Il determ.	$\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2m+1!} & \frac{1}{2m!} & \frac{1}{2m-1!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$	vale $\frac{B_{2n}}{2m!}$ ove B_{2m} è l' m.º nume- ro Bernoul- liano (Cap. XLIV §6, b)
Il determ.	$\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2m!} & \frac{1}{2m-2!} & \frac{1}{2m-4!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$	vale $\frac{E_{2m}}{2m!}$ ove E_{2m} è l' m.º nume- ro Euleria- no (Capitolo XLIV §6, e)

5. — **Moltiplicazione delle matrici.** Date le due matrici

$\left| a_{hk} \right| \begin{pmatrix} h=1, 2, \dots, n \\ k=1, 2, \dots, m \end{pmatrix} \left| b_{hk} \right| \begin{pmatrix} h=1, 2, \dots, n \\ k=1, 2, \dots, m \end{pmatrix}$, si dice pro-
dotto delle due matrici la matrice in cui l' elemento c_{rs} è dato
da $c_{rs} = a_{r1} b_{s1} + a_{r2} b_{s2} + \dots + a_{rn} b_{sn}$. La matrice pro-
dotto è quadra; un suo minore di ordine r è un aggregato
lineare omogeneo dei minori d'ordine r dell'una e dell'altra
matrice; la caratteristica non supera le caratteristiche delle

due matrici date. a) se $m = n$ le due matrici danno luogo a due determ.; siano A e B i loro valori e sia C quello del determ. cui dà luogo la matrice prodotto: si ha (**teor. di Binet**) $A.B = C$. Il quadrato di un determ. è un determ. simmetrico. b) se $m > n$ la matrice prodotto dà luogo a un determ. nullo. c) se $m < n$ il determ. della matrice prodotto è uguale alla somma dei prodotti binati di tutti i minori corrispondenti d'ordine m (cioè formati con le colonne di uguale posto nelle due matrici). Ad esempio il quadrato della matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \text{ è } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}^2.$$

Il determinante che nasce dalla moltiplicazione di due matrici simili di m linee ed n colonne si può rappresentare mediante un determ. di ordine $m + n$ il quale ha nelle prime m linee le linee della prima matrice completate con m zeri ciascuna; le rimanenti n linee contengono agli ultimi m posti gli elementi delle n colonne della seconda matrice, ai primi n posti gli elementi di un determ. d'ordine n ad elementi nulli tranne quelli della diagonale principale che sono uguali a -1 . Ad es. il quadrato della matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \text{ è il determ. del } 5^{\circ} \text{ ordine}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a & a' \\ 0 & -1 & 0 & b & b' \\ 0 & 0 & -1 & c & c' \end{vmatrix}$$

6. — **Determinante ortogonale** dicesi quel determ. in cui

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{ni}^2 = 1,$$

$$a_{1i} a_{1j} + a_{2i} a_{2j} + \dots + a_{ni} a_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

Il quadrato di un determ. ortogonale è uguale ad 1; esso è quindi ± 1 . Il compl. algebrico di un elemento è uguale all'elemento stesso moltiplicato per il determ. Ogni minore è uguale al suo compl. algebrico moltiplicato per il determ. Il prodotto di due determ. ortogonali è un determ. ortogonale.

(Vedi: sostituzioni lineari, Cap. XXVIII; trasformazioni delle coordinate, Cap. I, § 4, 11).

Wronskiano, Jacobiano, Hessiano vedi Cap. XXVIII, XXXVI, XXXVII, XLIII.

CAPITOLO XVII.

Sistemi di equazioni lineari

1. — **Equazione lineare** è quella che contiene le incognite al 1° grado; **omogenea** se ogni termine contiene un'incognita; **non omogenea** se v'ha un termine indipendente dalle incognite, o, come dicesi, un *termine noto*.

Sistema normale dicesi un sistema di n equaz. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = k_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) fra le n incognite $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ quando il deter. dei coefficienti

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Regola di Cramer per la risoluzione di detto sistema: ogni incognita x_r è dato da un quoziente che ha a denominatore il determ. D e a numeratore lo stesso determ. in cui alla colonna dei coefficienti di x_r sono sostituiti i termini noti. Cioè:

$$x_r = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r-1} & k_1 & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr-1} & k_n & a_{nr+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

2. — **Sistema generale di m equaz. lineari omogenee ad n incognite**. Ogni sistema di equaz. lineari omogenee è soddisfatto dai valori tutti nulli delle incognite; di un tale sistema di soluzioni non si tien conto: quando si dice che un siffatto sistema è *possibile* si intende che esiste un sistema di n numeri

non tutti nulli che lo soddisfano. Se n numeri soddisfano al sistema soddisfano tutti i sistemi di numeri proporzionali; il sistema di soluzioni non è dunque unico: si dice che il sistema di equaz. è indeterminato.

Teor. di Rouché. Si determini la caratteristica della matrice dei coefficienti (Cap. XVI § 1) e sia r : si permutino tra loro le equazioni e si alteri l'ordine delle incognite in tutte le equazioni per modo che il determinante dei coefficienti delle prime r incognite nelle prime r equazioni sia diverso da zero. Alle rimanenti $n-r$ incognite si possono dare valori ad arbitrio; dalle prime r equazioni si ricavano per le prime r incognite valori determinati che insieme agli $n-r$ arbitrari già assegnati, soddisfano al sistema.

Reciprocamente: se in un sistema di m equaz. lineari ad n incognite, attribuendo ad $n-r$ incognite valori arbitrari è sempre possibile determinare in modo unico un sistema di valori per le rimanenti r incognite che insieme ai primi soddisfano al sistema, la caratteristica del determ. dei coefficienti è r .

Grado di indeterminazione è il numero $n-r$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè si possano dare alle incognite $x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_p}$ ($p \leq n-r$) valori arbitrari è che sopprimendo nella matrice dei coefficienti le colonne di posto $a_1, a_2, \dots, a_p$ la caratteristica resti immutata.

Casi particolari. a) Se $m < n$ il sistema è sempre possibile.

b) **Sistema di $n-1$ equaz. ad n incognite:** il grado di indeterminazione è almeno 1. Se è effettivamente 1, i valori delle n incognite sono proporzionali ai minori della matrice dei coefficienti che si ottengono sopprimendo ordinatamente la 1^a, 2^a, ... colonna e prendendoli coi segni alternati.

c) **Sistema di n equaz. ad n incognite.** Condizione di possibilità è che il determ. dei coefficienti sia nullo. Il grado di indeterminazione è almeno 1. Se la caratteristica è $n-1$ si dà ad una incognita un valore arbitrario per modo però che il determ. dei coefficienti delle $n-1$ rimanenti incognite in $n-1$ equaz. sia diverso da zero. Da queste $n-1$ equaz. con la re-

gola di Cramer si trovano i valori per le $n-1$ incognite. Ogni sistema di valori proporzionali agli n così trovati soddisfano al sistema.

Soluzioni fondamentali. Se (1) $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) \dots (x_1^{(h)}, x_2^{(h)}, \dots, x_n^{(h)})$ sono h soluzioni(*) del sistema di m equaz. lineari omogenee ad n incognite $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) gli n numeri $x_k = c_1x_k^{(1)} + c_2x_k^{(2)} + \dots + c_hx_k^{(h)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) sono ancora soluzioni del sistema. I numeri x_k si dicono *combinazioni lineari* omogenee dei numeri $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(h)}$.

Linearmente indipendenti si dicono le h soluzioni (1) se non esistono numeri $c_1, c_2, \dots, c_h$ non tutti nulli per cui sia $c_1x_k^{(1)} + c_2x_k^{(2)} + \dots + c_hx_k^{(h)} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Nel caso contrario si dicono **linearmente dipendenti**.

Condizione necessaria e sufficiente acciò che le h soluzioni (1) siano linearmente indipendenti è che sia h la caratteristica della matrice le cui h linee sono $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, h$).

Se $n-r$ è il grado di indeterminazione del sistema esistono $n-r$ soluzioni indipendenti e non un numero maggiore; ogni altra soluzione è una combinazione lineare di quelle.

Soluzioni fondamentali si dicono le $n-r$ soluzioni dianzi definite. Da un sistema di $n-r$ soluzioni fondamentali $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ ($i = 1, 2, \dots, n-r$) si deduce un altro sistema di soluzioni fondamentali prendendo $x_k^{(p)} = \sum_{i=1}^{n-r} c_{pi}x_k^{(i)}$ ($k, p = 1, 2, \dots, n-r$) ove i coeffic. c_{pi} sono arbitrari purchè sia diverso da zero il determ. di ordine $n-r$ di cui la linea p -esima è $c_{p,1}c_{p,2} \dots c_{p,n-r}$ ($p = 1, 2, \dots, n-r$).

3. — Sistemi di equazioni lineari non omogenee.

Teor. di Capelli. Per il sistema di m equaz. lineari non

(*) Diciamo *soluzione* un gruppo di n numeri che soddisfano il sistema.

omogenee fra le n incognite $x_1, x_2 \dots x_n$, $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = k_n$ ($i = 1, 2 \dots m$) la condizione di possibilità è che la caratteristica della matrice dei coeffic. e quella dei coefficienti e termini noti sia uguale. In altre parole se r è la caratteristica della matrice dei coeffic. deve essere nullo ogni determinante di ordine $r + 1$ ottenuto da un determ. di ordine $r + 1$ della matrice dei coeffic. sostituendo ad una colonna la corrispondente dei termini noti.

Se $r = n$ il sistema ha una sola soluzione: se $r < n$, si può supporre che nelle prime r equaz. le prime r incognite abbiano coeffic. il cui determ. sia $\neq 0$; attribuite alle rimanenti $n - r$ incognite valori ad arbitrio, si determinino con la regola di Cramer i valori per le prime r incognite: questi valori, con gli $n - r$ già assegnati soddisfano al sistema.

Il grado di indeterminazione è $n - r$.

Casi particolari: a) sia $m = n + 1$ e la caratteristica della matrice dei coeffic. sia n : allora condizione necessaria e sufficiente per la possibilità del sistema è che il determ. d'ordine $n + 1$ formato con i coefficienti ed i termini noti sia nullo. I valori delle incognite si ottengono risolvendo con la regola di Cramer uno dei sistemi normali di n equaz. (che certo esiste, perchè n è la caratteristica) che si ottengono sopprimendo una equazione. b) Sia $m = n$ e la caratteristica sia n ; il sistema è normale (v. § 1) c) Sia $m = n$ e la caratteristica sia $r < n$: bisognerà che i determinanti di ordine $r + 1$ formati con una colonna di termini noti siano nulli. Se $r = n - 1$ ed uno dei numeratori che compaiono nell'applicazione della regola di Cramer è $\neq 0$, il sistema è impossibile.

4. — **Forme lineari.** Un polinomio di 1° grado omogeneo in $x_1, x_2 \dots x_n$ dicesi *forma lineare nelle n variabili*.

Linearmente dipendenti si dicono m forme lineari $U_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$ ($i = 1, 2 \dots m$) se esistono m numeri $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ non tutti nulli per cui si ha identicamente $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_m U_m = 0$: nel caso contrario si dicono *linearmente indipendenti*.

Matrice delle m forme U_i è la matrice $A \equiv |a_{ik}| \begin{pmatrix} i=1, 2 \dots m \\ k=1, 2 \dots n \end{pmatrix}$

La caratteristica r della matrice dà il numero delle forme U_i linearmente indipendenti: se queste sono $U_1, U_2 \dots U_r$ le rimanenti sono combinazioni lineari delle r ; $r+1$ forme sono linearmente dipendenti; $n+1$ forme lineari in n variabili sono sempre linearmente dipendenti. Condizione necessaria e sufficiente acciò che $U_{a_1}, U_{a_2} \dots$ siano combinazioni lineari delle residue è che la matrice A conservi la stessa caratteristica dopo la soppressione delle linee $a_1, a_2 \dots$

CAPITOLO XVIII.

I numeri reali e la corrispondenza fra essi e i segmenti

1. -- **Successione** dicesi un insieme di numeri coordinati alla successione dei numeri naturali: si rappresentano i suoi elementi con una stessa lettera affetta dagli indici $1, 2, 3, \dots$

Coppia di successioni convergenti sono 2 successioni

$$(1) \begin{cases} a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots \\ b_1, b_2, b_3, \dots b_n, \dots \end{cases}$$

tali che la prima sia *non decrescente* (cioè $a_{n+1} \geq a_n$), la seconda *non crescente* (cioè $b_{n+1} \leq b_n$), ogni elemento della prima $<$ degli elementi della seconda, e preso un ε positivo arbitrariamente piccolo, sempre vi sia una coppia di numeri a_n, b_n per cui $b_n - a_n < \varepsilon$. Rappresenteremo la coppia di successioni (1) per brevità con (a_n, b_n) .

Classi contigue diconsi 2 classi A e B di numeri, se ogni numero di A è $<$ di ogni numero di B e se prefissato un numero ε positivo piccolo a piacere, v' ha sempre un numero a di A ed uno b di B pei quali $b - a < \varepsilon$. Da 2 classi contigue si può sempre estrarre una coppia di successioni convergenti.

Sezione nell'insieme dei numeri razionali è la ripartizione dei numeri razionali in due classi A, A' in guisa che ogni numero razionale appartenga esclusivamente all'una o all'altra e che ogni numero di A sia $<$ di ogni numero di A' . Indicheremo la sezione con (A, A') ; A e A' *individuano* la sezione.

Ad ogni numero razionale p corrisponde una sezione; basta assegnare ad A tutti i numeri $<$ di p , ad A' i numeri $>$ di p ed assegnare ad arbitrio p ad A o ad A' ; assegnandolo ad A , (o ad A') p è il massimo di A (o il minimo di A') e la A' non ha minimo (o la A non ha massimo). Viceversa se (A, A') è una sezione e p è il massimo di A o il minimo di A' , alla sezione corrisponde il razionale p . Due classi A, A' che individuano una sezione sono contigue. Ogni coppia di successioni convergenti (1) di numeri razionali individua una sezione (A, A') : basta assegnare ad A ogni numero razionale $\leq$ ad un numero a_i , ad A' ogni razionale $\geq$ ad un b_i . Se v' ha un razionale c che non sia nè $\leq$ ad un a_i , nè $\geq$ ad un b_i esso è unico e si può assegnare ad arbitrio ad A o ad A' .

2. — Numeri irrazionali. Se alla sezione (A, A') fatta nell'insieme dei numeri razionali non corrisponde alcun numero razionale, si ammette (**postulato di Dedekind**) che corrisponda un **numero irrazionale** ed uno solo; questo numero, introdotto come ente di separazione delle classi A, A' si dirà $>$ dei numeri di A e $<$ dei numeri di A' .

Ogni coppia di successioni converg. (1) di numeri razionali, definendo una sezione, definisce un numero, razionale od irrazionale, $>$ di tutti i numeri a_i e $<$ di tutti i numeri b_i .

Reali si dicono i numeri razionali e gli irrazionali.

Eguaglianza e disuguaglianza fra numeri irrazionali. Eguali sono 2 numeri irrazionali α e β definiti rispettivam. dalle 2 sezioni $(A, A'), (B, B')$ se ogni numero appartenente ad A appartiene a B ed ogni numero appartenente ad A' appartiene a B' . Sarà $\alpha > \beta$ se v' ha un numero appartenente tanto ad A che a B' ; la stessa definizione vale se uno dei numeri α o β è razionale. Da una coppia di classi contigue non si possono

estrarre coppie di successioni converg. definienti numeri reali diversi: ne consegue che ad ogni coppia di classi contigue corrisponde un'unica sezione quindi un unico numero reale.

Numeri irrazionali con segno. Lo zero definisce la sezione (N, P) ove N è la classe dei razionali positivi e P quella dei negativi. Se alla sezione (A, A') corrisponde l'irrazionale α , esso è **positivo** se qualche numero di A è positivo, è **negativo** se qualche elemento di A' è negativo. Se di 2 classi contigue A, A' la prima comprende solo negativi e la seconda solo positivi esse definiscono lo zero. Se le due classi contigue A, A' definiscono un numero positivo, si possono in A trascurare tutti i negativi; analogamente se definiscono un negativo si possono trascurare in A' tutti i positivi.

3. — **Operazioni sui numeri reali.** a) **Addizione.** Se α è definito dalle classi contigue A, A' ; β dalle classi contigue B, B' ; se con $A + B$ s'intende la classe dei numeri ottenuti sommando un numero di A con un numero di B , le classi $A + B, A' + B'$ sono contigue; se α e β sono razionali si dimostra che $A + B, A' + B'$ definiscono $\alpha + \beta$, se uno od entrambi sono irrazionali, il numero definito da $(A + B, A' + B')$ si dice **somma** di α con β . L'addizione soddisfa alle leggi **commutativa** ($\alpha + \beta = \beta + \alpha$) ed **associativa** [$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$]. Lo zero è **modulo** dell'addizione.

Se α e β sono rispettivamente definiti dalle coppie di successioni converg. $(a_n, b_n), (c_n, d_n)$, $\alpha + \beta$ è definito dalla coppia di successioni converg. $(a_n + c_n, b_n + d_n)$.

b) **Sottrazione.** Se β è definito dalle 2 classi contigue B, B' , il numero $-\beta$ (contrario di β) è definito dalle 2 classi $-B, -B'$ intendendo che esse siano formate coi contrari dei numeri di B e B' rispettivamente; se β è definito dalla coppia di successioni (c_n, d_n) , $-\beta$ è definito dalla coppia $(-c_n, -d_n)$. Sottrazione di β da α è l'addizione di α con $-\beta$; il numero $\alpha - \beta$ è definito dunque delle 2 classi $A + (-B), A' + (-B')$. Se α e β sono definiti mediante le coppie di successioni converg. $(a_n, b_n), (c_n, d_n)$, il numero $\alpha - \beta$ è definito dalla coppia di successioni convergenti $(a_n - c_n, b_n - d_n)$.

c) **Moltiplicazione.** Se α e β sono >0 , si possono considerare definiti da 2 coppie di classi contigue $(A, A'), (B, B')$ ad elementi tutti >0 . Indichi AB la classe dei numeri che si ottengono moltiplicando ogni numero A per ogni numero di B , allora le due classi $AB, A'B'$ sono contigue; se α e β sono razionali definiscono il numero $\alpha\beta$; se uno od entrambi sono irrazionali si definisce prodotto di α per β il numero definito dalle 2 classi contigue $AB, A'B'$.

Se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$, detto β' il contrario di β definiamo prodotto di α per β il contrario di $\alpha\beta'$. Se α e β sono entrambi < 0 , α' e β' i loro contrari, definiamo prodotto di α per β il prodotto $\alpha'\beta'$. Se uno dei fattori è nullo, e solo se è nullo, il prodotto è lo zero. Valgono le leggi: **commutativa** $[\alpha\beta = \beta\alpha]$, **associativa** $[\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma]$, **distributiva** $[(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma]$. Se α e β sono definite dalle coppie di successioni converg. $(a_n, b_n), (c_n, d_n)$, il prodotto $\alpha\beta$ è definito dalla coppia di successioni pure convergenti $(a_n c_n, b_n d_n)$, ove si supporrà se α, β sono > 0 che a_1 e c_1 siano > 0 , e se negativi, b_1 e d_1 siano < 0 .

d) **Divisione.** Sia $\beta \neq 0$, definito dalle 2 classi contigue B, B' , in cui se $\beta > 0$ si può supporre i numeri di B tutti maggiori di $m > 0$, se $\beta < 0$, tutti i numeri di B' minori di $-m < 0$. Indichi B^{-1} la classe dei reciproci dei numeri di B ; allora le 2 classi B^{-1}, B'^{-1} sono contigue; se β è razionale definiscono $1:\beta$, se irrazionale si definisce *reciproco* di β il numero da esse definito. Se β è definito dalla coppia di successioni (c_n, d_n) è $1:\beta$ definito dalle coppie $(1:c_n, 1:d_n)$ supposto $c_1 > 0$ se $\beta > 0$, o $d_1 < 0$ se $\beta < 0$.

Quoziente di α per β è il prodotto di α per il reciproco di β . Se α e β sono definiti dalle due coppie di classi contigue A, A' e B, B' , il quoziente $\alpha:\beta$ è definito dalle due classi contigue $AB^{-1}, A'B'^{-1}$; se sono definiti dalle 2 coppie di successioni converg. $(a_n, b_n), (c_n, d_n)$, è $\alpha:\beta$ definito dalla coppia di successioni converg. $(a_n:c_n, b_n:d_n)$.

e) **Potenze di un numero reale.** Se m è intero > 0 e α è definito dalle classi contigue A, A' , α^m è il numero definito dalle

due classi contigue A^m, A'^m (classi che contengono le potenze m -esime dei numeri di A e di A' rispettivam.). Valgono le proprietà formali delle potenze: $a^m a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$ ed è $a^0 = 1$. Se a è definito dalle successioni converg. (a_n, b_n) , a^m è definito dalle due successioni converg. (a_n^m, b_n^m) .

Radice m -esima aritmetica di un numero reale positivo a è quel numero reale positivo ξ , che *sempre* esiste, per cui $\xi^m = a$. Si possono costruire ad es. 2 successioni di razionali $a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots$ soddisfacenti alle condizioni $b_i - a_i = 1 : 10^{i-1}$, $a_i^m < a < b_i^m$; o $\forall$ ha un numero a_h per cui $a_h^m = a$, ed allora $\xi = a_h$; o le 2 successioni contengono infiniti termini ed allora sono converg. e definiscono ξ .

Potenze ad esponente frazionario: a essendo un numero reale > 0 , si pone $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ ove il 2° membro è la radice aritmetica m -esima di a .

Se $0 < a < \beta$, h un numero razionale, $a^h < \beta^h$ se $h > 0$, $a^h > \beta^h$ se $h < 0$. Se h e k sono razionali e $h > k$, è $a^h > a^k$ se $a > 1$, $a^h < a^k$ se $0 < a < 1$. Se $a > 1$ si può prendere un intero n tanto grande per cui $a^n > M$, con M prefissato grande a piacere; se $0 < a < 1$ si può prendere un positivo n tanto grande che sia $a^n < \varepsilon$, con ε prefissato piccolo a piacere; se $a > 1$, si può prendere n positivo tanto grande che sia $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$, e se $0 < a < 1$ che sia $1 - a^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$, con ε prefissato piccolo a piacere.

Potenze ad esponente irrazionale. Se $a > 0$ è definito dalle successioni converg. (a_n, b_n) (ove $a_1 > 0$) e β è definito dalle success. converg. (c_n, d_n) , le 2 successioni $a_1^{c_1}, a_2^{c_2}, \dots; b_1^{d_1}, b_2^{d_2}, \dots$ sono convergenti e definiscono il numero a^β .

5. — **Sezione nell'insieme dei numeri reali** (o *nel campo reale*) è la ripartizione dei numeri reali in due classi A, A' in guisa che ogni numero reale appartenga esclusivamente all'una o all'altra e che ogni numero di A sia minore di ogni numero di A' . Ad ogni numero reale x corrisponde una sezione (A, A') ove in A sono i numeri reali $< x$, in A' i numeri reali $> x$,

ed assegnando x ad A o ad A' . Viceversa ad ogni sezione (A, A') nel campo reale corrisponde un numero reale x .

Due successioni converg. (§ 1) di numeri reali definiscono una sezione nel campo reale, e quindi un numero reale.

Relazioni fra i valori assoluti dei numeri reali e quelli dei risultati di operazioni su essi. Indicando con $|a|$ valore assoluto di a , si ha $|a + \beta| \leq |a| + |\beta|$; $|a - \beta| \geq ||a| - |\beta||$; $|a\beta| = |a| |\beta|$; $|a:\beta| = |a| : |\beta|$.

6. — Corrispondenza fra numeri reali e segmenti.

Postulato della continuità. Data sopra una retta una successione di segmenti $AB, A_1B_1, A_2B_2, \dots A_nB_n, \dots$ tali che ognuno sia contenuto nel precedente e che, prefissato un segmento ε piccolo a piacere, si possa trovare un segmento $A_nB_n < \varepsilon$, esiste un punto X ed uno solo interno a tutti i segmenti. In altra forma: Se sopra una retta i segmenti di origine comune in O , si ripartiscono in due classi $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ in guisa che ogni segmento OA di $\mathfrak{A}$ sia minore di ogni segmento OB di $\mathfrak{B}$, e preso un segmento ε piccolo a piacere si trovi sempre un segmento OA di $\mathfrak{A}$ ed un segmento OB di $\mathfrak{B}$ tali che la differenza $OB - OA$ sia $< \varepsilon$, esiste un segmento OX ed uno solo che o è $>$ di tutti i segmenti di $\mathfrak{A}$ e $<$ di tutti quelli di $\mathfrak{B}$, o, se appartiene ad $\mathfrak{A}$ (o a $\mathfrak{B}$) è $>$ di tutti gli altri segmenti di $\mathfrak{A}$ (o $<$ di tutti gli altri segmenti di $\mathfrak{B}$) ed è $<$ di tutti i segmenti di $\mathfrak{B}$ (o $>$ di tutti i segmenti di $\mathfrak{A}$).

Misura dei segmenti di una retta. Fissato un punto O (origine) sopra una retta ed un ulteriore punto U_1 , facciamo corrispondere al segmento OU_1 il numero 1, ad ogni segmento con origine in O ed estremo B dalla stessa banda di A , che sia la somma di n (n intero) segmenti uguali ad OU_1 , facciamo corrispondere il numero n , e al segmento OB' ove B' è simmetrico di B il numero $-n$. Se poi OB è uguale alla somma di k parti aliquote m -esime del segmento OU_1 , faremo corrispondere il numero $k:m$ o $-k:m$ a seconda che B è dalla banda di U_1 , o dall'opposta. Così ad ogni numero razionale corrisponde

un segmento ed uno solo: il numero è la **misura** del segmento. Il segmento OU_1 , dicesi **unità lineare**. Se α è un numero irrazionale definito da successioni convergenti (a_n, b_n) ; $OA_1, OA_2, \dots$; $OB_1, OB_2, \dots$ le due successioni di segmenti con l'origine in O misurati dai numeri delle dette success. esse soddisfano al postulato della continuità; epperò v'ha un segmento $OX >$ di tutti gli OA_n e $<$ di tutti gli OB_n : del segmento OX la misura è α . Viceversa sia OK incommensurabile con l'unità lineare OU_1 (cioè non sia somma di un numero intero di alcuna parte aliquota di OU_1): presa una successione di numeri $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ tali che prefissato un numero M positivo grande a piacere, sempre si trovi un numero m_n maggiore esso e tutti i seguenti di M , (cioè tendenti all'infinito, V. Cap. XX § 3) si potranno costruire due successioni di segmenti $OA_1, OA_2, \dots, OA_n, \dots$; $OB_1, OB_2, \dots, OB_n, \dots$ siffatte che OA_n, OB_n siano l'uno inferiore l'altro maggiore di OK e differiscano per una parte aliquota m_n -esima di OU_1 , le due successioni di numeri $k_1:m_1, k_2:m_2, \dots, k_n:m_n, \dots$; $(k_1+1):m_1, (k_2+1):m_2, \dots, (k_n+1):m_n, \dots$ (misure dei segmenti delle 2 successioni di dianzi) formano 2 successioni converg. che definiscono un numero α al quale corrisponde il segmento OK .

La corrispondenza fra segmenti e numeri reali è **biunivoca, ordinata, proporzionale, continua**.

Poichè ad ogni segmento di origine O corrisponde biunivocamente l'ulteriore estremo, ad ogni numero reale corrisponde un punto (che è 2° estremo del segmento misurato dal numero) e viceversa ad ogni punto corrisponde un numero (misura del segmento che ha in O un estremo ed il 2° estremo nel punto).

Numeri complessi

1. — **Numero complesso.** La coppia di numeri reali a, b succedentesi nell'ordine scritto si considera come un ente aritmetico a cui si dà il nome di **numero complesso** e si rappresenta con (a, b) .

Eguali sono due numeri complessi (a, b) e (c, d) se e solo se $a = c$, $b = d$. I numeri reali sono caso particolare dei complessi, convenendo di porre $a = (a, 0)$.

2. — **Operazioni sui numeri complessi.** Si definiscono in modo da essere conservate le proprietà formali delle operazioni sui numeri reali e da coincidere con queste, se si opera su enti reali.

Somma dei 2 numeri complessi (a, b) , (c, d) è il numero complesso $(a + c, b + d)$; **addizione** è l'operazione con cui si ottiene la somma. Lo zero è **modulo** dell'operazione, cioè $(a, b) + 0 = (a, b)$.

Sottrazione di (c, d) da (a, b) è l'operazione con cui si trova il complesso (x, y) tale che $(c, d) + (x, y) = (a, b)$: allora si ha $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$.

Prodotto del numero complesso (a, b) pel reale m è il numero complesso (ma, mb) .

Prodotto di due numeri complessi (a, b) , (c, d) è il numero complesso $(ac - bd, ad + bc)$: il prodotto è zero e solo se uno dei fattori è nullo.

Quoziente del numero complesso (a, b) per (c, d) è il complesso (x, y) tale che (c, d) moltiplicato per (x, y) dia (a, b) : si trova $(a, b) : (c, d) = (\{ac + bd\} : \{c^2 + d^2\}, \{bc - ad\} : \{c^2 + d^2\})$; l'operazione è sempre possibile se non è nullo il divisore.

Ogni numero complesso (a, b) si può mettere sotto la forma $(a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1)$: all'ente $(0, 1)$ si dà il nome di **seconda unità** del numero complesso od **unità immaginaria** e si indicherà d'ora in avanti con i . Applicando la regola di moltiplicazione è $(0, 1) \cdot (0, 1) = -1$, cioè $i^2 = -1$.

Il numero complesso (a, b) si scriverà $a + ib$; a dicesi la **parte reale**, ib la **parte immaginaria**. Se un numero complesso ha nulla la parte reale dicesi **immaginario puro**: i quadrati degli immaginari puri sono reali negativi: viceversa $\sqrt{-a^2} = \pm ai$.

Per le definizioni delle operazioni: $(a + ib) \pm (c + id) = a \pm c + i(b \pm d)$; $(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$; $(a + ib) : (c + id) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$. Il rapporto di 2 numeri complessi è reale se e solo se $a : c = b : d$.

Coniugati sono due numeri aventi la stessa parte reale e le parti immaginarie di segno contrario, come $a + ib$, $a - ib$. La somma è reale, $2a$; il prodotto è reale e positivo, $a^2 + b^2$, che dicesi *norma* dei numeri coniugati.

3. — **Modulo** (o *valore assoluto*) del numero $a + ib$ è il numero $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$; se il numero complesso si indica con x il modulo si può indicare con $|x|$. È allora $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$; $|x| : |y| = |x : y|$; $|x + y| \leq |x| + |y|$; $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

Argomento di $a + ib$ è l'angolo ϑ per cui $\cos \vartheta = a : \sqrt{a^2 + b^2}$ sen $\vartheta = b : \sqrt{a^2 + b^2}$; è dunque $\vartheta = \arctg(b : a)$. Infiniti sono i valori di ϑ tutti però congrui fra loro rispetto al modulo 2π . Si dice *argomento positivo minimo* quello compreso fra 0 e 2π (che è unico). I numeri reali positivi hanno l'argomento 0, i numeri reali negativi hanno l'argomento π , gli immaginari positivi hanno l'argomento $\pi : 2$, gli immaginari negativi hanno l'argomento $3\pi : 2$.

Forma trigonometrica (o *ridotta*) del numero $a + ib$ è $\varrho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, con ϱ, ϑ sopra definiti. Se $x = \varrho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ $y = \varrho' (\cos \vartheta' + i \sin \vartheta')$ perchè sia $x = y$ deve essere, $\varrho = \varrho'$, $\vartheta \equiv \vartheta' \pmod{2\pi}$. Si ha poi $xy = \varrho \varrho' \{ \cos(\vartheta + \vartheta') + i \sin(\vartheta + \vartheta') \}$

$x : y = \varrho : \varrho' \{ \cos (\vartheta - \vartheta') + i \operatorname{sen} (\vartheta - \vartheta') \}$; $x^m = \varrho^m (\cos m \vartheta + i \operatorname{sen} m \vartheta)$ (formula di Moivre).

Applicazione della formula di Moivre. Sviluppando $(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)^m$ con la formula di Moivre e con la regola di Newton (pag. 115) ed eguagliando le parti reali e le immaginare si hanno le formule che servono ad esprimere $\operatorname{sen} m \vartheta$, $\cos m \vartheta$ mediante $\operatorname{sen} \vartheta$, $\cos \vartheta$ (*formule di moltiplicazione*); $\operatorname{sen} m \vartheta = \binom{m}{1} \cos^{m-1} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta - \binom{m}{3} \cos^{m-3} \vartheta \operatorname{sen}^3 \vartheta + \binom{m}{5} \cos^{m-5} \vartheta \operatorname{sen}^5 \vartheta - \dots$; $\cos m \vartheta = \cos^m \vartheta - \binom{m}{2} \cos^{m-2} \vartheta \operatorname{sen}^2 \vartheta + \binom{m}{4} \cos^{m-4} \vartheta \operatorname{sen}^4 \vartheta - \dots$

4. — **Vettori.** La teoria dei vettori è svolta ai Cap. LII, LIII, LIV; per l'uso che dei vettori è fatto nei § seguenti di questo Capitolo, bastano le definizioni del § 1, Cap. LII e quelle di somma e sottrazione (§ 2, 3).

5. — **Rappresentazione grafica dei numeri complessi.** Fissati nel piano due assi ortogonali Ox , Oy , un segmento unità e un senso positivo sugli assi stessi, ai vettori di origine O sull'asse x facciamo corrispondere i numeri reali come nell'indicata corrispondenza fra i segmenti di una retta e i numeri reali (Cap. XVIII, § 6); ai vettori di origine O sull'asse y facciamo corrispondere i numeri immaginari, in guisa che i coefficienti di i siano i numeri reali che misurano in grandezza e segno i segmenti che danno luogo ai vettori. Reciprocamente ai numeri reali facciamo corrispondere i vettori di origine O sull'asse x che hanno modulo uguale al valore assoluto dei numeri e il senso dato dai loro segni; ai numeri immaginari facciamo corrispondere i vettori di origine O sull'asse y che hanno modulo uguale al valore assoluto dei numeri stessi e senso dato dal segno dei coefficienti di i . Al numero complesso $a + ib$ facciamo corrispondere il vettore con origine in O che è somma dei due vettori sugli assi x e y che corrispondono ad a e ib ; viceversa al vettore $P - O$ (che ha il primo estremo in O) corrisponde il numero complesso $a + ib$ essendo a e ib i nu-

meri che corrispondono ai due vettori, l'uno sull'asse Ox , l'altro sull'asse Oy , di cui $P - O$ è somma. L'asse Ox dicesi **asse reale**, l'asse Oy dicesi **asse immaginario**.

Poichè esiste una corrispondenza biunivoca fra i vettori di origine O e i punti del piano, esiste pure una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi e i punti del piano. Il punto dicesi **affisso** o **indice** del numero complesso. Segue immediatamente che la lunghezza in valore assoluto del vettore è il modulo del numero complesso, l'angolo che esso fa con la direzione positiva dell'asse x è l'argomento.

Se $A - O$, $B - O$ sono i due vettori che corrispondono ai numeri complessi $a + ib$, $c + id$, il vettore *somma* $(A - O) + (B - O)$ corrisponde al numero $(a + ib) + (c + id)$: il vettore *differenza* $(A - O) - (B - O)$ corrisponde al numero $(a + ib) - (c + id)$. Sia $U - O$ il vettore che corrisponde al numero 1: si congiunga A con U e su $B - O$, preso come omologo di $U - O$ si costruisca il triangolo $OB'C$ simile e similmente disposto al triangolo OUA ; il vettore $C - O$ è il vettore corrispondente al prodotto $(a + ib)(c + id)$.

6. — **Radici m -esime di un numero complesso.** Di un numero complesso $x = \varrho (\cos a + i \sin a)$, sono m i valori di y per cui $y^m = x$, cioè m sono le radici m -esime di x ; indicando con $\sqrt[m]{\varrho}$ la radice aritmetica del numero positivo ϱ (pag.136)

sono date da: $y_k = \sqrt[m]{\varrho} \left(\cos \frac{a + 2k\pi}{m} + i \sin \frac{a + 2k\pi}{m} \right) (k=0, 1, 2, \dots, m-1)$. Gli affissi delle radici n -esime del numero complesso $a + ib = \varrho (\cos a + i \sin a)$ sono gli n vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio di raggio $\sqrt[n]{\varrho}$ ed avente un vertice sopra il raggio che fa coll'asse reale l'angolo $a:n$.

7. — **Radici m -esime di un numero reale** si ottengono dalle formule precedenti, ponendo $a = 0$ se il numero è posi-

tivo, o $\alpha = \pi$ se è negativo. Se m è pari, ogni positivo ha due radici m -esime reali, ogni negativo nessuna reale: se m è dispari ogni numero reale ha una radice m -esima reale dello stesso segno del numero.

Radici dell'unità. Le m radici m -esime dell'unità sono date da: $\cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Ogni radice m -esima dell'unità è anche radice $m \cdot n$ -esima dell'unità. Ogni potenza di una radice m -esima dell'unità è pure radice m -esima dell'unità.

Radice primitiva m -esima dell'unità è quella che non è radice di un ordine minore di m ; se ε è una tale radice, le m successive potenze $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^m$ sono tutte diverse e sono le m radici m -esime dell'unità. Perchè la radice $\cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}$ sia primitiva è necessaria e basta che k ed m siano primi fra loro. Il numero delle radici m -esime primitive è $\varphi(m)$ (Capitolo XII § 2). Se $m = p \cdot q$ e p, q sono primi fra loro, indicando con ε le radici primitive p -esime, con ε' le primitive q -esime, tutte e sole le radici primitive m -esime sono date dai prodotti $\varepsilon \varepsilon'$. Trovata una radice m -esima di un numero x , tutte le radici m -esime di x si trovano moltiplicando questa per le radici m -esime dell'unità.

Radici in forma algebrica degli ordini 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 di 1 e -1. Le *radici quadrate* di 1 sono 1, -1; quelle di -1 sono $i, -i$. Le *radici cubiche* di 1 sono 1, $(-1 + i\sqrt{3}):2$, $(-1 - i\sqrt{3}):2$; quelle di -1 sono -1, $(1 + i\sqrt{3}):2$, $(1 - i\sqrt{3}):2$. Le *radici quarte* di 1 sono 1, -1, $i, -i$; quelle di -1 sono $(1 + i):\sqrt{2}$, $(1 - i):\sqrt{2}$, $(-1 + i):\sqrt{2}$, $(-1 - i):\sqrt{2}$. Le *radici quinte* di 1 sono 1, $(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}):4$, $(\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}):4$, $(-\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}):4$, $(-\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}):4$; quelle di -1 sono -1, $(\sqrt{5} + 1 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}):4$, $(\sqrt{5} + 1 - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}):4$, $(-\sqrt{5} + 1 +$

$+ i \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} : 4$, $(-\sqrt{5} + 1 - i \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) : 4$. Le *radici seste* di 1 sono 1, -1 , $(1 + i\sqrt{3}) : 2$, $(1 - i\sqrt{3}) : 2$, $(-1 + i\sqrt{3}) : 2$, $(-1 - i\sqrt{3}) : 2$; quelle di -1 sono i , $-i$, $(\sqrt{3} + i) : 2$, $(\sqrt{3} - i) : 2$, $(-\sqrt{3} - i) : 2$, $(-\sqrt{3} + i) : 2$. Le *radici ottave* di 1 sono 1, -1 , i , $-i$, $(1 + i) : \sqrt{2}$, $(1 - i) : \sqrt{2}$, $(-1 + i) : \sqrt{2}$, $(-1 - i) : \sqrt{2}$; quelle di -1 sono $(\sqrt{\sqrt{2} + 2} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}) : 2$, $(\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2} + 2}) : 2$, $(-\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2} + 2}) : 2$, $(-\sqrt{\sqrt{2} + 2} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}) : 2$, $(\sqrt{\sqrt{2} + 2} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}) : 2$, $(\sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{\sqrt{2} + 2}) : 2$, $(-\sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{\sqrt{2} + 2}) : 2$, $(-\sqrt{\sqrt{2} + 2} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}) : 2$. Le *radici decime* di 1 sono 1, -1 , $(\sqrt{5} + 1 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) : 4$, $(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) : 4$, $(-\sqrt{5} + 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) : 4$, $(-\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) : 4$, $(-\sqrt{5} + 1 - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) : 4$, $(-\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) : 4$, $(\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) : 4$, $(\sqrt{5} + 1 - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) : 4$; quelle di -1 sono i , $-i$, $(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(\sqrt{5} - 1)) : 4$, $(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + i(\sqrt{5} + 1)) : 4$, $(-\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + i(\sqrt{5} + 1)) : 4$, $(-\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(\sqrt{5} - 1)) : 4$, $(-\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - i(\sqrt{5} + 1)) : 4$, $(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - i(\sqrt{5} + 1)) : 4$, $(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - i(\sqrt{5} - 1)) : 4$.

Radici in forma algebrica degli ordini 2, 3, 4, 5 dell'unità immaginaria. Le radici quadrate di i sono $(1 + i) : \sqrt{2}$, $(-1 - i) : \sqrt{2}$; le radici cubiche di i sono $-i$, $(\sqrt{3} + i) : 2$, $(-\sqrt{3} + i) : 2$; le radici quarte di i sono $(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}) : 2$, $(-\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}) : 2$, $(-\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}) : 2$, $(\sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}) : 2$; le radici quinte di i sono i , $(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(\sqrt{5} - 1)) : 4$, $(-\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(\sqrt{5} - 1)) : 4$, $(-\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - i(\sqrt{5} + 1)) : 4$, $(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - i(\sqrt{5} + 1)) : 4$.

Limiti

1. — **Aggregato** (*classe, insieme*) di enti è *dato* quando si può riconoscere se un ente qualunque appartiene o no all'aggregato: considereremo solo aggregati di un numero infinito di elementi.

Ad ogni aggregato di numeri reali si può associare l'aggregato dei punti di una retta ai quali corrispondono i punti reali; ad ogni aggregato di numeri complessi, si può associare l'aggregato dei punti del piano a cui corrispondono i numeri complessi.

Condensato è un aggregato di punti quando in un intorno piccolo a piacere di un suo punto v'ha sempre qualche punto dell'aggregato.

2. — **Aggregato di numeri reali. Limitato superiormente** dicesi un aggregato di numeri reali se v'ha un numero $M >$ di qualsiasi numero dell'aggregato; **limitato inferiormente** se v'ha un numero $m <$ di qualsiasi numero dell'aggregato. Quando un aggregato è limitato superiorment. e inferiorment. si dice senz'altro **limitato**. Se non è limitato superiorment. si dice che il suo **limite superiore** è $+\infty$; se non è limitato inferiorment. si dice che il suo **limite inferiore** è $-\infty$.

Limite superiore di un aggregato limitato di numeri reali è un numero L di cui nessuno elemento dell'aggregato è $>$, ma sempre v'ha un elemento $> L - \varepsilon$ per quanto piccolo sia il numero positivo ε : **limite inferiore** è un numero l di cui nessuno elemento dell'aggregato è $<$, ma sempre v'ha un elemento $< l + \varepsilon$, per piccolo che sia il positivo ε . Ogni aggre-

gato limitato superiormente (inferiormente) ha un limite superiore (inferiore).

Massimo e minimo diconsi il limite superiore e l'inferiore rispettivamente se appartengono all'aggregato.

Elemento limite (punto limite) di un aggregato di numeri reali (di punti su di una retta) è un numero p (un punto P) tale che esista sempre qualche elemento dell'aggregato diverso da p fra $p - \varepsilon$ e $p + \varepsilon$ per quanto piccolo sia ε (qualche punto diverso da P in un intorno di P per quanto piccolo).

Ogni aggregato limitato ammette un punto limite; se non è limitato superiormente, $+\infty$, e se non è limitato inferiormente, $-\infty$ si dicono elementi o punti limiti.

Aggregato derivato è l'insieme dei punti limiti dell'aggregato. Dell'aggregato dei numeri razionali, l'insieme derivato è l'aggregato dei numeri reali.

3. — **Aggregati ordinati di numeri reali.** Si dice **ordinato** un aggregato di numeri reali se, presi ad arbitrio, due numeri a e b c'è un criterio per dire che a precede b , o a segue b (*). Dai criteri a cui si può, in modi diversi, ispirarsi per dare un significato a « precedere » e « seguire » deve risultare logicamente che « se a precede b e b precede c , anche a precede c ».

Limiti. Rappresenti A un aggregato ordinato di numeri reali: A ha per limite $+\infty$ (o $-\infty$) quando per ogni numero $M > 0$ grande a piacere si può trovare un elemento dell'aggregato tale che tutti quelli che lo seguono siano $>$ di M (siano $<$ di $-M$). Si dice da alcuni che A ha per limite l'infinito se l'aggregato dei valori assoluti dei numeri ha per limite $+\infty$. A ha per limite lo zero se, preso un numero ε positivo piccolo a piacere, esiste un elemento di A tale che tutti quelli che lo seguono siano in modulo $<$ di ε . A ha per limite il numero λ se, prefissato ε positivo piccolo a piacere, esiste un elemento

(*) È bene notare che *aggregato ordinato* è da alcuni detto *successione*: noi chiameremo *successione* ciò che altrimenti è detta *successione congruente alla successione dei numeri naturali*.

di A tale che tutti quelli che lo seguono differiscono da λ in modulo per meno di ε .

Teor. di Cauchy. Condizione necessaria e sufficiente acciò che A abbia un limite finito, è che preso, un numero positivo ε piccolo a piacere, si possa trovare corrispondentemente a questo ε , un numero p in A , tale che se r, s sono due numeri qualunque di A che seguono p , sia $|r - s| < \varepsilon$.

Numerabile dicesi un aggregato quando è possibile far corrispondere ad uno ad uno gli elementi suoi a quelli della successione dei numeri naturali. L'insieme dei numeri razionali è numerabile; quello degli irrazionali no.

Successione (*) è l'aggregato numerabile in cui è stata fatta la coordinazione degli elementi ai numeri naturali: si rappresentano, generalmente, gli elementi con una stessa lettera con gli indici 1, 2, 3, ...; ad es.: $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$

Una successione $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ ha **per limite** $+\infty$ ($0 - \infty$) se, prefissato un numero positivo M grande a piacere, esiste corrispondentemente un numero $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ sia $a_n > M$ (sia $a_n < -M$) (da alcuni è detto che ha per **limite l'infinito** se la successione dei valori assoluti ha per limite $+\infty$); ha **per limite** lo 0, se, prefissato un numero positivo ε piccolo a piacere, esiste corrispondentemente un numero $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ sia $|a_n| < \varepsilon$; ha per limite λ , se, scelto ε positivo piccolo a piacere esiste un corrispondente numero $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ sia $|\lambda - a_n| < \varepsilon$. Se una successione ha per limite λ , si dice che **tende** a λ : si scrive $\lim_{n=\infty} a_n = \lambda$.

Regolare dicesi una successione che tende all'infinito o ad un limite finito. Una successione regolare ha un solo punto limite; un aggregato che ammette un solo punto limite costituisce una successione regolare.

Non crescente (non decrescente) dicesi una successione fra i cui elementi intercede la relazione $a_n \leq a_{n-1}$ (o $a_n \geq a_{n-1}$).

(*) Vedi nota precedente.

Una successione non crescente o non decrescente è regolare: nel 1° caso se è limitata inferior. nel 2° se superior. il limite è finito.

Teor. di Cauchy. Condizione necessaria e sufficiente acciò che una successione $a_1, a_2, \dots$ abbia limite finito è che, prefissato un numero positivo ε piccolo a piacere, esista un numero $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ ed $r > 0$ sia $|a_{n+r} - a_n| < \varepsilon$.

Se una successione ha limite, allo stesso limite tende qualunque success. estratta dalla prima: se due success. hanno limiti uguali, allo stesso limite tende qualunque success. formata con elementi delle due. Se sono date due successioni $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ aventi i limiti A e B ed è da un indice in poi $a_n \leq b_n$ dev'essere $A \leq B$. Se di due success. la 1ª è non decrescente e la 2ª non crescente, di più la success. $b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots$ tende da 0, le due success. hanno lo stesso limite. Se di 3 success. $a_1, a_2, \dots$; $b_1, b_2, \dots$; $c_1, c_2, \dots$ la 1ª e 3ª hanno lo stesso limite λ , e da un indice in poi $a_n \leq b_n \leq c_n$ anche la 2ª success. ha il limite λ . Queste ultime proposizioni valgono per gli aggregati ordinati, fatte su di essi le ipotesi analoghe.

4. — **Aggregati di numeri complessi.** Un aggregato di numeri complessi si dice **limitato** quando esiste un numero M maggiore di tutti i moduli dei numeri dell'aggregato; se non è limitato si dice che l'infinito è punto limite dell'aggregato.

Punto limite di un aggregato di punti nel piano è un punto P tale che entro ogni cerchio di centro P è raggio ε arbitrariam. piccolo v'ha qualche punto dell'aggregato distinto da P . Un numero p dicesi punto limite, se, per ε arbitrariam. piccolo, v'ha qualche numero p' dell'aggregato distinto da p , per cui sia $|p - p'| < \varepsilon$.

Le definizioni di aggregato di numeri complessi **condensato, numerabile, ordinato** si danno in modo analogo a quello tenuto per i numeri reali. Un aggregato ordinato di numeri complessi A **tende all'infinito** quando preso un numero positivo M grande a piacere, esiste un elemento di A tale che

tutti quelli che lo seguono hanno moduli $> M$; **tende allo zero** se prefissato ε positivo piccolo a piacere esiste un numero di A tale che tutti quelli che lo seguono in A sono di modulo $< \varepsilon$; **tende al numero λ** , se, prefissato il positivo ε piccolo a piacere, esiste un numero p di A tale che la differenza fra λ tutti quelli seguono p sia in modulo $< \varepsilon$.

Teor. di Cauchy. Condizione necessaria e sufficiente acciò che A abbia un limite finito è che, preso ε positivo piccolo a piacere, si possa determinare un numero p di A tale che se r ed s sono due numeri qualunque che seguono p sia $|r - s| < \varepsilon$.

Un aggregato ordinato di punti A nel piano **tende all'infinito** se descritto un cerchio col centro in O e con raggio arbitrariamente grande M , esiste corrispondentemente un numero A tale che tutti i punti che lo seguono in A sono esterni al cerchio; **tende al numero λ** se, descritto un cerchio con centro in λ e raggio ε arbitrariamente piccolo, esiste corrispondentemente un numero di A tale che tutti quelli che lo seguono in A sono interni al detto cerchio.

Successione di numeri complessi è un aggregato ordinato di numeri complessi in cui è stata fatta la coordinazione dei numeri stessi ai numeri della serie naturale.

Successioni aventi per limite l'infinito, lo zero, un numero λ : vedi definizioni nel caso dei numeri reali.

5. — Operazioni sui limiti.

a) Date due successioni $a_1, a_2 \dots a_n, \dots; b_1, b_2, \dots b_n, \dots$ la success. $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots$ dicesi **somma** delle date e la successione $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots$ dicesi **differenza** delle date: se $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$, è $\lim (a_n \pm b_n) = A \pm B$ (il limite della somma o della differenza è la somma o la differenza dei limiti).

b) Date le stesse successioni, la success. $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots$ dicesi **prodotto** delle date. Se $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$, è $\lim a_n b_n = AB$ (il limite del prodotto è il prodotto dei limiti).

c) Supposto $B \neq 0$, $\lim (1 : b_n) = 1 : B$; da $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B \neq 0$ si trae $\lim (a_n : b_n) = A : B$ (il limite del quoziente è il quoziente dei limiti).

d) Se $\lim a_n = A > 0$, $\lim a_n^a = A^a$ qualunque sia a ; se $K > 0$, $\lim a_n = A$, $\lim K^{a_n} = K^A$. Se $\lim a_n = A \neq 0$, $\lim. \log_b a_n = \log_b \lim a_n = \log_b A$. (Pel significato di $\log_b$ di un numero non positivo, vedi Cap. XLIV, § 7).

Queste proposizioni si estendono agli aggregati ordinati congruenti, cioè tali che fra gli elementi loro sia stata stabilita una corrispondenza biunivoca.

6. — Se b_n , crescendo sempre, tende con n all' ∞ , si ha $\lim (a_n : b_n) = \lim \{ (a_n - a_{n-1}) : (b_n - b_{n-1}) \}$ purchè esista il 2° membro. Se $\lim a_n = \lim b_n = 0$ e b_n va decrescendo, $\lim. (a_n : b_n) = \lim. \{ (a_n - a_{n+1}) : (b_n - b_{n+1}) \}$ purchè esista il limite del 2° membro. Se $\lim a_n = A$, $\lim (a_1 + a_2 + \dots + a_n) : \lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = A$; $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim (a_{n-1} : a_n)$. Se $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$, $\lim (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1) : n = AB$. Se a, b sono positivi, $a < b$, e si pone $a_1 = \sqrt{ab}$, $b_1 = (a + b) : 2$; $a_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, $b_2 = (a_1 + b_1) : 2$; $\dots$ $a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$, $b_n = (a_{n-1} + b_{n-1}) : 2$, $\dots$ le due successioni $a_1, a_2, \dots$; $b_1, b_2, \dots$ sono convergenti e definiscono un numero che dicesi la **media aritmetico-geometrica** di a e b . Se a e b sono positivi ($a > b$) e si pone $a_1 = \frac{1}{2} (a + b)$, $\frac{1}{b_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$; $a_2 = \frac{1}{2} (a_1 + b_1)$, $\frac{1}{b_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} \right)$; $\dots$ $a_n = \frac{1}{2} (a_{n-1} + b_{n-1})$, $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{b_{n-1}} \right)$, $\dots$ le due successioni $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ sono convergenti e definiscono un numero che dicesi **media aritmetico-armonica** di a e b , e che è uguale a $\sqrt{ab}$ cioè alla loro **media geometrica**.

Essendo x reale, $\lim x^n = 0$, se $|x| < 1$; $\lim x^n = +\infty$ se $x > 1$; non esiste se $x < -1$; se x è complesso di modulo inferiore ad 1, $\lim x^n = 0$; se di modulo > 1 , $\lim x^n$ è infinito: se il modulo di x è 1 e l'argomento non è congruo allo zero nel modulo 2π , $\lim x^n$ non esiste; se l'argomento è non commensurabile con 2π , la successione $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ per

$|x| = 1$ ammette come punti limiti tutti i punti del cerchio di centro l'origine e raggio 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828182845904523536\dots,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$(\log \text{ simbolo di logaritmo naturale, cioè di base } e); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} =$$

$$= \log a; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) = \log a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} m x}{\operatorname{sen} n x} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{n} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = m a^{m-1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots 2n} = \frac{4}{e}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} =$$

$$= \frac{1}{p+1}; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(a^p : E \left(\frac{a^p}{x} \right) \right) = x, \text{ se } a > 0 \text{ e } E(r) \text{ indica il}$$

massimo intero contenuto in r .

Vedi altri esempi nelle applicazioni della regola di l'Hospital al Cap. XLII, § 4.

CAPITOLO XXI.

Le serie

A. — Serie semplici.

1. — **Definizioni relative alle serie.** Data la successione (1) $a_0, a_1, a_2, \dots a_n \dots$ si formi la successione (2): $S_0 = a_0, S_1 = a_0 + a_1, S_2 = a_0 + a_1 + a_2; \dots S_n = S_{n-1} + a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n; \dots$ Il procedimento di calcolo col quale si passa da (1) a (2) dicesi **serie**. I numeri della (1) sono i **termini** della serie, la quale si rappresenta con (3) $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ed anche con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. I termini $S_0, S_1, S_2, \dots S_n \dots$ della (2) si dicono **somme parziali** della serie.

Convergente è la serie (3) se la success. (2) ha limite finito S , che dicesi **somma** della serie; si scrive $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$; **divergente** è la serie (3) se la success. (2) ha limite infinito; **indeterminata** è la serie (3) se la success. (2) non ha limite.

Incondizionatamente convergente è una serie che converge qualunque sia l'ordine dei termini.

Assolutamente convergente dicesi una serie a termini qualsivoglia se è converg. la serie formata coi moduli dei termini stessi: una serie assolutamente convergente è convergente ed anche *incondizionatamente*.

Semplicemente convergente è una serie convergente ma non assolutamente: ogni serie converg. assolutam. lo è semplicemente, ma non è sempre vera la reciproca.

Criterio generale di convergenza (o di Cauchy): condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie converga è che, prefissato un numero ε positivo piccolo a piacere, si possa trovare un numero n tale che la somma di quanti si vogliano termini dopo a_n sia, in modulo, $< \varepsilon$. Ne discende la condizione solo necessaria: $\lim_{n=\infty} a_n = 0$.

Resto di una serie è la serie $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+q} + \dots$; condizione necessaria e sufficiente di convergenza della serie è $\lim_{n=\infty} |R_n| = 0$.

2. — Serie a termini positivi. In una serie a termini positivi la (2) è crescente, onde una serie a termini > 0 è o *convergente* o *divergente*; se è converg. la sua somma è il limite superiore della (2). Una serie a termini > 0 converg. è convergente incondizionatamente.

Criteri di convergenza. a) (di confronto). Se $\sum a_n$ è una serie converg. a termini > 0 e $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ una success. di numeri reali o no, ma limitata, la serie $\sum m_n a_n$ è converg. assolutamente.

Se $\sum a_n$ è una serie divergente a termini positivi e $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ una successione di numeri qualunque di cui il limite inferiore dei valori assoluti è > 0 , la serie $\sum m_n a_n$ diverge. Se $\sum a_n, \sum b_n$ sono entrambe serie a termini positivi e da un indice in poi $a_n \leq b_n$, se la $\sum b_n$ converge, converge anche $\sum a_n$ e se $\sum a_n$ diverge, diverge anche $\sum b_n$.

b) (della radice). La serie $\sum a_n$ a termini > 0 è converg. se da un certo indice in poi è $\sqrt[n]{a_n} < h < 1$ (intendendo che $\sqrt[n]{}$ indichi la radice aritmetica n -esima); è diverg. se da un indice n in poi $\sqrt[n]{a_n} > h > 1$. Se $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, la serie converge se $\lambda < 1$, diverge se $\lambda > 1$, v' ha dubbio se $\lambda = 1$.

c) (del rapporto). La serie $\sum a_n$ a termini > 0 è converg. se da un indice n in poi $a_{n+1} : a_n < h < 1$, è diverg. se da

un indice n in poi è $a_{n+1} : a_n > h > 1$. Se $\lim_{n=\infty} (a_{n+1} : a_n) = \lambda$, la $\sum a_n$ è converg. se $\lambda < 1$, diverg. se $\lambda > 1$; v' ha dubbio se $\lambda = 1$; ma se per ogni n finito è $a_{n+1} : a_n > 1$, la serie è divergente.

d) (di Kummer). Se $b_1, b_2, \dots$ è una successione di numeri > 0 , $\sum a_n$ una serie a termini > 0 e da un certo indice n in poi $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > k > 0$, la $\sum a_n$ è converg. Se $\sum \frac{1}{b_n}$ è converg. ed è da un indice n in poi $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > 0$ la $\sum a_n$ è converg. Se la $\sum (1 : b_n)$ è diverg. ed è, da un indice n in poi, $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} < 0$ la $\sum a_n$ è divergente.

e) (di Raabe). Facendo nel criterio precedente $b_n = n$, si ha che la $\sum a_n$ è converg. se da un indice n in poi è $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > h > 1$; è diverg. se $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$.

f) (di Cahen). La $\sum a_n$ converg. se $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1$ cresce indefinitamente con n .

g) (di Gauss). Se in una serie $\sum a_n$ a termini positivi si ha $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^p + a n^{p+1} + b n^{p+2} + \dots}{n^p + \alpha n^{p+1} + \beta n^{p+2} + \dots}$ ove p è un intero positivo, $a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots$ costanti, la serie converge se $a - \alpha > 1$, diverge se $a - \alpha < 1$.

h) Se $\sum a_n$ è una serie a termini > 0 decrescenti ed $m > 1$, la serie $\sum a_n$ converge o diverge insieme con la serie

$$\sum_{p=0}^{\infty} m^p a_{m^p}.$$

i) (di Jamet). La serie a termini > 0 $\sum a_n$ converge se $(1 - \sqrt[m]{a_n}) (n : \log. n)$ finisce per mantenersi $>$ di un numero $h > 1$ quando n va all' infinito; è divergente se finisce per non superar mai l' unità.

Serie a termini negativi è convergente o divergente; se converge, la sua somma è il limite inferiore della (2); una serie a termini < 0 se converge, converge incondizionatamente. Valgono i criteri di convergenza del § precedente, applicati sulla serie dei valori assoluti.

3. — **Serie a termini reali qualunque.** Se in una serie a termini reali alternativamente positivi e negativi i moduli sono decrescenti e tendenti a zero la serie converge.

Teor. di Riemann. Se $\sum a_n$ è una serie a termini reali e si indicano con p_n i termini > 0 , con q_n i moduli dei negativi, se $\sum p_n$ e $\sum q_n$ sono converg. la $\sum a_n$ è converg. assolutam. e incondizionatam. Se una delle due serie $\sum p_n$, $\sum q_n$ converge e l'altra diverge, la $\sum a_n$ diverge. Se $\sum p_n$, $\sum q_n$ sono diverg., può darsi che per uno speciale ordinamento dei termini sia $\sum a_n$ converg., ma vi sono sempre degli ordinamenti pei quali $\sum a_n$ è diverg. Dunque se $\sum a_n$ converge, converge condizionatamente. Se una serie a termini reali è semplicemente converg. si può sempre trovare un ordinamento pel quale la serie converge ad un numero arbitrariamente prefissato.

Teor. di Dirichlet. Condizione necessaria e sufficiente acciò che una serie a termini reali converga incondizionatamente è che converga assolutamente.

4. — **Serie a termini complessi.** La serie $\sum (a_n + i b_n)$ è converg. quando $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono converg. e viceversa. Una serie a termini complessi è assolutamente converg. quando converge $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Teor. di Dirichlet: Una serie a termini complessi è converg. incondizionatamente se lo è assolutamente.

Teor. di Abel: Se $\sum a_n$ è una serie a termini qualunque convergente, $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ una successione di numeri positivi decrescenti o crescenti con limite superiore finito, la serie $\sum c_n a_n$ è convergente.

5. — **Operazioni sulle serie:** a) **Addizione.** Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono converg. ed è $A = \sum a_n$, $B = \sum b_n$, la $\sum (a_n + b_n)$ è con-

verg. ed è $A + B = \sum (a_n + b_n)$. Quest' ultima serie si dice **somma** delle 2 serie date.

b) **Moltiplicazione.** Date due serie a termini qualunque converg. assolutamente $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$, la serie $\sum (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)$ è converg. assolutam. ed ha per somma AB . L' ultima serie dicesi **prodotto** delle 2 serie date. In particolare ciò accade se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono serie converg. a termini positivi.

6. — Alcune serie numeriche.

a) **Serie geometrica** dicesi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$; essa è convergente e con somma $1:(1-a)$ se $|a| < 1$, divergente se $a \geq 1$; per $a \leq -1$ indeterminata.

b) **Serie armonica** è la $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge; converge la $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

c) **Serie armonica generalizzata** è la $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ che converge per $a > 1$ e diverge per $a \leq 1$.

d) Convergono $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = 2,718281828459045\dots$ (base dei lo-

garitmi naturali); $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$ qualunque sia il numero a ;

$\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{a}{n}\right)^n$ per $0 < a < e$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \log 2$ (log. simbolo di

logaritmo naturale) $= 0,69314718\dots$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)} =$

$= \frac{1}{4} \log 2 = 0,17328679\dots$; $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} -$

$-\log \frac{n+1}{n} \right) = 0,577215664\dots$ (costante d' Eulero).

e) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\log n)^q}$ è converg. per $p = 1, q > 1$, per $p > 1, q$ qualunque, è diverg. per $p = 1, q \leq 1$, per $p < 1, q$ qualunque.

f) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$ è assolutamente convergente per $p > 1$, semplicemente convergente per $0 < p \leq 1$, indeterminata per $p \leq 0$. In particolare $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}.$$

g) Divergono le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a n + b}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 n + 1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 n}{4 n^2 - 1}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$ per qualunque p .

h) Sono indeterminate le serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \varphi.$$

7. — Calcolo della somma di una serie a termini reali con l'approssimazione di $1:2 \cdot 10^k$ (cioè con k cifre decimali esatte). Si determini n in modo che il resto R_n sia in modulo $< 1:4 \cdot 10^{k+1}$; poi si determini p in modo che $10^p > 20 n$: dopo ciò si calcolino i primi n termini della serie con $k+p$ cifre decimali e sia a_{k+1} la somma loro, con $k+1$ cifre decimali. Se l'ultima cifra di a_{k+1} è diversa da 0 e da 5, il numero U_k che ha una cifra decimale in meno di a_{k+1} è il valore cercato; se 0 o 5 si calcolerà in modo analogo a_{k+2} e si prenderà per U_k il numero con due cifre decimali di meno di a_{k+2} .

Se, prendendo dei termini i valori assoluti, la addizione per orizzontali fornisce una serie converg., la serie doppia è convergente.

Se prendendo dei termini i valori assoluti, e la somma di un qualunque numero finito dei termini estratto da (4) è inferiore ad un numero fisso L , la serie doppia è convergente.

Queste condizioni però sono solamente sufficienti.

CAPITOLO XXII.

Prodotti infiniti e frazioni continue

A. — Prodotti infiniti.

1. — **Definizioni relative ai prodotti infiniti.** Dati gli infiniti numeri $\neq 0$, (1) $a_0, a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ il procedimento di calcolo col quale si ottiene la successione (2) $P_0 = a_0, P_1 = a_0 a_1, P_2 = a_0 a_1 a_2, \dots P_n = P_{n-1} a_n = a_0 a_1 a_2 \dots a_n, \dots$ dicesi **prodotto infinito**. I numeri della (1) si dicono **fattori**, i numeri (2) $P_0, P_1, P_2, \dots P_n, \dots$ **prodotti parziali**. Se la (2) ha limite finito e $\neq 0$, il prodotto infinito dicesi **convergente**; se ha limite infinito o nullo, **divergente**; se non ha limite, **indeterminato**. Se il limite è P , P è il valore del prodotto infinito

e si usa scrivere $P = \prod_{n=0}^{\infty} a_n$. Ad es. $\prod_{n=1}^{\infty} \{(n+1)^2 : n(n+2)\} = 2$;

$\prod_{n=1}^{\infty} n$ è divergente, $(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty)$ $\prod_{n=1}^{\infty} (1 : n)$ è divergente,

$(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0)$; $\prod_{n=1}^{\infty} \{(-1)^n (n+1)^2 : n(n+2)\}$ è indeterminato, perchè la successione $P_n = (-1)^n 2(n+1) : (n+2)$ ha i punti, limiti ± 2 .

Condizione necessaria e sufficiente di convergenza del

prodotto infinito $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ è che, prefissato ε positivo piccolo a piacere, esista un numero $\bar{n}$ tale che essendo $n, n+r$ maggiori di $\bar{n}$ si abbia $|1 - a_n a_{n+1} \dots a_{n+r}| < \varepsilon$. È necessario che il termine generale a_n tenda ad 1, o, scrivendo $a_n = 1 + b_n$, che $\lim_{n=\infty} b_n = 0$.

2. — **Prodotti infiniti di fattori positivi.** Se nel prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n)$ i numeri b_n sono positivi, il prodotto infinito non può essere indeterminato e se è divergente non può essere nullo. *Condizione necessaria e sufficiente* per la convergenza del detto prodotto infinito è la convergenza delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ponendo $g_n = b_n (g_0 + g_1 + \dots + g_{n-1})$, $g_0 = 1$, $g_1 = b_1, \dots$ si ha $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$. Se $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n)$ è converg. ed ha il valore P , alterando comunque l'ordine dei fattori il prodotto infinito è sempre converg. ed ha il valore P : si dice **convergente incondizionatamente**.

3. — **Prodotto infinito, a fattori qualunque, assolutamente convergente** è il prodotto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n)$ se è converg. assolutam. la serie $\sum b_n$. Un prodotto converg. assolutam. è converg. ed anche incondizionatamente. Se nel prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n)$ i numeri b_n sono reali e $\sum b_n$ converge, il prodotto infinito è converg. o diverg. insieme alla $\sum b_n^2$ e, nel caso della divergenza, il limite dei prodotti parziali è lo zero.

Se i prodotti infiniti $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n)$, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n)$ sono converg. e hanno i valori P, P' , il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n) (1 + c_n)$ è converg. ed ha il valore PP' .

B. — Frazioni continue.

4. — **Definizioni relative alle frazioni continue.** Data la successione di numeri $\neq 0$, (1) $a_0, a_1, a_2 \dots a_n, \dots$ si formi la successione (2) $R_0 = a_0, R_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, R_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \dots R_n =$

$$= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}, \dots \text{ Il procedimento di calcolo}$$

col quale si costruisce, data la (1), la successione (2), dicesi **frazione continua**. Si usano le notazioni $R_0 = (a_0), R_1 = (a_0, a_1), R_2 = (a_0, a_1, a_2), \dots R_n = (a_0, a_1, \dots a_n), \dots$

Convergente dicesi la frazione continua se la successione (2) ha limite finito; **divergente** se ha limite infinito, **indeterminata** se non ha limite. Se la (2) ha per limite R , questo dicesi **valore** della frazione continua e si scrive (3)

$$R = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \dots}}}} = (a_0, a_1, \dots a_n, \dots).$$

Le $R_0, R_1, \dots R_n \dots$ si potranno ridurre ad una frazione ordinaria, $R_0 = P_0 : Q_0$ (ove $P_0 = a_0, Q_0 = 1$); $R_1 = P_1 : Q_1$ (ove $P_1 = a_0 a_1 + 1, Q_1 = a_1$); $R_2 = P_2 : Q_2$ (ove $P_2 = (a_0 a_1 + 1) a_2 + a_0; Q_2 = a_1 a_2 + 1$), $\dots R_n = P_n : Q_n$ (ove $P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}; Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$), $\dots$

Ridotta di ordine n della frazione continua dicesi la $P_n : Q_n$; i numeri $a_0, a_1 \dots a_n \dots$ diconsi **quozienti incompleti** della frazione continua.

Vale la relazione: $P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1} = (-1)^n$.

5. — **Frazioni continue a quozienti incompleti positivi**

non minori di 1. Le successioni $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots; Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ tendono a $+\infty$.

La differenza Δ_n fra due ridotte consecutive $\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ è $\frac{(-1)^{n-1}}{Q_n Q_{n-1}}$; sono alternativamente positive e negative.

La frazione continua è converg. ed ha per valore la somma delle serie $a_0 + \frac{1}{Q_1 Q_2} - \frac{1}{Q_2 Q_3} + \frac{1}{Q_3 Q_4} - \dots$. Se R è il valore della frazione continua, $\left| R - \frac{P_n}{Q_n} \right|$ è l'errore che si commette a sostituire la ridotta d'ordine n alla frazione continua; esso è $<$ di $(1:Q_n Q_{n+1}) < (1:Q_n^2)$; è decrescente al crescere di n . Le ridotte d'ordine pari vanno crescendo, quelle di ordine dispari decrescendo; costituiscono due successioni convergenti (Cap. XVIII § 1) che definiscono il valore R della frazione continua.

Resto di una frazione continua. Se si pone $\frac{r_n}{Q_n} = \frac{P_n}{Q_n} - R$, dicesi r_n resto della frazione continua.

Quozienti completi della frazione continua $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ convergente sono le frazioni continue (convergenti) $\varrho_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $\varrho_2 = (a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$; $\dots$, $\varrho_n = (a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+r}, \dots)$

Si ha $\varrho_n = -r_{n-1}:r_n$; $\varrho_n \varrho_{n+1} = a_{n+1} \varrho_{n+1} + 1$.

6. — Frazioni continue aritmetiche sono quelle di cui i quozienti incompleti sono numeri interi e positivi. Ogni frazione continua aritmetica è converg.; in esse i numeratori P_n ed i denominatori Q_n delle ridotte sono numeri interi; di più ogni coppia P_n e Q_n sono primi fra loro; ogni ridotta si avvicina al valore della frazione continua più di qualunque frazione ordinaria a termini minori.

Sviluppo di un numero reale in frazione continua. Sia ϱ un numero positivo. Indicando con $E(u)$ il massimo intero contenuto in u , sia $E(\varrho) = a_1$, allora $\varrho = a_1 + \frac{1}{\varrho_1}$ con $\varrho_1 > 1$; sia

$a_2 = E(\varrho_1)$, sarà $\varrho = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\varrho_2}}$ con $\varrho_2 > 1$; se $E(\varrho_2) = a_2$ sarà

$\varrho_2 = a_3 + \frac{1}{\varrho_3}$ ecc. Se e solo se ϱ è razionale si perviene ad

un $\varrho_n = 0$, vale a dire la frazione è limitata. Se l'operazione non ha termine la frazione continua, converg. perchè aritmetica, ha il valore ϱ : si ha così lo *sviluppo dell'irrazionale ϱ in frazione continua*.

Risoluzione dell'equaz. di Diofanto $ax + by = c$ (Cap. XII, § 1) **mediante frazioni continue.** Se $p:q$ è la penultima ridotta nello sviluppo di $a:b$ (a, b primi fra loro e > 0) in frazione continua (necessariamente limitata) una coppia di soluzioni dell'equaz. diofantea è $x = \pm cq, y = \mp cp$, col segno superiore o inferiore a seconda che $p:q$ è ridotta di ordine dispari o pari. Se $a > 0, b < 0$, posto $b = -b_1$, sia $p:q$ la penultima ridotta dello sviluppo di $a:b_1$, una coppia di soluzioni è data da $x = \pm cq, y = \pm cp$, col segno superiore od inferiore secondo che $p:q$ è ridotta di ordini dispari o pari.

Frazione continua periodica è la frazione continua in cui i quozienti incompleti si riproducono da un posto in poi: è **semplice** se si riproducono a partire dal primo, **mista** nel caso contrario. Ogni frazione continua aritmetica periodica è un irrazionale quadratico. Ad es. $\sqrt{1+a^2} = (a, 2a, 2a, \dots)$ periodica mista.

CAPITOLO XXIII.

Generalità sulle funzioni

1. — **Corrispondenza fra aggregati.** Si dice che tra 2 aggregati $A(a, a', a'', \dots) B(b, b', b'', \dots)$ intercede una **corrispondenza** ogni volta che assegnato un elemento in A ne restano fissati uno o più in B . **Univoca** dicesi la corrispondenza se ad

un elemento arbitrario di A ne corrisponde uno solo in B ; **plurivoca** se ne corrispondono più di uno; **biunivoca** se ad un elemento arbitrario di A corrisponde un solo elemento di B e viceversa ad un elemento arbitrario di B corrisponde un solo elemento di A .

Si dice che intercede da una corrispondenza fra l'aggregato $B(b, b', b'', \dots)$ e gli r aggregati $A_1(a_1, a'_1, a''_1, \dots), \dots, A_r(a_r, a'_r, a''_r, \dots)$, quando, fissato arbitrariamente un elemento in uno degli r aggregati rimane di conseguenza fissato un elemento in B (**corrispondenza univoca**) o più elementi in B (**corrispondenza plurivoca**).

Se x può rappresentare un elemento qualunque dell'aggregato $A(a, a', a'', \dots)$ si dice **variabile** in A ; A si dice **campo** dei valori della variabile x . **Indipendente** dicesi la variabile x se può rappresentare un elemento di A scelto a piacere.

2. — **Definizioni sulle funzioni.** Se ad ogni valore della variabile indipendente x in un campo resta fissato un valore per una variabile y , si dice che y è **funzione** di x e si scrive $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = y(x)$ ecc. Si dice che $a \mapsto b$ è l'**intervallo** in cui è data la funzione, se x può assumere tutti i valori compresi fra a e b gli estremi inclusi. Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono n variabili indipendenti in un certo campo e ad ogni sistema di valori fissati per queste, corrisponde per la variabile y un valore determinato, si dice che y è **funzione** di $x_1, x_2, \dots, x_n$ nel dato campo e si scrive $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ecc. Per rappresentare il valore che una funzione $f(x)$ ha per il valore a della variabile indipendente x si scrive $f(a)$; analogamente $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ rappresenta il valore di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ per i valori $a_1, a_2, \dots, a_n$ attribuiti ordinatamente alle variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Classificazione sulle funzioni. a) Le funz. si classificano a seconda del numero delle variabili indipend. in funzioni ad 1, a 2, ... ad n variabili.

b) a seconda del campo di valori della variabile o variabili indipend. ed in modo speciale in **funzioni di variabile reale** e in **funzioni di variabile complessa**.

c) a seconda dell'aggregato in cui si trovano i valori che esse assumono; in modo speciale in **funzioni reali**, se i valori assunti sono reali, ed in **funzioni complesse**.

d) a seconda del numero dei valori che assumono per ogni valore della variabile indipend. o per ogni sistema di valori delle variabili indipendenti.

e) **Espressione analitica** di una funzione è l'indicazione di un complesso di operazioni di calcolo da eseguirsi sulla variabile o variabili indipend. e su numeri dati (**costanti**) per avere il valore della funzione y .

Razionale si dice una funzione quando le operazioni da eseguirsi sulle variabili indipendenti sono somme, moltiplicazioni, e divisioni in numero finito; **razionale intera** se le variabili non figurano a divisore, **fratta** nel caso contrario.

f) Se la equaz. $f(x, y) = 0$ fa corrispondere ad ogni valore x di un certo campo uno o più valori di y si dice che y è **funzione implicita** (v. Cap. XLI) di x definita dall'equaz. $f(x, y) = 0$. **Algebrica** dicesi la y se il primo membro dell'equaz. è, o può ridursi, a razionale intero; **trascendente** nel caso contrario.

3. — **Rappresentazione grafica delle funzioni.** a) Per la rappresentazione grafica delle funzioni reali di variabile reale vedi Cap. III, § 1.

b) Sia $y = f(x)$ funzione reale di variabile complessa. La x si rappresenta mediante i punti di un piano (Cap. XIX, § 5): per ogni punto x si innalza una normale sulla quale a partire da x si conta, da una banda o dall'altra del piano, a seconda del segno di y , un segmento $x\overline{M}$ misurata da y : il luogo dei punti M dicesi **superficie rappresentativa**.

c) Sia $y = f(x)$ una funzione complessa di variabile complessa; su un piano si rappresentano i valori di x , e su un

altro i valori di y : fra i punti dei due piani la $y = f(x)$ stabilisce una corrispondenza.

4. — **Limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente** dicesi una funzione $f(x)$ se tale è l'aggregato dei valori delle funzioni (Cap. XX, § 2).

Limite superiore, inferiore; massimo, minimo d'una funzione $f(x)$ dicesi il limite superiore, inferiore, il massimo, minimo dell'aggregato dei valori della funzione (*ibidem*).

Intorno di un punto x_0 reale o complesso dicesi l'insieme dei punti x del campo soddisfacenti alla limitazione $|x - x_0| \leq \delta$; *intorno a destra* di un punto reale x_0 è l'insieme dei punti x per cui $0 \leq x - x_0 \leq \delta$, *intorno a sinistra* l'insieme dei punti x per cui $0 \leq x_0 - x \leq \delta$.

Teor. di Weierstrass. Se $f(x)$ è una funzione reale limitata superiormente (inferiormente) in un campo reale o complesso, esiste un punto detto punto di Weierstrass relativo al limite superiore, (inferiore) tale che in un suo intorno comunque piccolo il limite superiore (inferiore) della funzione coincide con il limite superiore (inferiore) della funzione in tutto il campo.

Continua dicesi la funzione $f(x)$ (reale o complessa di variabile reale o complessa) nel punto $\bar{x}$, se preso ε positivo piccolo a piacere esiste un numero positivo δ tale che per ogni x soddisfacente alla limitazione $|x - \bar{x}| < \delta$ sia $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$. Se x tende a $\bar{x}$, $f(x)$ tende a $f(\bar{x})$ se $f(x)$ è continua in $\bar{x}$ e viceversa se tendendo comunque x a $\bar{x}$, $f(x)$ tende a $f(\bar{x})$, $f(x)$ è continua in $\bar{x}$. Se $f(x)$ è continua in $\bar{x}$, anche $|f(x)|$ è continua in $\bar{x}$. Se $f(x)$ è continua per ogni x reale di un intervallo o x complesso di un campo, si dice *continua nell'intervallo* o *nel campo*. Per una funzione reale continua di variabile reale o complessa, il limite superiore è **massimo** ed è assunto nel relativo punto di Weierstrass ed il limite inferiore è **minimo**. Se $f(x)$ è reale e continua nell'intervallo $a \rightarrow b$ e $f(a)$, $f(b)$ sono di segni contrari, si annulla in un punto intermedio ad a e b .

Se il minimo di $f(x)$ è m ed il massimo è M , $f(x)$ prende qualunque valore fra m ed M .

Per altre proprietà delle funzioni continue, vedi Cap. XXXIII.

5. — **Funzioni di più variabili.** Per **campo** in cui una funzione $f(x, y)$ è definita intendiamo una porzione del piano comunque definita: è **finito** se esiste un rettangolo in cui cadono tutti i punti del campo. Un punto P di un campo si dice **interno** ad esso se può descriversi un cerchio col centro in P di cui tutti i punti interni al cerchio e sul contorno appartengono al campo.

Contorno del campo è costituito dai punti del campo che non sono interni; definendo il campo come l'insieme dei punti interni ad un cerchio, il campo manca di contorno. Se i punti di un campo A appartengono ad un campo B si dice che A è *contenuto* in B , se i punti di A sono interni a B , si dice che A è *interno* a B . **Perfetto** dicesi un campo A quando per ogni Q esterno esiste un cerchio di centro Q i punti esterni e sul contorno del quale sono esterni ad A . Un campo perfetto ha un contorno e su ogni retta che congiunge un punto interno ed uno esterno v'ha almeno un punto del contorno. Se non si dice espressamente il contrario, quando si dice che una funzione $f(x, y)$ è definita nel campo A , si intende che questo campo sia perfetto.

Intorno di un punto (x_0, y_0) dicesi l'insieme dei punti di un'area di cui (x_0, y_0) è punto interno: si può definire ad es. mediante le disuguaglianze $|x - x_0| \leq \delta$, $|y - y_0| \leq \eta$, l'intorno è allora costituito dai punti di un rettangolo, o mediante la disuguaglianza $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2$ ed allora l'intorno è un cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio δ ; ecc.

Limitata inferiormente o superiormente dicesi una funzione reale di più variabili (reali o complesse) se tale è l'aggregato dei valori della funzione.

Limite superiore, inferiore; massimo e minimo di una funzione reale di più variabili dicesi il limite superiore, infe-

riore, il massimo e minimo dell'aggregato dei valori della funzione.

Rappresentazione geometrica di una funzione reale di 2 variabili reali vedi Cap. III, § 2.

Teor. di Weierstrass. Se $f(x, y)$ è una funzione reale limitata esiste un punto (x_0, y_0) (*punto di Weierstrass*) in ogni intorno del quale il limite superiore della funzione coincide con quello che la funzione ha in tutto il campo in cui è definita. Punti siffatti ne possono esistere anche infiniti. Analogamente pel limite inferiore.

Continua dicesi una funzione $f(x, y)$ in (x_0, y_0) se prefissato un numero ε piccolo a piacere, esiste di (x_0, y_0) un intorno in ogni punto (x, y) del quale sia $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. Se (x, y) è un punto che comunque tende ad (x_0, y_0) (*) il valore di $f(x, y)$ tende a $f(x_0, y_0)$ e viceversa se tendendo *comunque* il punto (x, y) al punto (x_0, y_0) il valore $f(x, y)$ tende ad $f(x_0, y_0)$ la $f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0) . Una funzione continua in tutti i punti di un campo C dicesi continua in C . Per una funzione continua in un campo, il limite superiore è massimo ed è assunto nel relativo punto (o nei punti) di Weierstrass; il limite inferiore è minimo ed è assunto nel relativo punto (o nei punti) di Weierstrass. Una funzione continua in un campo assume un qualunque valore compreso fra il minimo ed il massimo.

(*) Ciò vuol dire che x tende ad x_0 ed y ad y_0 .

Funzioni razionali intere

A. — Funzioni di una variabile.

1. — **Definizioni.** Una funzione $y = f(x)$ si dice **razionale intera** se le operazioni da farsi sulla x sono sole somme e moltiplicazioni in numero finito: la forma generale è: $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$: i numeri $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ diconsi **coefficienti** e l'ultimo anche **termine noto**: il grado n del polinomio dicesi **grado** della funzione razionale intera. Una funzione $f(x)$ razionale intera prende un valore unico e finito per ogni valore di x finito reale o complesso; è funzione *continua* (Cap. XXIII, § 4) per qualunque valore finito di x . Preso un numero positivo arbitrariamente grande M , c'è sempre un numero R tale che per $|x| > R$ è $|f(x)| > M$; perchè sia verificata questa disuguaglianza basta che R sia maggiore del maggiore fra i due numeri $\sqrt[n]{(2M : |a_0|)}, 1 + (2A : |a_0|)$ se A è il massimo modulo dei coefficienti a_i .

Radici di $f(x)$ sono i valori a di x per cui $f(x) = 0$. Per $|x| > 1 + (A : |a_0|)$ la $f(x)$ non si annulla, e, nel campo reale, il segno di $f(x)$ è quello di $a_0 x^n$: dunque ogni radice di $f(x)$ ha modulo inferiore a $1 + (A : |a_0|)$.

Identiche si dicono 2 funzioni razionali intere $f(x)$ e $g(x)$ (e si indica ciò con $f(x) \equiv g(x)$) se i coefficienti dei termini simili in x sono uguali. Due funzioni razionali intere identiche prendono lo stesso valore per ogni valore di x .

Se $f(x)$ non è di grado superiore ad n ed ha $n + 1$ radici distinte, è identicamente uguale allo zero.

Principio di identità fra funzioni razionali intere. Se due funzioni di grado $\leq n$ prendono lo stesso valore per più di n valori di x , sono identiche.

2. — **Problema d'interpolazione** consiste nella determinazione d'una funzione razionale intera di grado non superiore ad n che per $x = a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ prende gli $n + 1$ valori $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$. Indichiamo 3 metodi: *a) Metodo dei coefficienti indeterminati.* Posta la funzione $f(x)$ incognita sotto la forma $c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n$ si determinano i coefficienti c_k risolvendo le $n + 1$ equaz. lineari $c_0 a_i^n + c_1 a_i^{n-1} + \dots + c_{n-1} a_i + c_n = \beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n + 1$). Il sistema è possibile perchè il determinante dei coefficienti è il determ. di Vandermonde relativo ai numeri $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ diversi fra loro.

b) Metodo di Lagrange. Posto

$$f_i(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_{n+1})}{(a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_{n+1})}$$

espressione che per $x = a_i$ prende il valore 1 e per $x = a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n+1}$ il valore 0, la funzione cercata è $f(x) = \beta_1 f_1(x) + \beta_2 f_2(x) + \dots + \beta_n f_n(x)$.

c) Metodo di Newton. Si ponga la funzione da determinare sotto la forma $k_1 + k_2(x - a_2) + k_3(x - a_2)(x - a_3) + \dots + k_n(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_{n+1})$: facendo $x = a_2$, si ha $k_1 = \beta_2$; facendo $x = a_3$ si ha $k_2 = (\beta_3 - \beta_2) : (a_3 - a_2)$; facendo $x = a_4$ si ha $k_3 = \frac{\beta_4 - \beta_2}{(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)} - \frac{\beta_3 - \beta_2}{(a_3 - a_2)(a_4 - a_3)}$ ecc.; finalmente facendo $x = a_1$ si ha l'equaz. $k_1 + k_2(a_1 - a_2) + k_3(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + \dots + k_n(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_{n+1}) = \beta_1$ che dà k_n .

3. — **Divisibilità.** Date 2 funzioni razionali $f(x)$ e $g(x)$ dei gradi n ed m rispettivam. con $n \geq m$, la divisione di $f(x)$ per $g(x)$ è la determinazione di 2 polimoni, l'uno $q(x)$ di grado $n - m$, l'altro $r(x)$ di grado $< m$, tali che si abbia $f(x) \equiv$

$\equiv g(x)q(x) + r(x)$. Il polinomio $f(x)$ si dice **dividendo**, $g(x)$ **divisore**, $q(x)$ **quoziente**, $r(x)$ **resto**.

Divisibile è $f(x)$ per $g(x)$ se $r(x) = 0$; $g(x)$ si dice **divisore** di $f(x)$. Se più funzioni razionali sono divisibili per $g(x)$ anche la loro somma o prodotto è divisibile per $g(x)$. Se $f(x)$ è divisibile per $g(x)$ e $g(x)$ per $h(x)$ è $f(x)$ divisibile per $h(x)$. Se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono divisibili per $g(x)$ anche il resto della divisione di $f(x)$ per $\varphi(x)$ è divisibile per $g(x)$.

Massimo comun divisore (M.C.D.) di 2 funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ è la funzione $g(x)$ di più alto grado che sia divisore di entrambe: si determina dividendo f per φ ; φ pel resto della 1^a divisione, questo pel resto della 2^a divisione ecc. fino a che si abbia un resto 0 o un resto di grado 0; nel primo caso l'ultimo divisore è il M.C.D.; nel 2^o caso f e φ sono **prime fra loro** (non v'ha una funzione che le divida entrambe). I divisori di $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono tutti e soli i divisori del loro M. C. D. I quozienti di $f(x)$ e $\varphi(x)$ pel loro M.C.D. sono primi fra loro. Se $g(x)$ divide il prodotto $f(x)\varphi(x)$ ed è primo con $f(x)$ divide $\varphi(x)$ (**Teor. di Euclide**).

Divisibilità di $f(x)$ per $x - a$ sussiste se $f(a) = 0$; se $f(a) \neq 0$, il resto della divisione è $f(a)$. Il numero a è radice di $f(x)$ se e solo se $f(x)$ è divisibile per $x - a$. Le radici comuni a due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono le radici del loro M.C.D. e solo esse (v. Cap. XXVII).

Regola di Ruffini per la divisione di $f(x)$ per $x - a$; il 1^o coeffic. del quoziente è il 1^o coeffic. del dividendo; ogni altro coeffic. del quoziente è dato dal coeffic. di ugual posto del dividendo più il prodotto per a del coefficiente precedente del quoziente. In pratica il calcolo si dispone così: in una linea orizzontale si scrivono i coeffic. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$; chiamando con q_i i coefficienti del quoziente sarà $q_0 = a_0$; q_0 si scrive sotto ad a_0 in una terza linea; il prodotto $q_0 a$ si scrive sotto ad a_1 in una seconda linea; la somma $a_1 + q_0 a$ è q_1 che si scrive nella 3^a linea sotto ad a_1 ; il prodotto $q_1 a$ si mette

nella 2^a linea sotto ad a_2 e la somma $a_2 + q_1 a$ che è q_2 si scrive sotto la 3^a linea, e così via; q_n è $f'(a)$, cioè il resto.

4. — **Derivata (prima)** di $f(x) = a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ è il polinomio di grado $n-1$ ottenuto moltiplicando ogni termine per l'esponente della variabile e dando alla variabile stessa l'esponente diminuito di un'unità, cioè $n a_n x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \dots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1}$; si indica la derivata con $Df(x)$ o con $f'(x)$. La derivata può essere definita come limite per $h = 0$ del rapporto $\{f(x+h) - f(x)\} : h$ che dicesi **rapporto incrementale** (Capitolo XXXVI, § 1).

Derivata seconda è la derivata della derivata prima; si indica con $D^2 f(x)$ o con $f''(x)$. È $f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + \dots + 3 \cdot 2 a_{n-3} x + 2 a_{n-2}$.

Derivata r-esima (o d'ordine r) è la derivata della derivata d'ordine $r-1$; si indica con $D^r f(x)$ o un $f^{(r)}(x)$. Vale la relazione $D^p (D^q f(x)) = D^{p+q} f(x)$.

Derivata n-esima di una funz. razionale intera di grado n è $n! a_n$; ogni derivata d'ordine superiore ad n è nulla.

Derivazione della somma, prodotto e quoziente di funzioni razionali e di **funzione razionale di funzioni razionali** si fa con le regole generali enunciate al Cap. XXXVI, § 2.

Formula di Taylor. essendo $f(x)$ funz. razionale intera di grado n è $f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots + \frac{h^{(r)}}{r!} f^{(r)}(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$.

Formule di Mac-Laurin. Posto $x = a$, $h = x - a$, dalla formula di Taylor si ha: $f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$. Per $a = 0$, $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{x^r}{r!} f^{(r)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$. È $f(0) = a_n$, $f'(0) = a_{n-1}$, $\dots$, $f^{(r)}(0) = a_{n-r} r!$, $\dots$, $f^{(n)}(0) = a_0 n!$

Significato geometrico di rapporto incrementale e di derivata, vedi Cap. XXXVI, § 1.

Crescenza e decrescenza, massimi e minimi delle funzioni razionali intere: definizioni e loro determinazione mediante le derivate, vedi Cap. XLIII, § 1.

Concavità, convessità e inflessioni delle curve di equaz. $y = f(x)$ con $f(x)$ razionale intera, vedi Cap. XLV, § 8.

B. — Funzioni di più variabili.

5. — Funzione razionale intera di più variabili $x, y, z, \dots u$ è una somma di termini analoghi a $cx^\alpha y^\beta z^\gamma \dots u^\lambda$ in numero finito: la somma $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$ dicesi **grado** del termine; il massimo fra i gradi dei vari termini dicesi **grado** della funzione. Le variabili $x, y, z, \dots u$ si dicono gli **argomenti** della funzione.

Omogenea di grado m dicesi una funzione razionale intera di più variabili se tutti i termini hanno lo stesso grado m . Se $f(x, y, z, \dots u)$ è omogenea di grado m è $f(tx, ty, tz, \dots tu) = t^m f(x, y, z, \dots u)$.

Omogenea completa, dicesi una funzione omogenea se non si può formare un termine di grado m negli argomenti della funzione, di cui uno simile non sia contenuto nella data funzione. Il numero dei termini dissimili, se r sono le variabili è $\binom{m+r-1}{m}$. Una funzione di grado m non omogenea è somma di funzioni omogenee di grado $\leq m$; dicesi **completa** se è somma di funzioni omogenee complete di tutti i gradi $\leq m$. Se ha r variabili, il numero dei termini dissimili è $\binom{r+m}{m}$.

Identiche sono due funzioni razionali intere di più variabili se sono uguali i coeffic. dei termini simili. Una funzione razionale intera assume un unico valore ad ogni sistema di valori delle variabili. Una funzione razionale intera $f(x, y)$ di grado m al più in x è di grado n al più in y è identicamente

nulla se per ciascuno degli $n + 1$ valori dati ad y esistono $m + 1$ valori di x per cui $f(x, y)$ si annulla. Due funzioni razionali intere $f(x, y)$, $g(x, y)$ di grado m al più in x e grado n al più in y sono identiche se per $n + 1$ valori di y esistono $m + 1$ valori di x per cui f e g assumono lo stesso valore.

Divisibilità. Due funzioni razionali intere F e G delle variabili $x, y, z \dots u$, diconsi divisibili se esiste una funzione razionale intera H tale che si abbia identicamente $F \equiv G \cdot H$. **Prima** dicesi una funz. F se non è divisibile per alcuna funzione razionale delle stesse variabili o di alcune di esse. Se la funz. razionale intera in n variabili $F(x, y, z \dots u)$ è di grado m in x e per $m + 1$ valori di x è divisibile per $\varphi(y, z, \dots u)$ razionale intera nelle $n - 1$ variabili $y, z, \dots u$, è divisibile qualunque sia x . Se il prodotto di due funzioni razionali intere delle n variabili $x, y, z, \dots u$ è divisibile per una funzione prima delle sole $y, z, \dots u$ una delle due almeno dev'essere divisibile per questa terza. Se la funzione razionale intera $F(x, y, z, \dots u)$ è prima non può scomporsi neanche in un prodotto di funzioni intere rispetto ad una variabile e razionali rispetto alle altre. Se il prodotto di due funzioni intere delle variabili $x, y, z, \dots u$ è divisibile per una funzione φ razionale intera e prima delle stesse variabili, uno almeno dei due fattori è divisibile per φ .

Problema di interpolazione per le funz. di 2 variabili x e y consiste nella determinazione di una funzione razionale intera $\varphi(x, y)$ di grado non superiore ad m in x e non superiore ad n in y , la quale per le $(m + 1)(n + 1)$ combinazioni x_r, y_s di un valore x_r per x fra $m + 1$ valori dati $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ con uno y_s di y scelto fra $n + 1$ valori dati $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ prende gli $(m + 1)(n + 1)$ prefissati valori u_{rs} ($r = 1, 2 \dots m + 1, s = 1, 2 \dots n + 1$). Posto $F(x) = (x - x_1) \times \dots \times (x - x_{m+1})$, $G(y) = (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_{n+1})$, $F'(x) = \sum_{r=1}^{m+1} \frac{F(x)}{x - x_r}$, $G'(y) = \sum_{s=1}^{n+1} \frac{G(y)}{y - y_s}$ la cercata funzione è

$$\varphi(x, y) = \sum_{r=1}^{m+1} \left[\frac{F(x)}{(x - x_r) F'(x_r)} \sum_{s=1}^{n+1} \frac{G(y)}{(y - y_s) G'(y_s)} \cdot u_{rs} \right]$$

6. — **Derivate parziali delle funzioni razionali di più variabili.** Se F è funzione razionale delle variabili $x_1, x_2, x_3 \dots x_i \dots$ si dice **derivata prima parziale rapporto ad x_i** il polimonio che si ottiene considerando tutte le variabili, tranne la x_i , come costanti ed applicando la derivazione alla funzione della sola x_i che ne risulta: si indica con $D_{x_i} F$. Derivando parzialmente rispetto x_k la derivata parziale di F rispetto ad x_i si ha la derivata seconda parziale di F rispetto a x_i e a x_k : si può indicare con $D_{x_k} D_{x_i} F$. Se si deriva p_1 volte la F rispetto ad x_i e p_2 volte rispetto x_k si ha la derivata parziale di F dell'ordine $p_1 + p_2$ che si indica con $D_{x_i}^{p_1} D_{x_k}^{p_2} F$. In generale con $D_{x_1}^{p_1} D_{x_2}^{p_2} \dots D_{x_r}^{p_r} F$ si indica la derivata parziale dell'ordine $p_1 + p_2 + \dots + p_r$ di F fatta p_1 volte rapporto ad x_1 , p_2 volte rapporto ad $x_2, \dots, p_r$ volte rapporto ad x_r .

Significato geometrico delle derivate parziali di $f(x, y)$ vedi Cap. XXVII, § 1.

Formula di Taylor: Se $F(x_1, x_2, \dots x_r)$ è razionale intera di grado n , vale la formula $F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots x_r + h_r) = \sum D_{x_1}^{p_1} D_{x_2}^{p_2} \dots D_{x_r}^{p_r} F(x_1, x_2, \dots x_r) \frac{h_1^{p_1} h_2^{p_2} \dots h_r^{p_r}}{p_1! p_2! \dots p_r!}$ essendo la somma estesa a tutte le soluzioni in numeri interi positivi o nulli della disuglianza $p_1 + p_2 + \dots + p_r \leq n$.

Formule di Mac-Laurin. Ponendo $x_i = a_i, h_i = x_i - a_i$ si ha $F(x_1, x_2, \dots x_r) = \sum (D_{x_1}^{p_1} D_{x_2}^{p_2} \dots D_{x_r}^{p_r} F(a_1, a_2, \dots a_r) \times \frac{(x_1 - a_1)^{p_1} (x_2 - a_2)^{p_2} \dots (x_r - a_r)^{p_r}}{p_1! p_2! \dots p_r!}$ intendendo che fatte le derivate si ponga $x_1 = a_1, \dots x_r = a_r$. Per $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ essa diviene $F(x_1, x_2, \dots x_r) = \sum D_{x_1}^{p_1} D_{x_2}^{p_2} \dots D_{x_r}^{p_r} F(0, 0, \dots 0) \times \frac{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_r^{p_r}}{p_1! p_2! \dots p_r!}$ intendendo che fatte le derivate si ponga $x_1 = x_2 = \dots x_r = 0$.

Primi teoremi sulle equazioni algebriche

1. — **Equazione algebrica ad un'incognita** si dice l'equaz. $f(x) = 0$ ove $f(x)$ è un polinomio razionale intero; il grado di $f(x)$ si dice **grado** dell'equaz. Nell'equaz. di grado n , $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$, a_0 è detto il 1° coefficiente e non è mai nullo, a_1 il 2° coefficiente $\dots a_{r-1}$ l' r -esimo ecc. Ad es. in $x^4 - 2x^2 + 1$, il 1° coeffic. è 1, il 2° è 0, il 3° è -2 , il 4° è 0, il 5° è 1. Quando diciamo *equazione generale* di grado n , intendiamo che i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ vanno riguardati come $n+1$ parametri indipendenti.

Radici dell'equazione $f(x) = 0$ sono i valori di x per cui $f(x)$ si annulla; **risolvere** l'equazione significa determinarne le radici.

Lemma di Gauss. Se a non è radice di $f(x)$, esiste sempre un numero positivo σ tale che pei numeri complessi h di modulo σ e di argomento determinato sia $|f(a+h)| < |f(a)|$.

La funzione positiva $|f(x)|$ è continua, come tale raggiunge il minimo λ in un punto $x = a$ che si dimostra essere interno al cerchio di centro lo zero e raggio $|a_n|$ supposto $a_n \neq 0$. Pel lemma precedente dev'essere $f(x) = \lambda = 0$; se $a_n = 0$ l'equaz. ammette la radice $x = 0$: si conclude il

Teor. fondamentale dell'Algebra (o di D'Alembert). Ogni equaz. algebrica ammette almeno una radice.

Indipendentemente da questo teorema, si dimostra che una equaz. di grado dispari ammette almeno una radice reale, dall'osservare che in quest'ipotesi $f(x)$ è di segni contrari per x sufficientemente grande in valor assoluto e di segni contrari.

Esistenza di n radici. Dai teor. di D'Alembert e Ruffini si deduce che un'equaz. di grado n ammette n radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ reali o complesse, distinte o no; ed è

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

2. — **Radici multiple.** Se r_1 radici sono uguali ad α_1 e le rimanenti diverse da α_1 , $f(x)$ è divisibile per $(x - \alpha_1)^{r_1}$, ma non per una potenza di $x - \alpha_1$ di esponente maggiore: α_1 si dice **radice multipla dell'ordine r_1 di molteplicità**, od anche **r_1 -pla. Semplice** si dice una radice non multipla.

Se le radici distinte sono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ degli ordini di molteplicità $r_1, r_2, \dots, r_m$ è $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$ e $f(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{r_1} \times (x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_m)^{r_m}$. Codesta decomposizione di $f(x)$ in fattori lineari si può fare in un modo *unico*.

Una radice α di $f(x)$ dell'ordine r di molteplicità è radice della derivata prima $f'(x)$ dell'ordine $r - 1$ di molteplicità, è radice della derivata seconda $f''(x)$ dell'ordine $r - 2$ di molteplicità, $\dots$ è radice semplice della derivata $(r - 1)$ -esima e non è radice della derivata r -esima; viceversa, se α è radice di $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots$, $f^{(r-1)}(x)$ e non di $f^{(r)}(x)$ è radice di $f(x)$ dell'ordine r di molteplicità. Al Cap. XXVII, § 3 si danno criteri per riconoscere l'esistenza di radici multiple.

3. — **Radici complesse di una equaz. a coefficienti reali.** Se $a_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono reali ed $f(x)$ ammette la radice complessa $\alpha + i b$, ammette anche la coniugata $\alpha - i b$; se l'una è multipla, anche l'altra è multipla dello stesso ordine di molteplicità. Le radici complesse sono in numero pari, onde ogni equaz. di grado dispari ammette almeno una radice reale.

Funzioni simmetriche delle radici

1. — **Funzione simmetrica** delle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ è una funzione $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ che rimane inalterata per uno scambio qualsivoglia operato sulle variabili. Fissato per le variabili un sistema di valori, se $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ non è simmetrica, operando sulle variabili le $n!$ permutazioni (Cap. XIII, § 1) la F assumerà valori non tutti uguali; se m sono i valori distinti, si dice che F è *ad m valori*. Se $m < n!$ vi sono sostituzioni (Cap. XV) sulle variabili per le quali F non cambia valore; si dice che F *ammette quelle sostituzioni*. Le sostituzioni ammesse da F formano un gruppo. Il numero dei valori di F è divisore di $n!$

Funzione alternante è una funzione a 2 valori diversi solo pel segno: per uno scambio su 2 lettere, cambia segno. Ogni funzione alternante è divisibile per il determinante Δ di Vandermonde relativo a $x_1, x_2, \dots x_n$ (Cap. XVI, § 4); ed il quoziente è funzione simmetrica. Il quadrato di una funzione alternante è funzione simmetrica. Ogni funzione a 2 valori è della forma $(S\Delta + S') : 2$ ove S, S' sono due funzioni simmetriche.

Una funzione razionale intera simmetrica se non è omogenea è somma di funzioni razionali intere omogenee simmetriche; se ogni termine non contiene uno stesso numero di lettere, la funzione è somma di funz. simmetriche in ognuna delle quali i termini hanno ugual numero di lettere.

2. — **Relazioni fra i coefficienti e le radici di un'equazione algebrica.** Indichi s_1 la somma delle radici $a_1 + a_2 + \dots + a_n$;

s_2 la somma dei prodotti delle radici a 2 a 2, $a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + \dots$; in generale s_k la somma degli $\binom{n}{k}$ prodotti delle radici combinate a k a k ; s_n è il prodotto delle n radici. Dalla identità (1) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$, sviluppando il 2° membro ed eguagliando i coefficienti delle potenze simili si traggono le relazioni $s_1 = -a_1/a_0$; $s_2 = a_2/a_0$; $s_3 = -a_3/a_0$; $\dots$ $s_k = (-1)^k a_k/a_0$; $\dots$ $s_n = (-1)^n a_n/a_0$. Queste formule permettono di costruire un'equaz. che ha assegnate radici. Due equaz. hanno le stesse radici se e solo se i coefficienti sono proporzionali. Le $s_1, s_2, \dots, s_n$ sono simmetriche nelle radici.

3. — **Formule di Newton.** Indichiamo con S_k la somma delle potenze k -esime (k intero) delle radici $a_1, a_2, \dots, a_n$. Le S_k sono funzioni simmetriche delle radici che diconsi **somme delle potenze simili delle radici**. Poichè $f(a_i) = 0$, sarà $\sum_{i=1}^n a_i^k f(a_i) = 0$:

sviluppando si ha: $a_0 S_{n+k} + a_1 S_{n+k-1} + a_2 S_{n+k-2} + \dots + a_{n-1} S_{k+1} + a_n S_k = 0$ equaz. lineare ricorrente fra $n+1$ somme S_k consecutive. Note $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ si trova S_n e le consecutive facendo successivamente $k = 1, 2, \dots$ nella formula preced. Derivando ambo i membri della (1) ed eguagliando i coefficienti delle potenze simili di x , si hanno le relazioni (**formule di Newton**) $S_0 = n$; $a_0 S_1 = -a_1$; $a_0 S_2 + a_1 S_1 = -2 a_2$; $\dots$; $a_0 S_k + a_1 S_{k-1} + a_2 S_{k-2} + \dots + a_{k-1} S_1 = -k a_k$; $\dots$ $a_0 S_{n-1} + a_1 S_{n-2} + \dots + a_{n-2} S_1 = -(n-1) a_{n-1}$ da cui $S_0 = n$; $S_1 = -a_1/a_0$; $S_2 = (a_1^2 - 2 a_0 a_2)/a_0^2$; $S_3 = -(a_1^3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 3 a_0^2 a_3)/a_0^3$; $S_4 = (a_1^4 - 4 a_1^2 a_0 a_2 + 4 a_1 a_0^2 a_3 + 2 a_0^2 a_2^2 - 4 a_0^3 a_4)/a_0^4$; $\dots$. Si ha ancora $a_1 = -S_1 a_0$; $a_2 = a_0 (S_1^2 - S_2)/2$; $a_3 = -a_0 (S_1^3 - 3 S_1 S_2 + 2 S_3)/3!$; $a_4 = a_0 (S_1^4 + 3 S_2^2 - 6 S_2 S_1^2 + 8 S_3 S_1 - 6 S_4)/4!$...

Peso di un prodotto di lettere affette da indici $a_i^{m_i} a_j^{m_j} \dots a_l^{m_l}$ è il numero $i m_i + j m_j + \dots + l m_l$.

Isobarica è una funzione razionale intera di lettere affette

da indici se il peso dei suoi termini è uguale; il peso comune ai suoi termini dicesi *peso* della funzione.

Le formule di Newton fanno vedere che se $a_0 = 1$, le somme S_k sono esprimibili mediante funzioni razionali intere isobariche dei coefficienti dell'equazione, di peso k .

4. — **Funzioni simmetriche elementari** diconsi le funzioni simmetriche ogni termine delle quali ha uno stesso numero di lettere.

Le funzioni simmetriche ad 1 lettera sono le somme di potenze simili; se gli argomenti sono le radici di un'equaz. algebrica sono esprimibili razionalmente pei coefficienti. Una funz. simmetrica elementare a due lettere nelle radici è della forma $F = \sum a_1^{r_1} a_2^{r_2}$; è chiaro che $F = S_{r_1} S_{r_2} - S_{r_1 + r_2}$, le S_k rappresentando le somme delle potenze k -esime delle radici; onde F è esprimibile razionalmente per i coefficienti dell'equazione. Una funzione elementare a p lettere nelle radici è della forma $F = \sum a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_p^{r_p}$: ora se $G = \sum a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_{p-1}^{r_{p-1}}$ si ha $F' = S_{r_p} G - \sum_{i=1}^{p-1} (\sum a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_i^{r_i + r_p} a_{i+1}^{r_{i+1} + 1} \dots a_{p-1}^{r_{p-1}})$

ove il 2° membro è formato da S_{r_p} e da funzioni elementari a $p-1$ lettere. Ammesso che le funzioni elementari a $p-1$ lettere siano esprimibili razionalmente pei coefficienti dell'equaz. risulta altrettanto per le funzioni elementari di p lettere. Ne risulta il **teor. fondamentale delle funzioni simmetriche**: Ogni funzione razionale intera simmetrica delle radici di un'equazione algebrica è esprimibile in funzione razionale (intera se $a_0 = 1$) dei coefficienti; e ciò in un sol modo.

Se $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$ è razionale intera simmetrica nelle radici $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$ è la funzione razionale intera in $a_1, a_2, \dots, a_n$ (si suppone $a_0 = 1$) per cui $S = R$, il grado di S in ogni singola radice è uguale al grado di R nei coefficienti, il grado di S nel complesso delle radici è il peso di R . Se S è omogenea di grado m , la R è isobarica di peso m .

La equaz. $f(x): (x - a_1) = 0$ ha le radici $a_2 \dots a_n$, onde ogni funz. razionale intera simmetrica $\Phi(a_2, \dots, a_n)$ si può espi-

mere in funzione razionale intera di $a_1 a_2 \dots a_n$, e di a_1 , giacchè i coeffic. dell'equaz. sono espressioni razionali di $a_1 a_2 \dots \dots a_n$, a_1 (Regola di Ruffini, Cap. XXIV, § 3). Il grado in a_1 si dimostra essere non superiore a $n - 1$.

5. — **Calcolo delle funzioni simmetriche.** Data una funz. razionale intera simmetrica delle radici di $f(x) = 0$, $S(a_1, a_2, \dots a_n)$, si tratta di calcolare $R(a_1, a_2, \dots a_n)$. Indichiamo il **metodo di Cauchy** che riposa sulle considerazioni seguenti. Se si ordina S per le potenze di a_1 , $S = T_0 a_1^m + T_1 a_1^{m-1} + \dots + T_m$ saranno $T_0, T_1, \dots T_m$ simmetriche in $a_2, \dots a_n$ epperò per l'ultimo teor. del § preced. esprimibili in funzione razionale intera di $a_1, a_1, a_2, \dots a_n$, cioè sarà (2) $S = U_0 a_1^p + U_1 a_1^{p-1} + \dots + U_{p-1}$ con $U_0, U_1, \dots U_{p-1}$ razionali intere in $a_1 a_2 \dots a_n$. Se si pone $a_1 = z$, indicando con $Q(z)$ il quoziente e con $G(z)$ il resto della divisione di $S(z)$ per $f(z)$ sarà $S(z) = f(z) Q(z) + G(z)$, con $G(z) = V_0 z^{n-1} + V_1 z^{n-2} + \dots + V_{n-1}$ ove le V sono razionali intere in $a_1, a_2, \dots a_n$; per $z = a_1$ si ha $S(a_1, a_2 \dots a_n) = G(a_1)$; ma poichè S è simmetrica sarà $G(a_1) = G(a_2) \dots = G(a_n)$, dal che discende $S = V_{n-1}$ cioè $R = V_{n-1}$. Lo sviluppo (2) è formale, ma quando si divide $S(z, a_2, \dots a_n)$ per $f(z)$, il termine indipendente da z nel resto sarà funz. razionale intera di $a_1, a_2, \dots a_n$ e delle $a_2 a_3 \dots a_n$, che contiene $n - 1$ radici. Col ripetere questo procedimento si farà la determinazione effettiva di R in funz. razionale intera di $a_1, a_2 \dots a_n$.

6. — **Funzioni simmetriche delle soluzioni di un sistema di più equazioni.** Date le due equaz. $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$ con F razionale intero di grado m e G di grado n , una funzione delle soluzioni $(a_1, \beta_1), (a_2, \beta_2) \dots (a_{mn}, \beta_{mn})$ (il loro numero è in generale mn , Cap. XXVII, § 3) dicesi **simmetrica** quando non viene alterata nella forma per qualsiasi scambio fra le coppie (a_r, β_r) . Simmetriche sono ad es. $\Sigma a_r \beta_r$, $\Sigma a_r^h \beta_r^h$, $\prod_{r,s=1}^{mn} (a_r \beta_r - a_s \beta_s)^2$. Le funzioni razionali intere simmetriche si decompongono in parti omogenee e queste in funzioni elementari ad 1, 2, $\dots$ coppie. Ad es. $\Sigma a_r^h \beta_r^k$ è la funzione

elementare ad 1 coppia, $\Sigma \alpha_r^h \beta_r^k \alpha_s^p \beta_s^q$ è la funz. elementare a due coppie ecc. Ogni funzione razionale intera simmetrica delle soluzioni comuni del sistema è esprimibile in funzione razionale dei coefficienti delle due equazioni.

CAPITOLO XXVII.

Risultante - Eliminazione - Discriminante

1. — **Radici comuni a 2 equazioni.** Date 2 equazioni $f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m = 0$; $g(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n = 0$, ogni radice comune è radice del massimo comune divisore di $f(x)$ e $g(x)$; viceversa ogni radice del M. C. D. di $f(x)$ e $g(x)$ è radice comune alle 2 equaz. $f(x) = 0$, $g(x) = 0$. Riconoscere se v'hanno radici comuni è operazione razionale, in quanto basta la formazione del massimo comune divisore $M(x)$ fra $f(x)$ e $g(x)$ (Cap. XXIV, § 3). Il grado p di $M(x)$ dà il numero delle radici comuni; la determinazione delle ulteriori radici dipende dalle 2 equaz. $f(x): M(x) = 0$, $g(x): M(x) = 0$, dei gradi $m - p$, $n - p$.

2. — **Risultante** di 2 equaz. $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ dicesi una funzione razionale dei coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_m$; $b_1, b_2, \dots, b_n$ nulla se e soltanto se $f(x)$ e $g(x)$ hanno radici comuni.

Esponiamo vari metodi per la formazione del risultante:

a) **Metodo delle funzioni simmetriche:** siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ le m radici di $f(x) = 0$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ le n radici di $g(x) = 0$. Sarà $f(\beta_i) = (\beta_i - \alpha_1)(\beta_i - \alpha_2) \dots (\beta_i - \alpha_m)$; epperò: $f(\beta_1) \cdot f(\beta_2) \dots f(\beta_n) = \prod_{i,h} (\beta_i - \alpha_h)$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $h = 1, 2, \dots, m$) è funzione simmetrica delle radici α e β , intera omogenea del grado mn , del grado n in ogni radice α , di grado m in ogni radice β ; si

annulla se e solo se qualche radice α eguaglia qualche radice β . Essa è esprimibile in una funzione $R(a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)$ razionale nei coefficienti delle 2 equaz.; è del grado n della 2^a equaz. nei coefficienti a_i della 1^a; è del grado m della 1^a equaz. nei coefficienti b_i della 2^a; è del grado $m + n$ nel complesso dei coefficienti; è isobarica di peso $m n$ tanto nei coefficienti della prima equaz. quanto in quelli della 2^a, quanto nel complesso dei coefficienti delle 2 equaz. Essa è il risultante. Se in $f(x)$, $g(x)$ non è $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, si ottiene il risultante sostituendo $a_i : a_0$ ad a_i e $b_i : b_0$ a b_i .

b) Metodo del massimo comun divisore. Si cerchi il M. C. D. fra $f(x)$ e $g(x)$; l'operazione termina con un resto che è funzione dei soli coefficienti, il quale è zero se è solo se le 2 funz. hanno divisori comuni. Se il resto è un polinomio di grado m nei coeffic. a_i e di grado n nei coeffic. b_i , è il risultante.

c) Metodo dialitico (o di *Sylvester*). Si formi il sistema $f(x) = 0$, $x f(x) = 0$, $x^2 f(x) = 0, \dots, x^{n-1} f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $x g(x) = 0$, $x^2 g(x) = 0, \dots, x^{m-1} g(x) = 0$ il quale si potrà considerare come un sistema di $m + n$ equaz. lineari nelle $m + n - 1$ incognite $x, x^2, \dots, x^{m+n-1}$ compatibile se v'ha una radice comune a $f(x) = 0$ e a $g(x) = 0$. Condizione di compatibilità è l'annullarsi del determinante dei coefficienti e termini noti; il determinante è il risultante.

d) Metodo di Eule:Bezout. Se $f(x)$ e $g(x)$ hanno un fattor comune si possono determinare due polinomi $\varphi(x) = c_0 x^{m-1} + c_1 x^{m-2} + \dots + c_{m-1}$, $\gamma(x) = d_0 x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \dots + d_{n-1}$ dei gradi rispettivi inferiori di un'unità a quelli di $f(x)$ e $g(x)$ per cui (1) $f(x) \gamma(x) - g(x) \varphi(x) = 0$; se $f(x)$ e $g(x)$ sono primi fra loro, si possono determinare i detti polinomi in guisa che sia (2) $f(x) \gamma(x) - g(x) \varphi(x) = 1$. Eguagliando a zero i coeffic. delle potenze di x ed il termine noto in (1) si ha un sistema di $m + n$ equaz. lineari nei $m + n$ coefficienti c_i e d_i considerate come incognite che è possibile se e solo se il determinante D dei coefficienti (che sono gli

a_i e i b_i) è nullo. Se $D \neq 0$ è possibile il sistema di $m + n$ equaz. negli stessi $m + n$ coefficienti c_i e d_i che si ottiene eguagliando a zero le potenze di x e a 1 il termine noto nel 1° membro di (2), quindi essere $D \neq 0$ esprime la condizione che $f(x)$ e $g(x)$ sian primi fra loro. D è il risultante.

e) **Metodo di Bezout-Cauchy.** Se $m \geq n$ si moltiplichi $g(x)$ per x^{m-n} ; poi si scriva $f(x) = x^{m-r} (x^r + a_1 x^{r-1} + \dots + a_r) + (a_{r+1} x^{m-r-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m) = x^{m-r} A_r + A'_r$; $x^{m-n} g(x) = x^{m-r} (x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_r) + (b_{r+1} x^{m-r-1} + \dots + b_{n-1} x^{m-n+1} + b_n x^{m-n}) = x^{m-r} B_r + B'_r$. Se vi sono radici comuni a $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ sono radici delle n equaz. $B_r A'_r - B'_r A_r = 0$ ($r = 0, 1, 2, \dots, n-1$) e delle $m-n$ equaz. $g = 0$, $x g = 0, \dots, x^{m-n-1} g = 0$, e però il sistema delle m equaz. considerato come lineare in $x, x^2, \dots, x^{m-1}$ deve essere possibile, ciò che accade quando il determinante dei coefficienti e termini noti è nullo. Questo determinante è il risultante.

Equazione risultante è l'equaz. che si ottiene eguagliando a zero il risultante: esprime la condizione perchè abbiano radici comuni le equaz. con i coefficienti delle quali l'equaz. risultante è formata. Ad es. se $f = x^2 + p x + q$, $g = x^2 + p' x + q'$ l'equaz. risultante è $(q' - q)^2 - (p' - p)(p q' - q p') = 0$.

3. — **Eliminazione fra due equazioni algebriche.** Siano $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$ due equaz. algebriche in x e y dei gradi m ed n rispettiv. nel complesso delle 2 variabili. Si faccia il risultante di F e G considerando come sola incognita la x ; sarà funzione della y , $R(y)$, generalmente del grado $m n$; a ciascuna delle $m n$ soluzioni β dell'equazione $R(y) = 0$ corrisponde una soluzione α comune a $F(x \beta) = 0$, $G(x \beta) = 0$.

Teor. di Bezout: due equaz. algebriche in x, y dei gradi rispettivi m e n hanno, in generale, $m n$ soluzioni. Geometricamente si può dire che due curve piane algebriche (Cap. III, § 1) degli ordini m ed n rispettivamente hanno in generale, $m n$ punti in comune.

Eliminazione fra tre equaz. algebriche. Siano date 3 equaz. algebriche in x, y, z , $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$, $H(x, y, z) = 0$ dei gradi rispettiv. m, n, p . Eliminando y fra F e G si ottenga l'equaz. risultante $R(x, z) = 0$; eliminando z si ottenga l'equaz. risultante $R_1(y, z) = 0$. Supposte $(\alpha_i(z), \beta_i(z))$ ($i = 1, 2, \dots, m n$) le $m n$ coppie di soluzioni di $R = 0$, $R_1 = 0$, riguardando in esse come incognite solo x e y (soluzioni che sono funzioni di z) si formi l'espressione $T(z) = \prod_{i=1}^{m n} H(\alpha_i(z), \beta_i(z), z)$ la quale è simmetrica (Cap. XXVI, § 6) nelle coppie $(\alpha_i(z), \beta_i(z))$ e perciò razionale nei coefficienti della F e della G e in z che entra razionalmente nei coeffic. di x e y in F e G . La equazione algebrica $T(z) = 0$ (che si costruisce razionalmente) dicesi risultante delle tre equaz. $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$ ottenuta dall'eliminazione di x e y : è di grado $m n p$. Ad ogni soluzione γ di $T(z) = 0$ corrisponde una coppia di soluzioni $\alpha_i(\gamma)$ $\beta_i(\gamma)$ che insieme a γ costituiscono una terna di soluzioni comuni alle 3 date equaz. In generale, le 3 equaz. hanno $m n p$ terne di soluzioni. Geometricamente si può dire che tre superfici algebriche degli ordini m, n, p (Cap. III, § 3) hanno, in generale, $m n p$ punti in comune.

Eliminazione fra k equaz. algebriche. k equaz. algebriche $F_i(x_1, x_2 \dots x_k)$ ($i = 1, 2 \dots k$) fra k incognite $x_1, x_2, \dots x_k$ dei gradi $r_1, r_2 \dots r_k$ hanno in generale $r_1 r_2 \dots r_k$ soluzioni.

4. — **Discriminante.** Il risultante di $f(x) = 0$ e $f'(x) = 0$ è funzione razionale dei coefficienti a_i di $f(x)$ nulla se e solo se ci sono radici comuni a $f(x)$ e alla sua derivata $f'(x)$, cioè se vi sono per $f(x) = 0$ radici multiple (Cap. XXV, § 2). Siffatta funzione razionale dei coeffic. a_i dicesi **discriminante** di $f(x) = 0$. Ogni metodo che dà il risultante si applica alla ricerca del discriminante, il quale però si può ottenere anche con queste considerazioni. Indichino $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ le n radici di $f(x) = 0$ supposta di grado n : il quadrato del determinante di Vandermonde relativo ai numeri $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ è funzione simmetrica delle radici (Cap. XXVI, § 1) che si annulla se e solo

se v'hanno radici α_i uguali, cioè se v'hanno radici multiple. Ma codesto quadrato (Cap. XVI, § 5) è

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$$

ove è $S_k = a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k$. Esprimendo queste S_k razionalmente per i coefficienti a_i (Cap. XXVI, § 3) si ha il discriminante, il quale è di peso $n(n-1)$ e grado $2n-2$. Ad esempio per l'equaz. $x^2 + px + q = 0$ il discriminante è $p^2 - 4q$; per l'equaz. $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ il discriminante è $a_1^2 a_2^2 - 4 a_2^3 - 4 a_1^3 a_3 + 18 a_1 a_2 a_3 - 27 a_3^2$.

Dividendo $f(x)$ pel M. C. D. fra $f(x)$ e $f'(x)$, si ottiene una funzione $g(x)$ che ha tutte le radici di $f(x)$ ma semplici. Determinare l'equazione $g(x) = 0$ dicesi **liberare** la $f(x) = 0$ dalle radici multiple.

CAPITOLO XXVIII.

Sostituzioni lineari. Trasformazioni nelle equazioni

1. — **Sostituzioni lineari.** Se al posto di n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ si mettono n forme lineari in n variabili $y_1, y_2, \dots, y_n$, cioè si pone (1) $x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \dots + a_{in} y_n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) una qualunque funzione $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diverrà una funzione delle $y_1, y_2, \dots, y_n$, $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ che dicesi **trasformata** della F . **Sostituzione** (o **trasformazione**) **lineare** è l'operazione definita dalle (1) mediante la quale si passa dalla F alla Φ .

Modulo della sostituzione è il determinante $A = |a_{im}|$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $m = 1, 2, \dots, n$): se si suppone $A \neq 0$, risolvendo

le (1) per $y_1, y_2, \dots y_n$ si ottiene (2) $y_k = \frac{A_{1k}}{A} x_1 + \frac{A_{2k}}{A} x_2 + \dots + \frac{A_{nk}}{A} x_n$ ($k = 1, 2 \dots n$) (A_{rk} reciproco di a_{rk} in A) che dicesi la **sostituzione inversa** della (1), giacchè applicata alla Φ riproduce la F : il modulo della sostituzione inversa è $1 : A$.

Sostituzioni lineari su forme lineari. Date n forme lineari $U_i = h_{i1} x_1 + h_{i2} x_2 + \dots + h_{in} x_n$ ($i = 1, 2, \dots n$) ed operando su esse la sostituzione (1) si ottengono n forme lineari $V_i = k_{i1} y_1 + k_{i2} y_2 + \dots + k_{in} y_n$ ove è $k_{im} = h_{i1} a_{1m} + h_{i2} a_{2m} + \dots + h_{in} a_{nm}$. Il determ. delle n forme V_i è uguale al prodotto del determ. delle n forme U_i pel modulo della sostituzione.

Prodotto di sostituzioni. Se dopo aver operata la sostituzione (1) si eseguisce la sostituzione (3) $y_i = b_{i1} z_1 + b_{i2} z_2 + \dots + b_{in} z_n$ ($i = 1, 2, \dots n$) di modulo B si dice che si è eseguito il prodotto della seconda sostituzione per la prima: equivale alla sostituzione $x_i = c_{i1} z_1 + c_{i2} z_2 + \dots + c_{in} z_n$ ($i = 1, 2, \dots n$), ove è $c_{ih} = a_{i1} b_{1h} + a_{i2} b_{2h} + \dots + a_{in} b_{nh}$, e di modulo $A \cdot B$ (cioè uguale al prodotto dei moduli delle 2 sostituzioni).

Sostituzione ortogonale è quella il cui modulo è un determ. ortogonale (Cap. XVI, § 6): il modulo è ± 1 . Anche l'inversa è sostituzione ortogonale. Le formule definienti un passaggio da un sistema di coordinate cartesiane ortogonali ad un'altro pure ortogonale (Cap. I § 4, 11) costituiscono sostituzioni ortogonali.

2. — **Forma di grado k in n variabili** è un polinomio omogeneo di grado k nelle n variabili $x_1, x_2, \dots x_n$. Una forma dicesi **binaria, ternaria, quaternaria** a seconda che è a 2, a 3, a 4 variabili; si dice **lineare, quadratica, cubica, biquadratica** a seconda che il suo grado è 1, 2, 3 o 4.

Linearmente dipendenti si dicono m forme di grado k in n variabili $V_i = \sum a_{i; k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ ($i = 1, 2 \dots m$) la somma estesa alle $\binom{n+k-1}{k}$ soluzioni intere positive $k_1, k_2, \dots k_n$ dell'equaz. $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$, se esistono m numeri non tutti nulli $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ pei quali si abbia identicam. $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_m V_m = 0$.

Linearmente indipendenti si dicono le V_i nel caso contrario. Il numero r di forme V_i indipendenti è la caratteristica r della matrice di m linee e $\binom{n+k-1}{k}$ colonne $|a_i; k_1 k_2 \dots k_n|$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$).

Definita si dice una forma, se qualunque sia il sistema che si attribuisce alle variabili, purchè non si facciano tutte nulle, è sempre diversa da zero e conserva lo stesso segno e precisamente **definita positiva** o **definita negativa** a seconda che il segno è positivo o negativo; **indefinita** se vi sono sistemi di valori per cui essa è positiva ad altri per cui è negativa; **semidefinita** se vi sono sistemi di valori per cui si annulla mentre per tutti gli altri ha un medesimo segno. Se $\Psi =$

$= \sum_{i=0}^n u_i x^{n-i} y^i$ è polinomio in x e y di grado n in cui i coefficienti u_i dipendono da x e y , $\lim_{x=y=0} u_i = a_i$ e la forma

$\Phi = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} y^i$ è indefinita, in ogni intorno dell'origine vi sono punti in cui Ψ è positiva e punti in cui è negativa; se Φ è definita, può essergli assegnato un intorno dell'origine in cui tutti i punti del quale Ψ ha il medesimo segno di Φ .

3. — **Quadriche** diconsi anche le *forme quadratiche* di n variabili (4) $U = h_{11} x_1^2 + h_{22} x_2^2 + \dots + h_{nn} x_n^2 + 2h_{12} x_1 x_2 + 2h_{13} x_1 x_3 + 2h_{23} x_2 x_3 + \dots + 2h_{n-1, n} x_{n-1} x_n = \sum_{i,j} h_{ij} x_i x_j$ ove si suppone che ad i e j debbano separatamente attribuirsi tutti i numeri da 1 ad n ed è manifestamente $h_{rs} = h_{sr}$.

Discriminante della quadrica è il determinante simmetrico (Cap. XVI, § 3) $\Delta = |h_{ij}|$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$).

Una sostituzione lineare (1) trasforma la quadrica (4) in una quadrica $\sum_{r,s} k_{rs} y_r y_s$ il cui discriminante è dato dal discriminante della (4) pel quadrato del modulo della sostituzione. Se una quadrica è una forma definita il discriminante e i suoi minori principali (Cap. XVI, § 1) sono diversi da zero.

Quadriche riducibili. Se la quadrica (4) si può esprimere per m ($< n$) variabili $y_1, y_2, \dots, y_m$, avendo posto $y_i = k_{i1} x_1 + \dots + k_{in} x_n$ ($i = 1, 2, \dots, m$) si dice **riducibile**. Se il discriminante della (4) è $\neq 0$ la quadrica è irriducibile; se la caratteristica (Cap. XVI, § 1) del discriminante è r è riducibile ad r variabili.

Forma canonica d'una quadrica irriducibile è la forma a cui si può con una sostituzione lineare ridurre, nella quale compaiono solo i quadrati delle variabili. Denoti A_p il minore principale del discriminante che da questo si ottiene sopprimendo le prime $n - p$ righe e colonne; allora se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono tutti diversi da zero, la quadrica si può ridurre a forma canonica mediante la sostituzione del tipo $y_1 = x_1, y_2 = k_{21} x_1 + x_2, y_3 = k_{31} x_1 + k_{32} x_2 + x_3, \dots, y_{n-1} = k_{n-1,1} x_1 + k_{n-1,2} x_2 + \dots + k_{n-1,n-2} x_{n-2} + x_{n-1}; y_n = k_{n,1} x_1 + k_{n,2} x_2 + \dots + k_{n,n-1} x_{n-1} + x_n$. Il numero dei termini positivi sono le permanenze (Cap. XXXI, § 1) e quello dei negativi le variazioni della successione $1, A_1, A_2, \dots, A_n$. La riduzione di una quadrica a forma canonica si può fare in infiniti modi, ma il numero dei termini dello stesso segno è costante (**legge d'inerzia**) ed è data dai numeri delle permanenze e variazioni dianzi indicate. Perchè una quadrica sia definita è necessario e sufficiente che $A_1, A_2, \dots, A_n$ siano diversi da zero e la successione $1, A_1, A_2, \dots, A_n$ presenti tutte permanenze (*quadrica definita positiva*) o tutte variazioni (*quadrica definita negativa*).

4. — **Invarianti di una forma.** Se U è una forma di k^0 grado in n variabili i cui coefficienti indichiamo genericamente con $a, b, c, \dots$ si applichi ad U una sostituzione lineare di modulo A e si indichino con $a' b' c' \dots$ i coefficienti della forma trasformata V . Sia $F(a, b, c, \dots)$ un'espressione formata coi coefficienti di U ; $F(a', b', c', \dots)$ la stessa espressione fatta coi coefficienti omologhi di V . Se $F(a', b', c', \dots) = A^r F(a, b, c, \dots)$ si dice F un **invariante** della forma. Se $r = 0$ l'invariante dicesi **assoluto**. Se $F_1(a', b', \dots) = A^{r_1} F_1(a, b, \dots), F_2(a', b', \dots) = A^{r_2} F_2(a, b, \dots),$

$A^{r_2} F_1 : A^{r_1} F_2$ è invariante assoluto. Se una forma non ha invariante assoluto, non può avere più di un invariante.

Invariante ortogonale è un'espressione $F(a, b, \dots)$ invariante per tutte e sole le sostituzioni ortogonali.

Invariante simultaneo di più forme. Se $a_i, b_i, c_i, \dots$ sono i coefficienti di una forma U_i , **invariante simultaneo** di p forme $U_1, U_2, \dots, U_p$ dicesi un'espressione $F(a_1, b_1, c_1, \dots, a_p, b_p, c_p, \dots)$ formata con i coeff. delle forme stesse tale che se si calcola la stessa espressione sostituendo ad $a_i, b_i, c_i, \dots$ i coeff. $a'_1, b'_1, c'_1, \dots, a'_p, b'_p, c'_p, \dots$ della trasformata di U_i mediante una certa sostituzione, essa risulta uguale a $F(a_1, b_1, c_1, \dots, a_p, b_p, c_p, \dots)$ moltiplicata per una potenza del modulo della sostituzione, cioè (5) $F(a_1, b_1, c_1, \dots, a_p, b_p, c_p, \dots) = A^r F(a'_1, b'_1, c'_1, \dots, a'_p, b'_p, c'_p, \dots)$, A essendo il modulo della sostituzione.

Covariante di una o più forme è un'espressione invariante che contenga le variabili.

Invariante (o covariante) razionale è l'invariante (o covariante) espresso razionalmente pei coefficienti della forma (o delle forme); **invariante algebrico** è l'invariante che richiede per essere espresso in funzione dei coefficienti la risoluzione di equaz. algebriche; **trascendente** è l'invariante negli altri casi.

Invariante della quadrica (4) è il suo discriminante ed è unico.

Invarianti ortogonali della stessa quadrica sono le somme dei minori principali simili del suo discriminante (Cap. XXVII, § 4). Se $f(x, y)$ è una forma binaria di grado n e $\alpha_i : \beta_i$ sono le radici nel rapporto $x : y$ dell'equaz. $f(x, y) = 0$, ogni binomio $\beta_i x - \alpha_i y$ è un *covariante algebrico* di $f(x, y)$; il determinante $\alpha_s \beta_s - \alpha_s \beta_s$ è un *invariante algebrico* della $f(x, y)$; e quindi ogni espressione omogenea dei determinanti stessi è un *invariante algebrico*; il discriminante è un *invariante razionale*.

Date due forme $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, ogni espressione omogenea costruita coi binomi $\beta_i x - \alpha_i y$, $\beta'_j x - \alpha'_j y, \dots, \alpha_i \beta'_j - \alpha'_j \beta_i$ ($\alpha_i : \beta_i$ essendo le radici di $f = 0$, e $\alpha_j : \beta_j$ quelle di $g = 0$) è un *covariante simultaneo* delle f e g ed ogni espressione omo-

genea costruita coi binomi $\alpha_i \beta'_j - \alpha'_j \beta_i$ è un invariante simultaneo delle forme f e g . Ciò è estendibile al caso di più forme. Il risultante di due forme è un *invariante simultaneo*.

Jacobiano o determinante funzionale di due forme $f(x, y) = 0$.

$g(x, y) = 0$ è il determinante $\begin{vmatrix} D_x f & D_y f \\ D_x g & D_y g \end{vmatrix}$ il quale è un *covariante simultaneo* di f e g . La potenza di A nella (5) è la *prima*.

Hessiano di $f(x, y)$ è il *jacobiano* di $D_x f, D_y f$ cioè

$\begin{vmatrix} D_x D_x f & D_y D_x f \\ D_x D_y f & D_y D_y f \end{vmatrix}$. La potenza di A nella (5) è la *seconda*.

5. — **Invarianti e covarianti delle forme binarie quadratiche, cubiche e biquadratiche.** a) La forma binaria quadratica $a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2$ ha l'invariante $a_1^2 - 4 a_0 a_2$ che è il suo discriminante.

b) La forma binaria cubica $f = a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 x y^2 + a_3 y^3$ ha come invariante il discriminante $D = a_1^2 a_2^2 - 4 a_0 a_2^3 - 4 a_1^3 a_3 + 18 a_0 a_1 a_2 a_3 - 27 a_0^2 a_3^2$ di 4° grado e peso 6. Un covariante quadrico è l'Hessiano $H = \begin{vmatrix} 3 a_0 x + a_1 y & a_1 x + a_2 y \\ a_1 x + a_2 y & a_2 x + 3 a_3 y \end{vmatrix} = (3 a_0 a_2 - a_1^2) x^2 + (9 a_0 a_3 - a_1 a_2) xy + (3 a_1 a_3 - a_2^2) y^2$ il cui discriminante è uguale al discriminante della forma cubica moltiplicato per -3 . Un covariante cubico è $Q =$

$\begin{vmatrix} (6 a_0 a_2 - 2 a_1^2) x + (9 a_0 a_3 - a_1 a_2) y & (9 a_0 a_2 - a_1 a_2) x + (6 a_1 a_3 - 2 a_2^2) y \\ 3 a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2 & a_1 x^2 + 2 a_2 xy + 3 a_3 y^2 \end{vmatrix}$ jacobiano di H e f . La potenza del modulo della sostituzione è 2 per H , 3 per Q , 6 per D . Vale la relazione $Q^2 = -(4 H^3 + 27 f^2 D)$.

c) La forma binaria biquadratica $f = a_0 x^4 + a_1 x^3 y + a_2 x^2 y^2 + a_3 x y^3 + a_4 y^4$ ha i 3 invarianti: $I = a_2^2 - 3 a_1 a_3 + 12 a_0 a_4$, $J = 9 a_1 a_2 a_3 + 72 a_0 a_2 a_4 - 2 a_2^3 - 27 a_0 a_3^2 - 27 a_1^2 a_4$, il discriminante $D = (4 I^3 - J^2) : 27$; la potenza del modulo della sostituzione è 4 per I , 6 per J e 12 per D . Ha come variante l'Hessiano

$$H = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 12 a_0 x^2 + 6 a_1 xy + 2 a_2 y^2 & 3 a_1 x^2 + 4 a_2 xy + 3 a_3 y^2 \\ 3 a_1 x^2 + 4 a_2 xy + 3 a_3 y^2 & 2 a_2 x^2 + 6 a_3 xy + 12 a_4 y^2 \end{vmatrix}.$$

Sono *invarianti algebrici* $A = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (\alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3)$,
 $B = (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) (\alpha_4 \beta_2 - \alpha_2 \beta_4)$, $C = (\alpha_1 \beta_4 - \alpha_4 \beta_1) (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)$
 essendo $\alpha_i : \beta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) le 4 radici di $f = 0$. È poi:
 $I = a_0^2 (A^2 + B^2 + C^2) : 2$, $J = a_0^3 (A - B) (B - C) (C - A)$,
 $D = a_0^6 A^2 B^2 C^2$.

6. — **Riduzione a forma canonica della forma binaria cubica.** Si voglia ridurre la (6) $f(xy) = a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 x y^2 + a_3 y^3$ in cui $D \neq 0$, alla forma canonica (7) $z^3 + u^3$ mediante una sostituz. lineare $z = ax + by$, $u = cx + dy$; si tratta di determinare a, b, c, d . Indichi δ il modulo della sostituzione, H, D, Q le forme invariantive di (6), $\bar{H}, \bar{D}, \bar{Q}$ le stesse relative a (7) cioè $\bar{H} = 9zu$, $\bar{D} = -27$, $\bar{Q} = 27(z^3 - u^3)$. È (§ 6, b) $H = \delta^2 \bar{H}$, $D = \delta^6 \bar{D}$, $Q = \delta^3 \bar{Q}$; allora $\delta = \sqrt[6]{-D : \bar{D}}$,
 $H = 3 \sqrt[3]{-\bar{D}} \cdot zu$. Ma se si pone $H = Ax^2 + Bxy + Cy^2$
 $H = A \left(x - \frac{B + \sqrt{-3\bar{D}}}{2A} y \right) \left(x - \frac{B - \sqrt{-3\bar{D}}}{2A} y \right)$ si avrà
 $z = \lambda \left(x - \frac{B + \sqrt{-3\bar{D}}}{2A} y \right)$, $u = \mu \left(x - \frac{B - \sqrt{-3\bar{D}}}{2A} y \right)$ ove
 $\lambda\mu = A : 3 \sqrt[3]{-\bar{D}}$.

7. — **Trasformazioni lineari di una variabile.** Sia $f(x_1, x_2)$ una forma binaria omogenea di grado n e si eseguisca la sostituzione $x_1 = az_1 + bz_2$, $x_2 = cz_1 + dz_2$. Se si pone $x = x_1 : x_2$ la $f(x_1, x_2)$ divisa per x_2^n diventa una funzione razionale di grado n in x , $f(x)$; la trasformata di $f(x_1, x_2)$, cioè $f(az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2)$ dividendola per $(cz_1 + dz_2)^n$, e ponendo $z_2 : z_1 = z$, diviene $f \left(\frac{az + b}{cz + d} \right)$ che dicesi la **trasformata** di $f(x)$ mediante la **trasformazione lineare** $x = \frac{az + b}{cz + d}$. Il determinante $\delta = ad - cb$ dicesi ancora il modulo della trasformazione. La trasformazione $x = (az + b) : (cz + d)$ si ottiene con l'applicazione successiva (**prodotto delle trasformazioni**) $x = z_1 + a : c$; $z_1 = -\delta z_2 : c$; $z_2 = 1 : z_3$; $z_3 = z_4 + d$; $z_4 = cz$.

Trasformazioni lineari semplici sono $x = z + h$ (*traslazione*)
 $x = kz$ (*proporzionalità*); $x = 1 : z$ (*reciprocità*).

8. — Trasformazioni delle equazioni algebriche.

a) **Trasformazione** $x = -z$. Se a è una radice di $f(x) = 0$, $-a$ è radice di $f(-z) = 0$. Se cambiando x in $-x$ (cioè che equivale alla trasformazione $x = -z$) la $f(x)$ non si altera, le radici non nulle saranno a 2 a 2 uguali in valore assoluto e di segno contrario: divisa la $f(x)$ per la eventuale massima potenza di x comune a tutti i suoi termini, avrà solo potenze pari, sicché posto $x^2 = y$ l'equazione diventa del grado dimezzato.

b) **Traslazione o trasformazione** $x = z + h$. La $f(x)$ si trasforma con la formula di Taylor in $\frac{z^n}{n!} f^{(n)}(h) + \frac{z^{n-1}}{n-1!} f^{(n-1)}(h) + \dots + z f'(h) + f(h) = 0$. Se a è una radice della trasformata, $a + h$ è radice di $f(x)$. Prendendo h in modo che $f^{(r)}(h)$ sia nullo (cioè che esige la risoluzione di un'equaz. di grado $n - r$ in h) la $f(x)$ perde il termine di grado r ; in particolare perde il 2° termine (di grado $n - 1$) se si prende $h = -a_1 : n a_0$ (*media delle radici*).

c) **Proporzionalità o trasformazione** $x = kz$. L'equazione $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ si trasforma in $a_0 k^n z^n + a_1 k^{n-1} z^{n-1} + \dots + a_{n-1} k z + a_n = 0$; se a è radice della trasformata, ka è radice di $f(x) = 0$.

Se i coeff. di $f(x)$ sono interi, la trasformazione $x = z : a_0$ trasforma la $f(x)$ in un'equazione a coefficienti interi ed il 1° uguale all'unità.

d) **Reciprocità o trasformazione** $x = 1 : z$. La $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ si trasforma in $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$. Se a è radice della trasformata, $1 : a$ è radice di $f(x)$.

Reciproca dicesi un'equazione tale che se ammette la radice a , ammette anche la radice $1 : a$. Perché un'equaz. sia reciproca dev'essere $a_r = \pm a_{n-r}$ ($r = 0, \dots, n$). Un'equaz. di grado dispari ammette come radice 1 o -1 ; se $a_r = -a_{n-r}$ ($r = 0, \dots, n$) ha la radice 1 ; se il grado è $= 2m$ ed è $a_r = -a_{n-r}$ ($r = 0, \dots, n$)

è $a_m = 0$ ed ha le radici ± 1 . Se non ammette nè la radice 1 nè la -1 , i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono uguali, cioè $a_r = a_{n-r}$ ($r = 0, \dots, n$). Se un'equaz. reciproca si libera dalle radici 1 e -1 , dà luogo ad un'equazione reciproca di grado pari in cui i termini equidistanti dagli estremi sono uguali. La trasformazione $x = 1 : z$ non altera allora l'equazione: si riduce ad un'equazione di grado metà mediante la trasformazione $x + \frac{1}{x} = y$. Trovate le radici β_i della trasformata per avere le radici della primitiva equaz. si debbono risolvere le equazioni $x^2 + 1 = \beta_i x$.

9. — **Trasformazione di Tschirnausen.** Data l'equazione $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ vi si ponga $y = \tau(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m$. La trasformata di $f(x)$ si ottiene eliminando x (Cap. XXVII, § 3) fra $f(x) = 0$ e $y - \tau(x) = 0$. Se α_i sono le radici di $f(x)$, la risultante delle 2' equaz. precedenti è $R(y) = \prod_{i=1}^n (y - \tau(\alpha_i)) = 0$, i cui coefficienti sono esprimibili razionalmente pei coefficienti di $f(x)$ essendo funzioni simmetriche delle α_i . Casi particolari: a) se si ha $\tau(x) = x + p$, si ha la trasformazione b) del § precedente; b) Se $\tau(x) = x^2 + px + q$ si ha $R(y) = \prod_{i=1}^n (y - \alpha_i^2 - p\alpha_i - q) = y^n - A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \dots$ in cui $A_1 = S_2 + pS_1 + qS_0$; $A_2 = \Sigma \alpha_i^2 \alpha_j^2 + p^2 \Sigma \alpha_i^2 \alpha_j + 2qS_2 + p^2 \Sigma \alpha_i \alpha_j + 2pqS_1 + q^2 S_0$ ove S_k è la somma delle potenze k -esime delle radici.

Mediante la risoluzione di un'equaz. di 1° grado e di una di 2° si possono determinare p e q in modo che sia $A_1 = A_2 = 0$ con che l'equaz. trasformata perde i termini del grado $n - 1$ e $n - 2$.

Equazioni binomie, cubiche e biquadratiche

1. — **Equazione binomia** è l'equaz. algebrica il cui 1° membro consta di soli 2 termini: $Ax^p + Bx^q = 0$: supposto $p > q$, l'equazione ammette la radice $x = 0$ dell'ordine q di molteplicità; liberata da codesta radice, l'equaz. si riduce $x^{p-q} = -B:A$ o, ponendo $p - q = n$, a $x^n = -B:A$. L'equaz. ammette per radici le n radici n -esime di $-B:A$. Poichè le radici n -esime di $-B:A$ si hanno moltiplicando una sua radice n -esima per le radici n -esime dell'unità diverse da 1 (Cap. XIX, § 7) basta considerare la equaz. binomia $x^n = 1$. Le n soluzioni sono n potenze successive di una radice primitiva n -esima dell'unità. Codesta equaz. non ha radici multiple: ogni somma di potenze simili S_k è nulla a meno che k non sia multiplo di n , nel qual caso $S_k = n$. Due equaz. binomie $x^m = 1$, $x^n = 1$ hanno per radici comuni le radici di $x^\mu = 1$ ove μ è il M.C.D di m e n .

Se $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots$ con p, q, r numeri primi, le radici primitive sono date dai prodotti delle radici primitive delle equaz. $x^{p^\alpha} = 1$, $x^{q^\beta} = 1$, $\dots$ (Cap. XIX, § 7); per avere una radice primitiva di $x^n = 1$, si trova una radice ε_1 primitiva p -esima dell'unità, poi si risolve l'equaz. $x^p = \varepsilon_1$; se $\varepsilon_2 (\neq 1)$ è una radice, si risolve l'equaz. $x^p = \varepsilon_2$; se ε_3 è una radice, si risolve $x^p = \varepsilon_3$ e così via, la soluzione di $x^p = \varepsilon_{\alpha-1}$ è radice primitiva di $x^{p^\alpha} = 1$. Una equaz. binomia di grado dispari $2m + 1$, ha la radice $x = 1$; divisa l'equazione per $x - 1$ diviene $x^{2m} + x^{2m-1} + \dots + x + 1 = 0$ che è reciproca, epperò si riporta ad un'equaz. di grado m . Un'equaz. binomia di grado pari $2m$ si scinde nelle due $x^m = 1$, $x^m = -1$; la seconda

delle quali se m è dispari si riconduce alla prima col porre $x = -z$ e se è pari ed uguale a 2μ si riduce alla equazione reciproca $x^\mu + \frac{1}{x^\mu} = 0$.

2. — **Equazione cubica** $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ si riconduce mediante la sostituzione $z = x - (a_1 : 3)$ alla forma (1) $x^3 + px + q = 0$ (con $p = (3a_2 - a_1^2) : 3$, $q = (27a_3 - 9a_1a_2 + 2a_1^3) : 27$) alla quale ci riferiremo nel seguito.

a) **Metodo di Tartaglia-Hudde.** Posto $x = u + v$ si devono determinare u e v in modo che sia $3uv = -p$, $u^3 + v^3 = -q$; i valori di u^3 e v^3 sono radici dell'equaz. risolvente $y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$ cioè $y_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$; $y_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Scelti 2 valori delle radici cubiche di y_1 e y_2 il cui prodotto sia $-p$, indichiamoli con $\sqrt[3]{y_1}$, $\sqrt[3]{y_2}$; allora se ε è radice cubica ($\neq 1$) di 1 le soluzioni dell'equaz. cubica sono $\alpha_1 = \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}$; $\alpha_2 = \varepsilon \sqrt[3]{y_1} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{y_2}$; $\alpha_3 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{y_1} + \varepsilon \sqrt[3]{y_2}$.

b) **Metodo di Tschirnausen.** Si trasformi la (1) mediante la trasformazione di Tschirnausen (Cap. XXVIII, § 9), $y = x^2 + hx + k$: si avrà $-y^3 - (2p - 3k)y^2 - (p^2 + 3k^2 - 4kp + h^2p + 3hq)y + q^2 - hpq + kp^2 + 3hkq - 2pk^2 + pkh^2 - qh^3 + k^3 = 0$. Si determinino h e k in guisa che i coefficienti di y e y^2 siano nulli: cioè $k = \frac{2}{3}p$, $h = \left(-3q \pm 6\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right) : 2p$. L'equaz. si riduce a binomia di 3° grado (§ 1).

c) **Metodo di Lagrange.** Se α, β, γ sono le radici di (1), ε una radice cubica dell'unità ($\neq 1$), posto $X_1 = (\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma)^3$, $X_2 = (\alpha + \varepsilon^2\beta + \varepsilon\gamma)^3$ si trova che $X_1 + X_2 = -27q$; $X_1X_2 = -27p^3$ quindi X_1, X_2 sono le radici dell'equaz. risolvente $y^2 + 27qy - 27p^3 = 0$. Le radici di (1) sono le soluzioni del sistema $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma = \sqrt[3]{X_1}$, $\alpha + \varepsilon^2\beta + \varepsilon\gamma = \sqrt[3]{X_2}$ lineare in α, β, γ ed il cui determinante è $\sqrt[3]{-27}$.

d) L'equaz. $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ si riduce alla forma $(a x + b)^3 + (c x + d)^3 = 0$ riducendo la forma cubica omogenea $a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 x y^2 + a_3 y^3$ a forma canonica (Capitolo XXVIII, § 6). Ciò fatto le radici sono $-(b+d):(a+c)$; $-(b+\varepsilon d):(a+\varepsilon c)$; $-(b+\varepsilon^2 d):(a+\varepsilon^2 c)$ ove ε è una radice cubica dell'unità, diversa da 1.

e) **Metodo trigonometrico.** Nel caso irriducibile (vedi sotto) l'equazione può sempre porsi sotto la forma $x^3 - p x + q = 0$ con p e q positivi (se q fosse negativo, basta cambiare x in $-x$).

Fatta la trasformazione $x = 2 \sqrt[3]{\frac{p}{3}}$, l'equaz. diviene $4z^3 - 3z + \frac{3q}{2p \sqrt[3]{\frac{p}{3}}} = 0$. Confrontando con la formula di trigonometria $4 \sin^3 \Theta - 3 \sin \Theta + \sin 3\Theta = 0$ si vede che se si prende Θ in modo che sia $\sin \Theta = \frac{3q}{2p \sqrt[3]{\frac{p}{3}}}$, le tre radici della equaz. in z sono $\sin \frac{\Theta}{3}$, $\sin \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\Theta}{3} \right)$, $\sin \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\Theta}{3} \right)$.

Discussione delle formule risolutive del metodo. a) Supponiamo *reali* i coeffic. Se il discriminante $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ è nullo, una radice è doppia e l'altra semplice: tutte sono reali e si determinano in via razionale (Cap. XXVII, § 1). Se $D > 0$, a_1 è reale se si prendono per $\sqrt[3]{y_1}, \sqrt[3]{y_2}$ le radici cubiche reali di y_1 e y_2 che sono reali; a_2 e a_3 sono complesse coniugate; se $D < 0$ le tre radici sono reali; ma essendo y_1 e y_2 complesse coniugate le espressioni trovate per a_1, a_2, a_3 non si possono ridurre ad operazioni di somma, moltiplicazione ed estrazione di radice di espressioni reali in numero finito: questo caso dicesi **irriducibile**.

3. — **Equazione di 4° grado o biquadratica** $z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0$ mediante la sostituzione $z = x - (a_1 : 4)$ si riduce alla forma (2) $x^4 + p x^2 + q x + r = 0$ ove $p = (8a_2 - 3a_1^2) : 8$; $q = (8a_3 - 4a_1 a_2 + a_1^3) : 8$; $r = (256a_4 - 64a_1 a_3 + 16a_1^2 a_2 - 3a_1^4) : 256$.

a) **Metodo di Eulero.** Posto $x = u + v + w$ si devono determinare u, v, w in modo che sia $u^2 + v^2 + w^2 = -p : 2$; $uvw = -q : 8$; $(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2 v^2 + u^2 w^2 + v^2 w^2) = r$. I valori di u^2, v^2, w^2 sono le radici dell'equaz. risolvente $y^3 + \frac{p}{2} y^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right) y - \frac{q^2}{64} = 0$. Se le radici sono y_1, y_2, y_3 , siano $\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}, \sqrt{y_3}$ tre valori di u, v, w per cui $uvw = -q : 8$; allora le 4 radici di (2) sono $a_1 = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$, $a_2 = \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}$, $a_3 = -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}$, $a_4 = -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$.

b) **Metodo di Ferrari.** Introducendo l'indeterminata u , la (2) può scriversi $\left(x^2 + \frac{u}{2}\right)^2 = (u - p)x^2 - qx + \left(\frac{u^2}{4} - a_4\right)$;

il 2° membro è un quadrato perfetto se u soddisfa all'equaz. risolvente (3) $u^3 - pu^2 - 4ru - q^2 + 4pr = 0$. Dopo ciò la risoluzione è portata alla risoluzione di 2 equaz. di 2° grado.

c) **Metodo di Tschirnhausen.** Si opera la trasformazione (Cap. XXVIII, § 9) $y = x^2 + hx + k$; si determinano h e k in modo che l'equaz. trasformata perda i coefficienti dei termini di 1° e 3° grado; l'equaz. si riduce alla forma $y^4 + my^2 + n = 0$ che diviene di 2° grado ponendo $y^2 = z$.

d) **Metodo di Lagrange.** Se a_1, a_2, a_3, a_4 indicano le 4 radici della (2), posto $X_1 = a_1 a_2 + a_3 a_4$, $X_2 = a_1 a_3 + a_2 a_4$, $X_3 = a_1 a_4 + a_2 a_3$ si trova $X_1 + X_2 + X_3 = p$; $X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2 X_3 = -4r$, $X_1 X_2 X_3 = q^2 - 4pr$ onde X_1, X_2, X_3 sono le 3 radici dell'equaz. risolvente (3). Essendo poi $a_1 a_2 + a_3 a_4 = X_1$, $a_1 a_2 a_3 a_4 = r$ si determinano con un'equaz. di 2° grado $a_1 a_2, a_3 a_4$: in modo analogo si trovano $a_1 a_3, a_2 a_4, a_1 a_4, a_2 a_3$ e da questi prodotti le radici cercate.

Discussione delle formule risolutive del metodo a). I coefficienti p, q, r siano reali. Se y_1, y_2, y_3 sono > 0 le 4 radici a_1, a_2, a_3, a_4 sono reali e distinte; se $y_1 > 0$ e $y_2 \neq y_3$ sono negative, le 4 radici a_i sono complesse; se $y_1 > 0, y_2 = y_3$ negative, due radici a_i sono complesse e due reali uguali; se $y_1 > 0$

e y_2, y_3 complesse coniugate, due radici α_i sono reali, due complesse coniugate; se $q = 0$ e la radice 0 della risolvente è semplice, le α_i sono a 2 a 2 uguali in valore assoluto ma di segni contrari; se $q = 0$ e la radice 0 della risolvente è doppia, due α_i sono uguali e altre 2 pure uguali e contrarie alle precedenti; se $y_1 = y_2 = y_3$ tre radici α_i sono uguali e solo in questo caso.

CAPITOLO XXX.

Risoluzione algebrica delle equazioni

1. — **Campo di razionalità** è un sistema di numeri (reali o complessi) tale che le 4 operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione (esclusa quella con divisore nullo) eseguite su numeri del sistema riproducono numeri del sistema. **Elementi** del campo di razionalità si dicono i numeri del sistema. Ogni campo di razionalità contiene lo zero e l'unità e quindi tutti i numeri razionali. Se Ω è un campo di razionalità, dicesi **razionalmente esprimibile in Ω** un numero a se appartiene ad Ω . Dato un campo di razionalità Ω ed un sistema A di numeri che non gli appartiene, se operando colle 4 indicate operazioni fondamentali sui numeri di Ω ed A si ottengono numeri esprimibili razionalmente con quelli di Ω ed A , nel loro insieme Ω ed A costituiscono un nuovo campo di razionalità che si dice ottenuto da Ω per l'*aggiunzione* di A .

2. — **Funzione riducibile in un campo di razionalità Ω** dicesi una funz. razionale intera $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ quando è divisibile per una funz. $\varphi(x)$ razionale intera di grado $< n$ i cui coefficienti appartengono ad Ω , **Irriducibile** in Ω si dice $f(x)$ nel caso contrario. Se $f(x)$ ha i coeffic. razionali si dice senz'altro **riducibile** se è divisibile per

una funz. razionale intera di grado minore a coefficienti razionali. Una equaz. $f(x) = 0$ si dice riducibile o irriducibile in Ω se tale è $f(x)$.

Se $f(x)$ è irriducibile in Ω non può avere alcun fattore comune con una funz. $g(x)$ i cui coefficienti appartengono ad Ω a meno che $g(x)$ non sia divisibile per $f(x)$.

Se $f(x)$ ha i coeffic. interi ed è riducibile è uguale al prodotto di due polinomi a coefficienti interi.

Se p è un numero primo l'equaz. $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x^2 + x + 1 = 0$ è irriducibile.

Se al campo di razionalità Ω dei coefficienti di un'equaz. generale di grado n si *aggiunge* (§ 1) una determinata funzione razionale $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ di p delle sue radici ($p < n$), l'equaz. diviene riducibile nel nuovo campo Ω' di razionalità così ottenuto.

3. — **Espressione irrazionale semplice** delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ dicesi un complesso di operazioni razionali e di estrazioni di radici in numero finito combinate fra loro, eseguite sulle variabili. Gli indici delle radici si possono sempre supporre primi, ogni altra estrazione di radice essendo composta con quelle. Sia $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un'espressione irrazionale semplice; per calcolarla si dovrà dapprima calcolare delle funzioni razionali di x , poi estrazioni di radici di indici *primi*, $m_1, m_2, \dots$ da alcune di queste funzioni, sicchè in questo primo stadio di calcolo si sarà giunti ad un'espressione, $F_1(a_1, a_2, \dots, \sqrt[m_1]{b_1}, \sqrt[m_2]{b_2}, \dots)$ razionale negli argomenti, ed ove $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ rappresentano funzioni razionali delle x . La F_1 si dice espressione di *primo ordine* e di q_1 -esimo *grado* se q_1 è il numero dei radicali indipendenti (cioè tali che uno di essi non sia razionalmente esprimibile per gli altri). Per procedere nel calcolo di E si dovranno formare espressioni di primo ordine $c_1, c_2, \dots, d_1, d_2, \dots$ ed estrarre radici di indici primi $n_1, n_2, \dots$ su alcune d'esse, cosicchè si arriverà ad una espressione $F_2(c_1, c_2, \dots, \sqrt[n_1]{d_1}, \sqrt[n_2]{d_2}, \dots)$, con F_2 simbolo di fun-

zione razionale, di cui si dirà 2 l'*ordine* e q_2 il *grado*, se q_2 è il numero dei radicali indipendenti. Così procedendo per un numero finito di volte si giungerà a completare il calcolo di E pervenendo ad un'espressione di un ordine determinato ϱ e di un determinato grado q . Quest'ultima espressione sarà una funzione razionale di espressioni $g_1, g_2, \dots \sqrt[t_1]{h_1}, \sqrt[t_2]{h_2} \dots \sqrt[t_q]{h_q}$ ove $g_1, g_2, \dots, h_1, h_2, \dots$ sono espressioni di ordine $\varrho - 1$, e i numeri $t_1, t_2, \dots, t_q$ sono numeri primi. Ora se τ denota uno dei radicali che indichiamo con $\sqrt[t]{h}$, la E può sempre mettersi sotto la forma $E = \lambda_0 + \lambda_1 \tau + \lambda_2 \tau^2 + \dots + \lambda_{t-1} \tau^{t-1}$ ove $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{t-1}$ sono espressioni irrazionali semplici di ordine $\leq \varrho$ ma di grado inferiore a q . Se la E è identicamente nulla dev'essere $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{t-1} = 0$.

4. — **Equazione algebricamente risolubile** dicesi l'equaz. $f(x) = 0$, quando è possibile ottenere una sua radice mediante un'espressione irrazionale semplice costituita con i coefficienti. Se un'equaz. $f(x) = 0$ è algebricamente risolubile, le varie espressioni irrazionali semplici con cui si costruisce una radice in funzione dei coefficienti sono tutte funzioni razionali delle radici di $f(x) = 0$.

Se l'equazione *generale* (pag. 176 linea 9) di grado n è algebricamente risolubile, il primo radicale che occorre di estrarre nel calcolare l'espressione di una radice in funzione dei coefficienti è un *radicale quadratico*; se $n > 2$ ai radicali quadratici seguono immediatamente *radicali cubici*.

Teor. di Ruffini. L'equaz. generale di grado superiore al quarto non è algebricamente risolubile.

Separazione delle radici

1. — **Problema della separazione delle radici** è la ricerca di criteri per riconoscere quando è che fra 2 numeri reali a e b esiste una ed una sola radice reale di un'equazione algebrica $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ a coefficienti reali ($a_0 > 0$). Per indicare che $f(a) > 0$ o $f(a) < 0$ si scriverà $f(a) = +$ oppure $f(a) = -$; per indicare che $f(x)$ per valori positivi grandissimi è > 0 o < 0 si scriverà $f(+\infty) = +$ oppure $f(+\infty) = -$; per indicare che per valori di $x < 0$, di valore assoluto grandissimo, $f(x)$ è > 0 o < 0 si scrive $f(-\infty) = +$ oppure $f(-\infty) = -$.

Criteri che danno la parità del numero delle radici comprese fra due numeri. *a)* Il numero delle radici di $f(x)$ comprese fra a e b è pari (o nullo) oppure dispari a seconda che $f(a)$ e $f(b)$ hanno o no lo stesso segno. In un'equaz. di grado dispari $f(+\infty)$ e $f(-\infty)$ hanno segni disuguali epperò $f(x)$ ha un numero dispari di radici reali; se $a_n > 0$, $f(0) = +$ epperò (ricordando che $a_0 > 0$) $f(x)$ ha un numero dispari (almeno 1) di radici negative; se $a_n < 0$ un numero dispari di radici positive. Se $f(x)$ è di grado pari con $a_n < 0$ v'ha almeno una radice positiva ed una negativa.

Variazione di segno presenta un polinomio od una successione quando 2 termini consecutivi sono di segni contrari; **permanenza** nel caso contrario.

b) **Teor. di Rolle.** Fra 2 radici di $f(x)$, v'ha *almeno* una radice di $f'(x)$. Segue che fra due radici consecutive di $f'(x)$ v'ha *al più* una radice di $f(x)$.

Se a è radice di $f(x)$, e h è sufficientemente piccolo, $f(a - h)$ e $f'(a - h)$ hanno segno contrario; $f(a + h)$, $f'(a + h)$ hanno ugual segno. Ne segue che fra 2 radici consecutive della $f(x)$ v'ha un numero dispari di radici di $f'(x)$. Se $f(x)$ ha tutte le radici reali, anche $f'(x)$ le ha tutte reali.

Note le radici $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 \dots < \beta_r$ reali di $f'(x)$ il numero delle variazioni della successione $f(-\infty)$, $f(\beta_1)$, $f(\beta_2)$, $\dots$, $f(\beta_r)$, $f(+\infty)$ è il numero delle radici reali di $f(x)$. Se β_p , $\beta_{p+1} \dots \beta_{p+q}$ sono le radici di $f'(x)$ comprese fra a e b , il numero delle variazioni di $f(a)$, $f(\beta_p)$, $f(\beta_{p+1})$, $\dots$, $f(\beta_{p+q})$, $f(b)$ è il numero delle radici reali comprese fra a e b .

c) **Teor. di Budan-Fourier.** Il numero delle radici di un'equazione $f(x) = 0$ di grado n comprese fra due numeri reali a e b ($a < b$) è uguale al numero delle variazioni che la successione $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b)$, $\dots$, $f^{(n)}(b)$ ha in meno delle $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, $\dots$, $f^{(n)}(a)$, o ne differisce (in meno) per un numero pari.

d) **Regola dei segni di Cartesio.** Applicando il teor. precedente ove si faccia $a = 0$, $b = +\infty$ si deduce la regola: il numero delle radici positive di $f(x) = 0$ è uguale al numero delle variazioni di $f(x)$ o ne differisce *in meno* per un numero pari. Cambiando x in $-x$, il numero delle variazioni della trasformata dà il numero delle radici negative della primitiva equazione o ne differisce *in meno* per un numero pari.

Se nessuno dei coefficienti di $f(x)$ è nullo il numero delle permanenze è il numero delle radici negative o ne differisce *in meno* per un numero pari.

2. — **Numero esatto delle radici reali fra due numeri.**
Successione di Sturm dicesi la successione $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\dots$, $f_r(x)$ dove $f_1(x) = f'(x)$; $f_2(x)$ è il resto, cambiato di segno, della divisione di $f(x)$ per $f_1(x)$; $f_3(x)$ è il resto, cambiato di segno, della divisione di $f_1(x)$ per $f_2(x)$, ecc.; $f_r(x)$ ove r è al più $n + 1$ è una costante diversa da zero, supponendosi $f(x)$ liberata da radici multiple.

Teor. di Sturm. Se $a < b$, il numero delle variazioni che

la successione di Sturm $f(b), f_1(b), \dots, f_r(b)$ ha in meno della $f(a), f_1(a) \dots f_r(a)$ è il numero delle radici reali comprese fra a e b .

Se si riconosce che $f_p(x)$ ($p < r$) non si annulla in $a \vdash b$ si possono trascurare nella successione di Sturm $f_{p+1}, \dots, f_r$. Nella formazione della successione di Sturm si possono moltiplicare le funzioni per fattori positivi.

Successione generale di Sturm è una successione $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ ove le φ sono reali limitate continue in $a \vdash b$ e tali che: 1° la $\varphi(x)$ abbia in $a \vdash b$ lo stesso segno di $f''(x)$; 2° due funzioni consecutive non si annullano per lo stesso valore di x ; 3° se per $x = a$ una funzione intermedia si annulla la precedente e la seguente hanno in $x = a$ segni contrari; 4° l'ultima funzione ha segno costante in $a \vdash b$.

Corollari del teor. di Sturm. Il numero delle radici reali di $f(x) = 0$ è l'eccesso ε del numero delle variazioni della successione dei primi termini nelle funzioni della successione di Sturm quando si supponga x negativo, sul numero delle variazioni della successione dei coefficienti di questi primi termini. Il numero delle radici positive di $f(x) = 0$ è l'eccesso del numero delle variazioni della successione degli ultimi termini delle funzioni della successione di Sturm su quello delle variazioni della successione dei loro primi termini.

3. — **Condizione perchè le radici siano tutte reali.** a) Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equaz. $f(x) = 0$ di grado n abbia n radici reali è che la successione di Sturm abbia $n + 1$ termini e in tutte le funzioni di essa i primi coefficienti abbiano lo stesso segno.

b) **Equaz. ai quadrati delle differenze.** Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono le n radici di $f(x)$ si dice *equaz. ai quadrati delle differenze* la equaz. $F(x) = 0$ di grado $n(n-1):2$ avente per radici gli $n(n-1):2$ quadrati $(\alpha_i - \alpha_j)^2$. Indicando con σ_k le somme delle potenze k -esime delle radici di $F(x)$ e con S_k le somme delle potenze k -esime delle radici di $f(x)$ si ha $2\sigma_k = n S_{2k} - 2k S_1 S_{2k-1} + \binom{2k}{2} S_2 S_{2k-2} - \dots$; poichè le S_k

si calcolano in funzione dei coefficienti di $f(x)$ (Cap. XXVI, § 3) così le σ_k si calcolano in funzione di questi coefficienti: i coefficienti di $F(x)$ si calcolano in funzione delle σ_k (*ibidem*) onde razionalmente si forma $F(x)$. Condizione necessaria e sufficiente acciò che $f(x)$ abbia tutte le radici reali è che $F(x)$ presenti sole variazioni.

CAPITOLO XXXII.

Risoluzione numerica delle equazioni

1. — **Limitazione delle radici.** a) Se A è il massimo fra i valori assoluti dei coefficienti supposti reali dell'equaz. (1)
 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ in cui $a_0 > 0$, le radici reali sono comprese fra $1 + (A : a_0)$ e $-1 - (A : a_0)$.

b) Se λ è un valore di x per cui risultano positive $f(x)$, $f'(x)$, $\dots$, $f^{(n)}(x)$ il teor. di *Boudan-Fourier* (Cap. XXXI, § 2, c) assicura che le radici positive non superano λ .

c) Se λ è un valore di x che rende positivo $a_0 x + a_1$, $a_0 x^2 + a_1 x + a_2$, $\dots$, $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ le radici positive non superano λ .

d) se b è il massimo valore assoluto dei coefficienti negativi di (1) le radici positive non superano $1 + (b : a_0)$; se a_s è il primo coeffic. negativo le radici positive non superano neanche $1 + \sqrt[s]{b : a_0}$.

e) Per avere un limite superiore per le radici negative, basta cercare quello delle positive per l'equaz. trasformata mediante il cambiamento di x in $-x$.

2. — **Radici razionali.** Supposti i coefficienti di (1) razionali, si può (Cap. XXVIII, § 8, c) trasformare la (1) in guisa che sia $a_0 = 1$ e gli altri coefficienti siano interi. Una siffatta

equaz. non può avere radici frazionarie: le eventuali radici razionali sono intere e dividono a_n . Si proverà se sono radici quei soli fattori (positivi e negativi) di a_n che non superano i limiti assegnati alle radici nel § precedente. Per questa verifica si può osservare che a è radice intera se a_n è divisibile per a , il coeffic. a_{n-1} aumentato del quoziente precedente deve essere divisibile per a , il coeffic. a_{n-2} aumentato del quoziente precedente dev'essere divisibile per a e così via.

La decomposizione del primo membro di (1), ove $a_0 = 1$ e gli altri coeffic. sono interi, in un prodotto di due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(x)$ a coeffic. interi, dei gradi m , $n - m$, se esiste, si può fare ponendo $\varphi(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m$, $\psi(x) = x^{n-m} + c_1 x^{n-m-1} + c_2 x^{n-m-2} + \dots + c_{n-m}$, eseguendo il prodotto ed eguagliando i coefficienti delle potenze x^r ad a_r ($r = 1, \dots, n$): si avranno le equazioni $b_1 + c_1 = a_1$, $c_2 + b_1 c_1 + b_2 = a_2$ ecc. che con un numero finito di tentativi si riconosce se sono solubili in numeri interi e in caso affermativo si determinano i numeri b_i e c_i .

3. — **Radici irrazionali.** Trovate di (1) le radici razionali, le irrazionali si possono determinare con metodi di approssimazione, di cui ne indicheremo alcuni. Supponiamo sempre liberata l'equazione da radici multiple (Cap. XXVIII, § 3).

a) **Metodo delle parti proporzionali** (o *delle corde*, o di *falsa posizione*). Si sia riconosciuto che fra a e b ($a < b$) cade una sola radice reale di $f(x)$ e nessuna di $f'(x)$ e di $f''(x)$. Se la radice di $f(x)$ è anche radice di $f''(x)$ sarà radice del massimo comune divisore, sul quale, anziché su $f(x)$, converrà operare. La curva $y = f(x)$ non ha, per le poste ipotesi, fra a e b nè massimi nè minimi nè inflessioni. Il metodo consiste nel prendere per radice approssimata l'ascissa dell'intersezione con l'asse x della corda che unisce i 2 punti $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, cioè $\beta = a - f(a)(b - a) : (f(b) - f(a))$. All'intervallo $a \vdash b$ si sostituirà $a \vdash \beta$ se $f(a)$ e $f(\beta)$ hanno segni disuguali, se no $\beta \vdash b$; e si applica di nuovo il metodo, e così via.

b) **Metodo di Newton-Fourier** (o *delle tangenti*). Ferme

le ipotesi precedenti, si prende come valore approssimato della radice l'ascissa dell'intersezione con l'asse x della tangente alla curva nell'estremo in cui è convessa rispetto all'asse x . Se $f(a)$ e $f''(a)$ hanno lo stesso segno si sceglie il 1° estremo, se no il 2°; nel primo caso il valore approssimato della radice è $\beta = a - (f(a):f''(a))$; nel secondo caso $\beta = b - (f(b):f''(b))$. Prendendo il primo valore l'errore che si commette non supera $(b-a)^2 M:|f'(a)|$ ove M è il massimo di $f''(x)$ in $a \rightarrow b$. L'applicazione numerica del metodo di Newton-Fourier porta a valori che tendono crescendo alla radice di $f(x)$.

c) **Metodo di Horner.** Ferme le ipotesi precedenti, e posto $a = a + h$, l'equazione $\varphi(h) = f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) = 0$ ha una radice sola in h compresa fra 0 e $b-a$. Se, ad es. $b-a > 1$, ci sarà un intero p tale che $\varphi(p)$ e $\varphi(p+1)$ presentino variazione di segno, la radice h è compresa fra p e $p+1$ e quindi a fra $a+p$ e $a+p+1$ (approssimazione di una unità). Si pone $h = p+k$; l'equazione $\psi(k) = \varphi(p+k) = 0$ ammette una radice fra 0 e 1; ci sarà un numero r di decimi per cui $\psi\left(\frac{r}{10}\right)$ e $\psi\left(\frac{r+1}{10}\right)$ hanno segni contrari; la radice k è compresa fra $\frac{r}{10}$ e $\frac{r+1}{10}$; quindi a fra $a+p+\frac{r}{10}$ e $a+p+\frac{r+1}{10}$ (approssimazione di un decimo). Così si può proseguire indefinitamente ed avere l'approssimazione che si vuole.

I coefficienti $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a):2, \dots, f^{(n)}(a):n!$ della φ (e così pure gli altri delle altre equazioni $\psi, \dots$) si ottengono coll'applicazione della regola di Ruffini (Cap. XXIV, § 3) osservando che dividendo $f(x)$ per $x-a$ il resto è $f(a)$; se il quoziente di questa divisione si divide per $x-a$ il nuovo resto è $f'(a)$; se il nuovo quoziente si divide per $x-a$ il resto è $f''(a):2$ ecc.

Il calcolo si dispone così: in una 1ª riga si mettono gli

$n + 1$ coefficienti $a_0, a_1 \dots a_n$, in una 2^a riga i coefficienti del quoz. di $f(x)$ per $x - a$ ed il resto, cioè $a'_0 = a_0, a'_i = a a_i + a_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots n$); in una 3^a riga i coefficienti del 2^o quoziente ed il resto $a''_0 = a'_0, a''_i = a a'_i + a'_{i-1}$ ($i = 1, \dots n - 1$) in una 4^a riga i coefficienti del 3^o quoziente ed il resto $a'''_0 = a''_0, a'''_i = a a''_i + a''_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots n - 2$) e così fino alla riga $(n + 2)^a$ che conterrà solo a_0 . Gli ultimi elementi delle righe $2^a, 3^a, \dots$ sono $f(a), f'(a), f''(a) : 2 \dots f^{(n)}(a) : n!$

d) **Metodo di Lagrange.** Riconosciuto che $f(x) = 0$ ha una radice irrazionale a fra due interi consecutivi a e $a + 1$, si pone $a = a + \frac{1}{y}$, essendo y radice di $\varphi(y) = f\left(a + \frac{1}{y}\right) = f(a)y^n + f'(a)y^{n-1} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$. Si determinino due interi consecutivi entro cui cade y : siano $a', a' + 1$: allora a è compreso fra $a + \frac{1}{a' + 1}$ e $a + \frac{1}{a'}$. Porremo $y = a' + \frac{1}{z}$ e procederemo a determinare gli interi consecutivi $a'', a'' + 1$ entro cui cade la radice z di $\psi(z) = \varphi\left(a' + \frac{1}{z}\right) = 0$. Allora a è compreso tra $a + \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + 1}}$ e $a + \frac{1}{a' + \frac{1}{a''}}$ e così via.

Ad ogni stadio del calcolo si conosce un limite superiore dell'errore commesso ed il valore calcolato si avvicina alla radice più di qualunque frazione con termini più piccoli (Cap. XXII, § 6).

Approssimazione delle radici complesse. Posto $x = \xi + i\eta$ la $f(x) = 0$ diviene $P(\xi, \eta) + i Q(\xi, \eta) = 0$ e se $\xi + i\eta$ è radice sarà $P(\xi, \eta) = 0, Q(\xi, \eta) = 0$, onde la ricerca delle radici complesse è ricondotta alle radici comuni reali del sistema $P(\xi, \eta) = 0, Q(\xi, \eta) = 0$. Si osservi ancora che l'equazione ai quadrati delle differenze (Cap. XXXI, § 4, b) ha una radice negativa per ogni coppia di radici complesse della $f(x) = 0$.

CALCOLO INFINITESIMALE

(Calcolo differenziale ed integrale - Applicazioni geometriche del Calcolo)

Altre nozioni generali sulle funzioni.

Continuità e discontinuità

1. — Al Cap. XXIII è stata data la definizione di *funzione* di una o più variabili; di funzione *limitata*, di *limite superiore* ed *inferiore*, di *massimo* e di *minimo*, di *punto di Weierstrass* relativo al limite superiore e all'inferiore. Completiamo in questo capitolo alcune nozioni generali sulle funzioni reali di variabili reali.

2. — **Oscillazione** di $f(x)$ in $a \vdash b$ dicesi la differenza fra il limite superiore L ed il limite inferiore l . L'oscillazione è il limite superiore dei valori assoluti delle differenze dei valori che la funzione assume nelle coppie generiche di punti dell'intervallo. Se $a' \vdash b'$ è un intervallo contenuto in $a \vdash b$, l'oscillazione di $f(x)$ in $a' \vdash b'$ è $\leq$ a quella in $a \vdash b$. Se c è un punto interno di $a \vdash b$ e le oscillazioni di $f(x)$ in $a \vdash c$, $c \vdash b$ sono D_1 e D_2 , l'oscillazione D in $a \vdash b$ è $\leq D_1 + D_2$. Se $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$ e D è l'oscillazione di F , D_1 , D_2 le oscillaz. di f_1 , f_2 in uno stesso intervallo, è $D \leq D_1 + D_2$. Se $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ e D , D_1 , D_2 sono le oscillazioni di F , f_1 , f_2 , è $D < A(D_1 + D_2)$ se A è il massimo valore assoluto dei limiti superiori ed inferiori di f_1 , f_2 .

Se $f(x)$ è in $a \vdash b$ sempre d'un segno con il limite inferiore l ed il superiore L (entrambi positivi se $f(x) > 0$ o entrambi negativi se $f(x) < 0$), i limiti superiore ed inferiore di $1:f(x)$ sono $1:l$, $1:L$; dette D l'oscillaz. di $f(x)$, D' quella di $1:f(x)$, è $D' < D:l^2$.

3. — Proprietà delle funzioni continue d'una variabile.

Al Cap. XXXIII, § 4 è stata definita la continuità d'una funz. $f(x)$ in un punto ed in un intervallo e sono state enunciate alcune proprietà delle funzioni continue. Diamo qui altre proprietà.

Se più funzioni $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ (in numero finito) sono continue in x_0 , sono ivi continue la *somma* $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ ed il prodotto $f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)$. Se $f(x)$ è continua in x_0 ed ivi $f(x_0) \neq 0$, è in x_0 pure continua $1:f(x)$; se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono continue in x_0 e $\varphi(x_0) \neq 0$, $f(x):\varphi(x)$ è continua in x_0 .

Se $f(x)$ è continua in x_0 e $f(x_0) \neq 0$ $\forall$ ha tutto un intorno di x_0 in cui $f(x)$ ha lo stesso segno di $f(x_0)$. Una funzione continua in un intervallo è ivi *limitata* (Cap. XXIII, § 4).

Teor. di Cantor (o dell'uniforme continuità). Se $f(x)$ è continua in $a \mapsto b$, prefissato un numero σ piccolo a piacere esiste un segmento d tale che in ogni parte dell'intervallo $< d$ l'oscillazione della $f(x)$ è minore di σ .

4. — **Discontinuità nelle funzioni di una variabile.** Una funz. $f(x)$ non continua in x_0 dicesi ivi **discontinua**. Per indicare che A è il limite dei valori di $f(x)$ per una successione di numeri $> x_0$ e tendenti ad x_0 si scrive $\lim_{x=x_0+0} f(x) = A$,

mentre con $\lim_{x=x_0-0} f(x) = A$ si vuol indicare che A è il limite dei valori di $f(x)$ per una successione di numeri $< x_0$ e tendenti ad x_0 . Se $\lim_{x=x_0+0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x=x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$ o

quest'ultimo limite non esiste, la $f(x)$ dicesi **continua a destra** e **discontinua a sinistra**; se invece $\lim_{x=x_0-0} f(x) = f(x_0)$ e

$\lim_{x=x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$ o quest'ultimo limite non esiste, la $f(x)$ dicesi **continua a sinistra** e **discontinua a destra**. Se $\lim_{x=x_0+0} f(x)$

$\neq f(x_0)$, $\lim_{x=x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$, o se i limiti non esistono si

ha discontinuità in x_0 tanto a destra che a sinistra. La discontinuità si dice **ordinaria** o **di prima specie** se i limiti considerati esistono e non eguagliano il valore che la funz. ha in x_0 , di seconda specie se i limiti suddetti non esistono. Fra le discontinuità ordinarie sono a notarsi quelle *che possono togliersi* col mutare il valore della funzione nel punto di discontinuità: ciò avviene se

$\lim_{x=x_0+0} f(x) = \lim_{x=x_0-0} f(x) = A \neq f(x_0)$; si avrà continuità ponendo $f(x_0) = A$.

Una funzione può essere **totalmente discontinua** cioè discontinua in tutti i punti; tale è ad es. la funzione (di Dirichlet) che è nulla per ogni x razionale e uguale ad 1 per ogni x irrazionale e la cui espressione analitica è $\varphi(x) = \lim_{n=\infty} \{ \lim_{t=0} [\sin^2(n! \pi x) : (\sin^2(n! \pi x) + t^2)] \}$.

Generalmente continua in $a \vdash b$ dicesi una funzione che ha un numero finito di discontinuità.

5. — **Funzione di funzione.** Se la funzione $u = u(x)$ è definita in $a \vdash b$ e se per l'insieme dei valori di u è definita la funzione $y = y(u)$, ad ogni x di $a \vdash b$ corrisponde un valore y , epperò y è funzione di x in $a \vdash b$; dicesi che y è **funzione di funzione**, la u dicesi funzione *intermedia*. Se la u è continua in $a \vdash b$, la y è definita nell'intervallo $l \vdash L$ essendo l e L il minimo ed il massimo di u ; se poi y è continua rispetto ad u in $l \vdash L$, y è anche continua rispetto ad x in $a \vdash b$. Se pei valori di y è definita una funz. z , sarà pure z funzione di x in $a \vdash b$; le funzioni *intermedie* sono la u e la y . Ad es. la funz. $z = \log \arcsin \sqrt{x}$ può riguardarsi funzione di funzione ponendo $z = \log u$, con $u = \arcsin v$ e $v = \sqrt{x}$. Si possono considerare anche funz. di funzioni complesse.

6. — **Funzione inversa.** Se $y = y(x)$ è in $a \vdash b$ funzione *crescente*, cioè per ogni coppia di numeri x_1, x_2 soddisfacenti alle limitazioni $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ è $y(x_1) < y(x_2)$, oppure è in $a \vdash b$ funzione *decrescente*, cioè se $y(x_1) > y(x_2)$ per $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, se A è l'insieme di valori di y , per ogni $\bar{y}$ di A v'ha un solo valore di x per cui $y(x) = \bar{y}$, ciò vuol dire che

ad ogni $\overline{y}$ di A corrisponde un valore di x , cioè si può considerare x funzione di y , la quale dicesi la funzione inversa di $y = y(x)$. Se la $y = y(x)$ è continua e l, L sono il *minimo* ed il *massimo*, la funzione inversa $x = x(y)$ è definita per tutti i punti dell'intervallo $l \rightarrow L$ ed è ivi continua.

7. — **Oscillazione** della funzione $f(x, y)$ nel campo C in cui è definita è la differenza fra il limite superiore e l'inferiore di f in C ; essa è il limite superiore dei valori assoluti delle differenze fra i valori che la $f(x, y)$ assume in una coppia generica di punti (x_1, y_1) (x_2, y_2) di C . Per le oscillazioni delle funzioni di due variabili e così pure per quelle di più variabili valgono proprietà analoghe a quelle enunciate al § 2 per le funz. di una sola variabile; epperò ci dispensiamo dall'enunciarle.

8. — **Continuità e discontinuità delle funzioni di più variabili.** La definizione di funzione continua è data al Capitolo XXIII, § 5, ove sono enunciate alcune proprietà delle funzioni continue. Se $f(x, y)$ è reale continua in (x_0, y_0) ed ivi la f non è nulla, esiste tutto un intorno di (x_0, y_0) in cui la $f(x, y)$ ha il segno di $f(x_0, y_0)$. La somma ed il prodotto di più funzioni continue in un punto sono ivi continue; se $f(x, y)$ è continua e non nulla in (x_0, y_0) , ivi è continua la funz. $1 : f(x, y)$; se $f(x, y)$ e $\varphi(x, y)$ sono continue in (x_0, y_0) e $\varphi(x_0, y_0) \neq 0$, in (x_0, y_0) è pure continua la funz. $f(x, y) : \varphi(x, y)$. Può darsi che considerando i valori che $f(x, y)$ assume al tendere di (x, y) ad (x_0, y_0) secondo una certa linea L , abbiano per limite $f(x_0, y_0)$ mentre i valori che $f(x, y)$ assume al tendere di (x, y) , secondo altre linee, ad (x_0, y_0) non abbiano limite o un limite diverso da $f(x_0, y_0)$: la funzione allora è **discontinua** in (x_0, y_0) , ma però **continua secondo la linea L** . Ad es. se $\varphi(u)$ è la funzione che per u razionale è nulla e per u irrazionale è uguale a 1, la funzione $\varphi(x^2 + y^2)$ è continua in (x_0, y_0) solo secondo il cerchio $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Se il limite dei valori di $f(x, y)$ quando (x, y) tende comunque a (x_0, y_0) è $A \neq f(x_0, y_0)$, la $f(x, y)$ è **discontinua** in (x_0, y_0) , ma si può togliere la **discontinuità** col

porre $f(x_0, y_0) = A$. In un punto (x_0, y_0) infine la $f(x, y)$ può essere discontinua perchè qualunque sia il modo con cui un punto (x, y) si fa tendere ad (x_0, y_0) , i corrispondenti valori di $f(x, y)$ non hanno alcun limite. Ed esistono funzioni **totalmente discontinue**, cioè discontinue in tutti i punti di un campo. Es. Se φ è simbolo della funzione di Dirichlet definita al § 4, a, b, c, d sono 4 numeri per cui siano diversi i prodotti ac, ad, bc, bd , la funzione $[(b - a)\varphi(x) + a][(d - c)\varphi(y) + c]$ assume il valore ac per ogni punto di coordinate razionali, bd per ogni punto di coordinate irrazionali, ad per ogni punto di ascissa razionale e ordinata irrazionale, bc per ogni punto di ascissa irrazionale e ordinata razionale; è totalmente discontinua in qualunque campo.

Una funz. di più variabili può essere continua rispetto ad una singola variabile, cioè ritenendo costanti le altre variabili; una funz. continua in (x_0, y_0) rispetto alle singole variabili può non essere continua in (x_0, y_0) ; ma se esiste il limite dei valori di $f(x, y)$ al tendere *comunque* di (x, y) ad (x_0, y_0) codesto limite è $f(x_0, y_0)$ e la funzione è continua in (x_0, y_0) .

Teor. dell'uniforme continuità. Se $f(x, y)$ è continua nel campo C prefissato un numero σ piccolo a piacere esiste un numero r tale che in qualunque cerchio di raggio $\leq r$ contenuto in C , l'oscillazione della funzione è $< \sigma$.

Generalmente continua dicesi $f(x, y)$ in C se è continua in tutti i punti tranne un numero finito di punti od un numero finito di linee; **generalmente continua** dicesi $f(x, y, z)$ in un campo se è continua in tutti i punti del campo tranne un numero finito di punti, o di linee o di superficie.

9. — **Funzioni composte.** Se $u = u(x)$ e $v = v(x)$ sono 2 funzioni definite in $a \mapsto b$, e se per ogni coppia (u, v) di valori che le dette funzioni assumono al variare di x in $a \mapsto b$, si ha un valore determinato per z cioè è $z = z(u, v)$, la z resta definita quale funzione di x in $a \mapsto b$; si dice che z è **funz. composta** di x mediante le funz. $u = u(x)$ e $v = v(x)$, che diconsi le **funzioni componenti**. Se in un piano assumiamo u, v

come coord. cartes. di un punto, il luogo dei punti (u, v) che si hanno da $u = u(x)$, $v = v(x)$ al variare di x in $a - b$ è una linea L (Cap. III § 1); ora se $u(x)$ e $v(x)$ sono continue in x , $z(u, v)$ è continua secondo L (§ 8) in (u, v) essendo $u(x) = u$, $v(x) = v$, la $z(u(x), v(x))$ è continua in x . Se poi $u(x)$ e $v(x)$ sono continue in $a - b$ e la $z(u, v)$ è continua in ogni punto di L secondo L , la $z(u(x), v(x))$ è continua in $a - b$.

In un campo C siano definite le 2 funzioni $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$; se per ogni coppia di valori u, v che le dette funz. assumono al variare di x e y in C corrisponde per z un valore determinato, cioè se è $z = z(u, v)$, la z resta definita quale funzione di x e y in C ; dicesi **funzione composta** di x, y mediante le $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ che diconsi le **componenti**. Se in (x, y) sono continue la $u(x, y)$ e la $v(x, y)$ e in (u, v) (essendo $u(x, y) = u$, $v(x, y) = v$) è continua la $z(u, v)$, la funzione $z(u(x, y), v(x, y))$ è continua in (x, y) . Definizioni analoghe valgono se le variabili sono complesse.

CAPITOLO XXXIV.

Infinitesimi ed infiniti

1. — **Infinitesimi.** Una funzione $f(x)$ si dice **infinitesima** per $x = a$ se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Infinitesime dello stesso ordine si dicono due funzioni y_1 e y_2 entrambe infinitesime per $x = a$, se il rapporto $|y_1 : y_2|$ rimane in un certo intorno di $x = a$ compreso fra due numeri finiti diversi da zero, o se, in particolare $y_1 : y_2$ ha un limite finito $\neq 0$, per $x = a$. Se $\lim_{x \rightarrow a} (y_1 : y_2) = 0$ si dice che y_1 è in-

finitesima d'ordine superiore di y_2 ; se $\lim_{x=a} |y_1 : y_2| = \infty$ si dice che y_1 è infinitesima d'ordine inferiore di y_2 . Ci sono infinitesimi pei quali non sono verificate nessuna delle tre precedenti ipotesi. Ad es. $x \operatorname{sen} (1 : x)$ ed x sono 2 infinitesimi per $x=0$; il rapporto fra i loro moduli è $|\operatorname{sen} (1 : x)|$, il cui valore al tendere di x a 0 oscilla continuamente fra 0 ed 1.

La somma ed il prodotto di infinitesimi in numero finito in $x=a$ sono ivi pure infinitesimi.

Se y_1 ed y_2 sono infinitesimi per $x=a$ e $\lim_{x=a} (y_1 : y_2) = 1$, $y_1 - y_2$ è infinitesimo d'ordine superiore rispetto a y_1 e y_2 ; e viceversa.

Principio della sostituzione degli infinitesimi. Se $\lim_{x=a} (y_1 : y_2)$ è un numero finito, allo stesso limite tende $(y_1 + \varepsilon_1) : (y_2 + \varepsilon_2)$ se $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sono infinitesimi d'ordine superiore a y_1 e y_2 .

Infinitesimi convergenti in ugual grado si dicono infinite funzioni $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ infinitesime per $x=a$, quando assegnato un σ piccolo a piacere, esiste un intorno di a entro cui tutti i moduli delle y_i sono $< \sigma$. Sono, ad es., convergenti in ugual grado $(x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^n, \dots$ e non lo sono $(x-a), \sqrt[3]{x-a}, \dots, \sqrt[n]{x-a}, \dots$

Infinitesimi d'ordine uniformemente superiore si dicono gli infiniti infinitesimi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n, \dots$ rispetto agli infinitesimi $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ se i quozienti $\varepsilon_1 : y_1, \varepsilon_2 : y_2, \dots, \varepsilon_n : y_n, \dots$ sono infinitesimi convergenti in ugual grado. Se una serie di infinitesimi $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \dots$ converge assolutamente ad A , ad A converge pure la serie $(y_1 + \varepsilon_1) + (y_2 + \varepsilon_2) + \dots + (y_n + \varepsilon_n) + \dots$ se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ sono infinitesimi d'ordine uniformemente superiore ad $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$

Ordine degli infinitesimi. Quando una o più funzioni divergono infinitesime in $x=a$, si dice **infinitesimo unità** (o **infinitesimo principale**) la funzione $x-a$. Si dice che y è infinitesimo di ordine n se il $\lim_{x=a} [y : (x-a)^n]$ è un numero

finito $\neq 0$ o per lo meno $|y:(x-a)^n|$ finisce per rimanere compreso fra due numeri finiti > 0 . Il valore A del limite precedente dicesi **valore principale** dell'infinitesimo; $A(x-a)^n$ dicesi **parte principale** dell'infinitesimo. Es. $1 - \cos x$ è infinitesimo d'ordine 2 in $x = 0$, perchè $\lim_{x=0} (1 - \cos x): x^2 =$

$= \frac{1}{2}$; è infinitesima $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ in $x = 1$ ed in $x = 2$. Esistono

funzioni che diventano infinitesime in $x = a$ di un ordine minore di qualunque numero $m > 0$, per quanto piccolo; ad es. $1: \log x$ per $x = 0$; di conseguenza esistono infinitesimi di ordine maggiore (o minore) di m e minore (o maggiore) di qualunque numero di quanto poco si vuole superiore ad m ; ad es. $x^m: \log x$ per $x = 0$ è infinitesimo d'ordine maggiore di m e minore di qualunque numero superiore ad m . È da notarsi che la differenza che può esistere fra le due locuzioni « ordine maggiore di m » ed « ordine rappresentato da un numero maggiore di m ».

Se in $x = a$ è y_1 infinitesima d'ordine n_1 e y_2 d'ordine $n_2 > n_1$, $y_1 + y_2$ è infinitesima dell'ordine n_1 ed il valor principale è quello di y_1 . Se $n_2 = n_1$ l'ordine di $y_1 + y_2$ è uguale ad n_1 , ma può essere anche maggiore se la somma dei valori principali è nullo. Il prodotto di due infinitesimi y_1, y_2 degli ordini n_1, n_2 è infinitesimo dell'ordine $n_1 + n_2$; il rapporto $y_1:y_2$ è infinitesimo dell'ordine $n_1 - n_2$, se $n_1 > n_2$.

Se una o più funzioni diventano infinitesime in $x = \infty$, si prende per infinitesimo unità $1:x$; y dicesi infinitesima in $x = \infty$ d'ordine m se $\lim_{x=\infty} y x^m$ è finito e $\neq 0$, o se $|x^m y|$ al tendere di $x = \infty$ finisce per essere compreso fra due numeri finiti > 0 .

2. — **Infiniti**. Se, per x tendente ad a , $|f(x)|$ cresce fino a superare qualsiasi numero assegnabile, si dice che $f(x)$ è **infinita** in $x = a$. Se y_1, y_2 divengono entrambe infinite in $x = a$ e $|y_1:y_2|$ finisce col rimanere compreso tra due numeri finiti > 0 o in particolare se $y_1:y_2$ ha un limite finito diverso dallo zero, si dice che y_1 e y_2 sono infinite dello stesso ordine:

se $\lim_{x=a} (y_1 : y_2) = 0$ si dice che y_1 è infinita d'ordine minore di y_2 e se $\lim_{x=a} |y_1 : y_2| = \infty$ si dice che y_1 è infinita d'ordine maggiore di y_2 .

Infinito unità è la funzione $1 : (x - a)$; si dice che una funzione è infinita d'ordine n se è infinita dello stesso ordine di $1 : (x - a)^n$.

Esistono funzioni infinite in $x = a$ di ordine minore (o maggiore) di un numero m e maggiore (o minore) di qualunque numero di quanto poco si vuole inferiore (o superiore) ad m . Ad es. $(\log. x) : x^m$ è infinito in $x = 0$ di un ordine minore di m ma maggiore di qualunque numero superiore ad m .

Poichè $1 : (x - a)^n = (x - a)^{-n}$ si suole dire infinitesima d'ordine $-n$ una funzione che sia infinita d'ordine n . Una funzione si dice infinitesima d'ordine 0, in $x = a$, se ivi è finita e non nulla.

Se y_1 diventa infinita per $x = \infty$, si prende come infinito unità la funzione $y = x$; si dice y_1 infinita d'ordine m se $\lim_{x=\infty} (y : x^m)$ è finito e diverso da zero.

CAPITOLO XXXV.

Integrale definito

1. — **Definizione.** In un intervallo $a \vdash b$ sia data la funzione limitata $f(x)$. Si divida $a \vdash b$ in parti $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ le cui misure indicheremo colle stesse lettere; siano l_i, L_i, D_i il limite inferiore, il limite superiore e l'oscillazione di $f(x)$ in δ_i . Le somme $S = \sum_1^n \delta_i L_i$ al variare comunque dei sistemi di divisioni di $a \vdash b$ costituiscono un gruppo d'infiniti numeri limi-

tato, poichè è compreso fra $(b - a) L$, e $(b - a) l$, essendo L ed l i limiti superiore ed inferiore di $f(x)$ in $a \vdash b$: questo gruppo abbia il limite inferiore g . Le somme $s = \sum_1^n \delta_i l_i$ costituiscono in modo analogo un gruppo di infiniti numeri limitato, di cui sia G il limite superiore. La totalità dei sistemi di divisione di $a \vdash b$ in parti δ_i può *ordinarsi* (Cap. XX, § 3)* qualora si convenga che un sistema di divisione ζ segua un altro ζ' , quando la massima parte d di ζ è minore della massima parte di ζ' ; che, se queste due massime parti sono uguali, cercheremo, considerando gli intervallini δ_i in ordine di grandezza decrescente, i primi due disuguali ed allora ζ segue ζ' se di questi è minore quello relativo a ζ . Anche l'aggregato delle somme S può ordinarsi convenendo che una somma S segua una somma S' quando dei due sistemi di divisione ζ , ζ' corrispondenti, ζ segue ζ' ; in ugual modo si ordina l'aggregato delle somme s . Ora si dimostra che (**Teor. di Darboux**) il limite dell'aggregato ordinato delle S è g , suo limite inferiore, e il limite dell'aggregato ordinato delle s è G , suo limite superiore. Il numero g dicesi **integrale superiore (o per eccesso)** di $f(x)$ nell'intervallo $a \vdash b$ e si indica con $\overline{\int}_a^b f(x) dx$; il numero G si dice **integrale inferiore (o per difetto)** di $f(x)$ nell'intervallo $a \vdash b$ e si indica con $\underline{\int}_a^b f(x) dx$.

Quando accada che $g = G$, cioè $\lim_{d \rightarrow 0} \sum \delta_i D_i = 0$ (d massima parte fra le δ_i) la funzione $f(x)$ si dice **integrabile** nell'intervallo $a \vdash b$ ed il valore $g = G$ dicesi **integrale definito** di $f(x)$ nell'intervallo $a \vdash b$ (o da a a b) e si rappresenta con $\int_a^b f(x) dx$; **estremi** dell'integrale diconsi a e b ; a l'inferiore e b il superiore. La condizione $\lim_{d \rightarrow 0} \sum \delta_i D_i = 0$ è la **condizione d'integrabilità di Riemann**. Quando essa è soddisfatta,

* Questa considerazione che semplifica notevolmente la dimostrazione del teor. di Darboux è stata introdotta dal prof. Pincherle nelle sue lezioni di calcolo.

il limite della somma dei prodotti delle parti δ_i per un valore qualunque f_i compreso fra l_i ed L_i (in particolare il valore $f(x_i)$ assunto dalla $f(x)$ in un punto qualsivoglia x_i di δ_i al tendere a zero della massima parte d , è ancora $g = G$; cioè $\lim_{d=0} \sum f_i \delta_i = \int_a^b f(x) dx$; e questo limite esiste determinato

qualunque sia la successione dei sistemi di divisione che si usa pel passaggio al limite, comunque sia scelto il valore f_i purchè compreso fra l_i e L_i , o in particolare, comunque sia scelto il punto x_i in d_i ove si calcola il fattore $f(x_i)$.

Significato geometrico di integrale definito Vedi Capitolo XLV § 1.

2. — **Proprietà degli integrali definiti.** a) Scambiando gli estremi l'integrale cambia di segno; cioè $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

b) Una funzione integrabile in un intervallo lo è in qualunque sua parte; se a, b, c sono 3 punti dell'intervallo che si succedono in modo qualsivoglia, $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

c) Se $f_1(x), f_2(x)$ sono integrabili in $a \rightarrow b$ è pure integrabile $f_1(x) + f_2(x)$ ed è $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$. L'operazione di integrazione definita è distributiva. Se gli addendi sono in numero infinito vedi Cap. XXIV, § 2.

d) Il prodotto $f_1(x) f_2(x)$ è integrabile in $a \rightarrow b$ se ivi lo sono i fattori, ed il quoziente $f_1(x) : f_2(x)$, lo è pure nell'intervallo $a \rightarrow b$ se il limite inferiore di $|f_2(x)|$ è $\neq 0$.

e) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, se k è una costante.

f) Se $f_1(x), f_2(x)$ coincidono ovunque tranne in un numero finito di punti, se è integrabile l'una è integrabile l'altra funzione ed i due integrali estesi ad uno stesso intervallo coincidono.

g) Se $f_1(x) \geq f_2(x)$ in $a \rightarrow b$ e ivi sono integrabili, è $\int_a^b f_1(x) dx \geq \int_a^b f_2(x) dx$.

h) 1° **Teor. della media.** Se $f_1(x), f_2(x)$ sono integrabili in $a \rightarrow b$ e $f_2(x)$ è sempre di un segno, è $\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx =$

$= \vartheta \int_a^b f_2(x) dx$ essendo ϑ un numero conveniente, compreso fra il limite inferiore e superiore di $f_1(x)$ in $a \vdash b$. Se $f_2(x) = 1$, $\int_a^b f_1(x) dx = \vartheta (b - a)$.

i) Una funzione non crescente o non decrescente (Capitolo XXXIII § 6) è integrabile.

l) 2° Teor. della media. Se $f(x)$ è integrabile in $a \vdash b$, $\varphi(x)$ è non crescente o non decrescente, vi è un punto c per cui $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^c f(x) dx + \varphi(b-0) \int_c^b f(x) dx$ ove $\varphi(a+0) = \lim_{x=a+0} \varphi(x)$, $\varphi(b-0) = \lim_{x=b-0} \varphi(x)$.

m) $\int_a^x f(x) dx$ ove si consideri l'estremo superiore variabile è funzione di questo estremo, continua in ogni intervallo ove $f(x)$ è integrabile. Per la derivata di questa funzione vedi Cap. XXXVI, § 1.

CAPITOLO XXXVI.

Derivate e differenziali delle funzioni di una variabile

1. — **Definizione di derivata.** — **Incremento** della funzione $f(x)$ dicesi la differenza $f(x_0 + h) - f(x_0)$; **rapporto incrementale** è il quoziente $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$; **rapporto incrementale destro** se h è positivo, **sinistro**, se h è negativo.

Derivata della funzione $f(x)$ nel punto x_0 è il limite, se esiste, del rapporto incrementale scritto e la si denota con

$f'(x_0)$, con $Df(x_0)$ o con $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ (Vedi § 7).

Derivata a destra è il limite per $h=0$ del rapporto incrementale destro; **derivata a sinistra** è il limite per $h=0$ del rapporto incrementale sinistro. Se la derivata a destra e a sinistra in un punto x coincidono, eguagliano la derivata ordinaria.

Ogni funzione derivabile in un punto x , ivi è continua. Non vale la proposizione reciproca: ad es. la funzione (di Weierstrass) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x \pi)$ ove è $0 < a < 1$, b intero e dispari, $ab > 1 + (3\pi/2)$ è funzione continua ma non derivabile in alcun punto.

Significato geometrico del rapporto incrementale è quello di coefficiente angolare della retta che passa pei due punti $(x, f(x))$ $(x+h, f(x+h))$.

Significato geometrico di derivata è quello di coefficiente angolare della tangente alla curva di equazione $y = f(x)$ nel punto $(x, f(x))$. (Vedi significato cinematico Cap. LV, § 2).

Derivata di un integrale. La funzione $\varphi(x) = \int_a^x f(x) dx$ è derivabile e ammette per derivata $f(x)$, cioè $\varphi'(x) = f(x)$ in tutti i punti in cui $f(x)$ è finita e continua.

La derivata di una costante è nulla e se $f'(x) = 0$ in tutto un intervallo, $f(x)$ è costante (§ 5).

2. — **Regole di derivazione.** La somma di un numero finito di funzioni ha per derivata la somma delle derivate. Per un numero infinito, vedi Cap. XLIV. La derivata di $c f(x)$ è $c f'(x)$. La derivata del prodotto di un numero finito di funzioni è la somma dei prodotti della derivata di ogni singolo fattore per tutti gli altri fattori; cioè $D f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x) = \sum_{r=1}^n f_1 f_2 \cdots f_{r-1} f'_{r-1} f_{r+1} \cdots f_n$.

Se $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ con $f(x) \neq 0$, $F'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$.

Se $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ con $f_2(x) \neq 0$, $F'(x) = \frac{f_2(x)f_1'(x) - f_1(x)f_2'(x)}{f_2(x)^2}$.

Derivata della funzione inversa. Se di $y = y(x)$ è $x = x(y)$ la funzione inversa (Cap. XXXIII, § 6), è $y'(x) = 1 : x'(y)$. Vedi esempi, § 3.

Derivata delle funzioni di funzione. Se $y = y(u)$ è funzione di u ed u è funzione di x , $u = u(x)$, vale la formula $D_x y = D_u y \cdot D_x u$. Se $y = y(u)$, $u = u(v)$, $v = v(x)$ è $D_x y = D_u y \cdot D_v u \cdot D_x v$. Vedi esempi, § 3.

3. -- **Derivate di alcune funzioni.** $D x^m = m x^{m-1}$;
 $D \operatorname{sen} x = \cos x$; $D \cos x = -\operatorname{sen} x$; $D \operatorname{tg} x = 1 : \cos^2 x$;
 $D \operatorname{cotg} x = -1 : \operatorname{sen}^2 x$; $D \sec x = \operatorname{sen} x : \cos^2 x$; $D \operatorname{cosec} x =$
 $= -\cos x : \operatorname{sen}^2 x$; $D e^x = e^x$; $D a^x = a^x \log a$ (log. naturale);
 $D \log x = \frac{1}{x}$ (log. naturale).

Es. di derivate di funzioni inverse:

$$\begin{aligned} \text{Da } y = \operatorname{sen} x \text{ si trae } D \operatorname{arc} \operatorname{sen} y &= \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ * y = \cos x \quad * \quad D \operatorname{arc} \cos y &= \frac{-1}{\operatorname{sen} x} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \\ * y = \operatorname{tg} x \quad * \quad D \operatorname{arc} \operatorname{tg} y &= \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1+y^2} \\ * y = \operatorname{cotg} x \quad * \quad D \operatorname{arc} \operatorname{cotg} y &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{1+y^2} \\ * y = \sec x \quad * \quad D \operatorname{arc} \sec y &= \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{y \sqrt{y^2-1}} \\ * y = \operatorname{cosec} x \quad * \quad D \operatorname{arc} \operatorname{cosec} y &= -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{-1}{y \sqrt{y^2-1}} \\ * y = a^x (a > 0) \quad * \quad D \log_a y &= \frac{1}{a^x \log_e a} = \frac{1}{y \log_e a} \end{aligned}$$

Es. di derivate di funz. di funzioni. $D \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$;

$$\begin{aligned} D f(x)^m &= m f(x)^{m-1} f'(x), \quad D \sqrt[n]{f(x)} = \frac{f'(x)}{n \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}; \quad D \sqrt[n]{f(x)} = \\ &= \frac{f'(x)}{n \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}; \quad D e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x); \quad D a^{f(x)} = a^{f(x)} f'(x) \log a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{con } a > 0; \quad D \operatorname{arc} \operatorname{sen} f(x) &= \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}; \quad D \operatorname{arc} \operatorname{tg} f(x) = \\ &= \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}; \quad D \int_a^{u(x)} f(x) dx = f(u(x)) u'(x). \end{aligned}$$

4. — **Funzione crescente** in $x = x_0$ è la $f(x)$ se esiste un intorno di x_0 in cui $f(x_0 + h) > f(x_0)$ se $h > 0$ e $f(x_0 + h) < f(x_0)$ se $h < 0$. I rapporti incrementali destro e sinistro

debbono essere > 0 ; e viceversa se i rapporti incrementali destri e sinistri relativi ad x_0 pei valori $|h| < \delta$ di un conveniente numero δ sono entrambi > 0 , la $f(x)$ è crescente in x_0 : ne consegue che se esiste la derivata in x_0 questa non può essere < 0 . Se in x_0 la derivata di $f(x)$ è > 0 , la $f(x)$ è crescente. Una funzione crescente in ogni punto di $a \vdash b$ dicesi crescente nell'intervallo (Cap. XXXIII, § 6). Se in tutto $a \vdash b$ la derivata è positiva, la funzione è crescente in $a \vdash b$. (Cfr. § 5, f e Cap. XLIII, § 1).

Funzione decrescente in $x = x_0$ è la $f(x)$ se esiste un intorno di x_0 in cui $f(x_0 + h) < f(x_0)$ se $h > 0$ e $f(x_0 + h) > f(x_0)$ se $h < 0$. I rapporti incrementali destro e sinistro debbono essere < 0 ; e viceversa se i rapporti incrementali destro e sinistro relativi ad x_0 pei valori di $|h| < \delta$ di un conveniente numero δ sono < 0 , la $f(x)$ è decrescente in x_0 : se esiste la derivata in x_0 , questa non è > 0 . Se in x_0 la derivata di $f(x)$ è < 0 la $f(x)$ è decrescente. Una funz. decrescente in ogni punto di $a \vdash b$ dicesi decrescente nell'intervallo. Se in tutto $a \vdash b$ la $f'(x) < 0$, la $f(x)$ è decrescente (Cfr. § 5, f ; Capitolo XLIII, § 1).

Massimo presenta la $f(x)$ in x_0 se esiste un intorno di x_0 ove i valori $f(x_0 + h)$ di $f(x)$ sono $< f(x_0)$. Condizione necessaria e sufficiente perchè la $f(x)$ abbia in $x = x_0$ un massimo è che per $|h| < \delta$ i rapporti incrementali destri siano < 0 , e quelli sinistri > 0 : condizione necessaria (non sufficiente), se la $f(x)$ è derivabile in x_0 , è che sia $f'(x_0) = 0$.

Minimo presenta la $f(x)$ in x_0 se esiste un intorno di x_0 ove i valori $f(x_0 + h)$ di $f(x)$ sono $> f(x_0)$. Condizione necessaria e sufficiente perchè la $f(x)$ abbia in $x = x_0$ un minimo è che per $|h| < \delta$ i rapporti incrementali destri siano > 0 e quelli sinistri < 0 ; se $f(x)$ è derivabile in $x = x_0$ è necessario (non sufficiente) che sia $f'(x_0) = 0$.

Teor. di Rolle. Fra due punti in cui una funz. derivabile assume lo stesso valore ve n'ha uno in cui la derivata si annulla.

5. — **Teorema del valore medio** (o di *Lagrange*). Se $f(x)$ è una funzione continua in $x_0 \vdash x_0 + h$ e derivabile nei punti interni, è $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \vartheta h)$ con $0 < \vartheta < 1$, od anche $f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0 + \vartheta h)$.

Geometricamente la prima formula esprime che il coefficiente angolare della corda passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ eguaglia il coefficiente angolare della tangente in un punto dell'arco; cioè nell'arco di curva sotteso dalla corda detta v'ha un punto in cui la tangente è parallela alla corda.

Conseguenze del teorema del valor medio:

a) Se una funzione $f(x)$ ha la derivata nulla in tutti i punti di un intervallo, è ivi costante.

b) Se 2 funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ hanno in un intervallo le derivate uguali, esse differiscono per una costante.

c) Se 2 funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono continue in $a \vdash b$ e ivi coincidono le derivate $f'(x)$, $\varphi'(x)$ ad eccezione di alcuni punti in numero finito, le 2 funzioni differiscono per una costante.

d) Se $f(x)$ è una funzione continua che ammette derivata finita $f'(x)$ in ogni punto, eccettuati al più alcuni in numero finito, ogni altra funzione continua avente la stessa derivata è contenuta nella espressione $f(x) + c$ (c costante arbitraria) che dicesi **primitiva** di $f'(x)$.

e) Se $f(x)$ ha derivata $f'(x)$ continua e finita in $a \vdash b$, il rapporto incrementale $[f(x + h) - f(x)] : h$ converge in ugual grado in tutto l'intervallo $a \vdash b$ a $f'(x)$; cioè, prefissato un numero σ piccolo a piacere, esiste un numero positivo h_σ tale che per $|h| < h_\sigma$ si ha $\left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \sigma$ qualunque sia il punto x di $a \vdash b$.

f) Se $f'(x)$ esiste determinata in ogni punto interno ad $a \vdash b$ ed è ivi positiva (negativa) tranne che in un qualche punto in cui si annulla, la funzione è crescente (decrescente) in $a \vdash b$.

6. — **Derivate successive.** Se $f(x)$ ha in ogni punto di $a \mapsto b$ derivata $f'(x)$, questa è una funzione di x nello stesso intervallo, che può essere derivabile. La derivata di $f'(x)$ dicesi la **derivata seconda** di $f(x)$ e si indica con $f''(x)$, con $D^2 f(x)$ o con $\frac{d^2 f}{dx^2}$ (§ 7). La derivata di $f''(x)$ dicesi **derivata terza** di

$f(x)$ e si indica con $f'''(x)$, con $D^3 f(x)$ o con $\frac{d^3 y}{dx^3}$; in generale dicesi **derivata di ordine n** di $f(x)$ la derivata della derivata di ordine $n - 1$ e si denota con $D^n f(x)$, con $f^{(n)}(x)$ o con $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Es. La e^x ha tutte le successive derivate uguali a e^x stessa. Per le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ si ha: $D^{4k+1} \sin x = \cos x$; $D^{4k+2} \sin x = -\sin x$; $D^{4k+3} \sin x = -\cos x$, $D^{4k} \sin x = \sin x$; $D^{4k+1} \cos x = -\sin x$; $D^{4k+2} \cos x = -\cos x$; $D^{4k+3} \cos x = \sin x$; $D^{4k} \cos x = \cos x$; $D^m a^x = a^x (\log a)^m$; $D^m \log x = (-1)^{m-1} \frac{m-1!}{x^m}$.

La derivata d'ordine n di una somma di più funzioni è la somma delle derivate di ordine n dei singoli addendi, cioè se $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$; $F^{(n)}(x) = f_1^{(n)}(x) + f_2^{(n)}(x) + \dots + f_m^{(n)}(x)$.

Se $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, $F'(x) = f_1 f_2' + f_1' f_2$; $F''(x) = f_1 f_2'' + 2 f_1' f_2' + f_1'' f_2$; $F'''(x) = f_1 f_2''' + 3 f_1' f_2'' + 3 f_1'' f_2' + f_1''' f_2$; $F^{IV}(x) = f_1 f_2^{IV} + 4 f_1' f_2''' + 6 f_1'' f_2'' + 4 f_1''' f_2' + f_1^{IV} f_2$; in generale si ha la:

Regola di Leibnitz: per ottenere la derivata seconda, terza, ... del prodotto $F = f_1(x) f_2(x)$ basta scrivere lo sviluppo delle potenze seconda, terza, ... del binomio $f_1 + f_2$: poi in tale sviluppo aggiungere al primo e all'ultimo termine rispettivamente il fattore mancante f_1 o f_2 coll'esponente zero e assumere indi gli esponenti come indici di derivazione. Lo sviluppo di $F^{(n)}$ dicesi n -esima potenza simbolica di $(f_1 + f_2)$ e si indica con $F^{(n)} = (f_1 + f_2)^{(n)}$.

7. — **Differenziale.** Il prodotto di $f'(x)$ per l'incremento h arbitrario della variabile si chiama differenziale della $f(x)$ nel punto x e si indica con dy o con $df(x)$.

L'incremento $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ della funzione differisce dal differenziale dy per una quantità che è infinitesimo di ordine superiore ad h . Viceversa se si sa che $\Delta y = ph + \omega$ ove p è indipendente da h e ω è infinitesimo d'ordine superiore di h , ph è il differenziale (p la derivata).

Il differenziale si denota con $dy = f'(x) dx$: onde la derivata con $\frac{dy}{dx}$.

Il differenziale di $\int_a^x f(x) dx$ è $f(x) dx$; mentre è $d \int_x^b f(x) dx = -f(x) dx$.

Significato geometrico di differenziale. Se si considera la curva $y = f(x)$, il differenziale dy rappresenta l'incremento che l'ordinata alla tangente ha subito nel passare da x a $x + dx$.

Differenziazione di una somma o prodotto di più funzioni, del reciproco di una funzione, del quoziente di due funzioni, della funzione inversa: valgono le regole per la derivazione (§ 2) collo scambio della parola « derivata » in « differenziale ».

Differenziale delle funz. di funzione. Se $y = y(u)$ con $u = u(v)$, $v = v(x)$ è $dy = D_u y \cdot D_v u \cdot D_x v \cdot dx = D_u y \cdot D_v u \cdot dv = D_u y \cdot du$, ossia il differenziale di una funzione di funzione con più funzioni intermedie si può esprimere per una qualunque di esse, come se la medesima fosse la variabile indipendente.

Differenziali successivi. Differenziale secondo di $f(x)$ è il differenziale del differenziale dy ; cioè $d(dy) = d^2 y = f''(x) dx^2$; il differenziale del differenziale secondo cioè $d(d^2 y) = d^3 y = f'''(x) dx^3$ è il differenziale terzo; ... in generale il differenziale n -esimo (differenziale del differenziale $(n-1)$ -esimo) è $d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$.

Per le derivate successive si avranno allora le forme:

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}; \quad f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}; \dots f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Per avere il differenziale di qualsiasi ordine di una somma o di un prodotto di più funzioni valgono le stesse regole della derivazione ove si cambi la parola « derivata » in « differenziale ».

8. — **Derivate e differenziali successivi delle funzioni di funzione.** Per la funzione $y = y(u)$ con $u = u(x)$ le derivate seconda, terza, etc... in x sono date da $y''_x = y''_u \cdot u'_x{}^2 + y'_u u''_x$; $y'''_x = y'''_u u'_x{}^3 + 3 y''_u u'_x u''_x + y'_u u'''_x$; $y^{iv}_x = y^{iv}_u u'_x{}^4 + 6 y'''_u u'_x{}^2 u''_x + 3 y''_u u'_x{}^2 u'''_x + 4 y''_u u''_x u'_x + y'_u u^{iv}_x$; ... i differenziali successivi sono $d^2 y = y''_u du^2 + y'_u d^2 u$; $d^3 y = y'''_u d u^3 + 3 y''_u d u d^2 u + y'_u d^3 u$; $d^{iv} y = y^{iv}_u d u^4 + 6 y'''_u d u^2 d^2 u + 3 y''_u (d^2 u)^2 + 4 y''_u d^3 u d u + y'_u d^4 u$; ...

Cambiamento della variabile indipendente. Siano $x = x(t)$, $y = y(t)$ funz. derivabili; se eliminando t si ricava y in funzione di x , $y = F(x)$, la determinazione delle derivate di $F(x)$ mediante le derivate di $x(t)$ e $y(t)$ è il problema a cui si dà il nome di **cambiamento della variabile indipendente**. Si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'(t) y''(t) - x''(t) y'(t)}{x'(t)^3}; \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{x'(t) \{ x'(t) y'''(t) - y'(t) x'''(t) \} - 3 x''(t) \{ x'(t) y''(t) - x''(t) y'(t) \}}{x'(t)^5}, \dots$$

9. — **Derivate successive della funzione inversa.** Se di $y = y(x)$ è $x = x(y)$ la funz. inversa, $y''(x) = - \frac{x''(y)}{x'(y)^3}$;

$$y'''(x) = \frac{-x'(y) x'''(y) + 3 x''(y)^2}{x'(y)^5}$$

$$y^{iv}(x) = \frac{10 x'(y) x''(y) x'''(y) - x'(y)^2 x^{iv}(y) - 15 x''(y)^3}{x'(y)^7}, \dots$$

9. — **Wronskiano** di n funzioni $y_1, y_2, \dots y_n$ della variabile x dicesi il determinante che ha per 1^a linea $y_1, y_2, \dots y_n$, e per $n - 1$ linee successive le derivate prime, seconde ... $n - 1$ -esime.

Linearmente indipendenti si dicono n funzioni $y_1, y_2, \dots y_n$ di x quando non esistono n costanti non tutte nulle per cui si abbia identicamente $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0$: **linearmente di-**

pendenti nel caso contrario. Il Wronskiano di n funzioni linearmente dipendenti è identicam. nullo. Se il wronskiano di n funzioni è nullo e se in nessun punto di un intervallo $a \vdash b$, esclusi al più gli estremi, si annullano insieme i complementi algebrici degli elementi dell'ultima linea, esiste per tutti i punti di $a \vdash b$ una medesima relazione lineare omogenea fra le y_i a coeffic. costanti non tutti nulli, cioè $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0$.

Derivate del wronskiano Cap. XXXVII, § 7.

CAPITOLO XXXVII.

Derivate e differenziali delle funzioni di più variabili

1. — Derivate parziali delle funzioni di più variabili.

Per una funz. $f(x, y)$ si possono considerare i due rapporti incrementali relativi ad x o ad y rispettiv. $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$.

$\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$, nel primo dei quali si è tenuto fisso il va-

lore di y e si è dato un incremento al valore di x , e viceversa nel secondo si è tenuto fisso il valore di x e si è dato un incremento al valore di y . Il limite del 1° rapporto per h tendente a zero, dicesi, quando esiste, **derivata parziale rapporto ad x** in (x_0, y_0) e si denota con $f'_{.x}(x_0, y_0)$, o con $D_x f(x_0, y_0)$

oppure con $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ o con $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$: il limite del 2° rapporto per k tendente a zero, dicesi **derivata parziale rapporto ad y** in (x_0, y_0)

e si denota con $f'_{.y}(x_0, y_0)$ o con $D_y f(x_0, y_0)$, oppure con $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ o

con $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x_0=x_0 \\ y_0=y_0}}$. Per le funz. di 3 variabili $f(x, y, z)$ si hanno

i 3 rapporti incrementali parziali $\{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)\} : h$; $\{f(x, y+k, z) - f(x, y, z)\} : k$; $\{f(x, y, z+l) - f(x, y, z)\} : l$ i cui limiti per $h, k, l = 0$ rispettiv. si dicono derivate parziali di $f(x, y, z)$ rapporto ad x a y o a z rispettiv. Si indicano con f'_x, f'_y, f'_z o con $D_x f, D_y f, D_z f$, oppure con $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Significato geometrico delle derivate parziali di $f(x, y)$.

La $f'_x(x_0, y_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva intersezione della superficie $z = z(x, y)$ con il piano $y = y_0$, condotta pel punto (x_0, y_0) ; la $f'_y(x_0, y_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla linea d'intersezione della superficie $z = f(x, y)$ col piano $x = x_0$ condotta pel punto (x_0, y_0) ; il coefficiente angolare intendendosi rispetto a coppie di assi nei detti piani, paralleli ai coordinati.

2. — Differenziali delle funzioni di più variabili.

Differenziale parziale in x della funzione $f(x, y)$ dicesi il prodotto della derivata parziale in x per l'incremento arbitrario della variabile x , cioè $f'_x dx$; **differenziale parziale in y** è il prodotto della derivata parziale in y per l'incremento della variabile y , cioè $f'_y dy$.

Differenziale totale dicesi la somma dei due differenziali parziali: se $z = f(x, y)$ è la funzione, il suo differenziale totale si indica con dz ed è $dz = f'_x dx + f'_y dy$. Ogni volta che la $z = f(x, y)$ ammette in un punto (x_0, y_0) e nei punti di un certo intorno di esso una delle derivate parziali, ad es. la f'_y che nel punto (x_0, y_0) è continua rispetto ad entrambe le variabili e l'altra derivata f'_x è finita in (x_0, y_0) , l'incremento Δz che la z riceve in corrispondenza ad incrementi h e k dati alle variabili x e y , si può sempre decomporre in due parti l'una della forma $p h + q k$ con p e q indipendenti da h e k , l'altra infinitesima di ordine superiore rispetto a $\sqrt{h^2 + k^2}$; e la parte principale $p h + q k$ è il differenziale totale. (**Teor. del differenziale totale**). Se si ha la funzione dei tre variabili indi-

dipendenti $u = f(x, y, z)$ il differenziale totale è $du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$.

Significato geometrico del differenziale di $f(x, y)$ è l'incremento dell'ordinata che va al piano tangente nel punto $(x, y, f(x, y))$ alla superficie $z = z(x, y)$ corrispondentemente agli incrementi dx, dy dati alle variabili indipendenti x e y .

3. — **Teor. del valor medio.** Nelle ipotesi del teor. del differenziale totale, vale la formula $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$
 $= h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k} + k \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k}$ con $0 < \vartheta < 1$.

Se una funzione $f(x, y)$ ha le derivate parziali f'_x, f'_y nulle in tutto un campo, ivi la $f(x, y)$ è costante: altrettanto dicasi se sono nulle in tutto il campo ad eccezione di qualche punto o linea in numero finito.

Se due funzioni $f(x, y), \varphi(x, y)$ continue in un campo C hanno ivi derivate coincidenti (all'infuori, anche, di punti o linee in numero finito), le due funzioni differiscono per una costante. Se due funzioni $f(x, y), \varphi(x, y)$ hanno in un campo coincidenti le due derivate, rispetto ad una sola variabile, ad es. $f'_x(x, y) = \varphi'_x(x, y)$, esse differiscono o per una costante o per una funzione di y .

4. — **Derivate successive delle funzioni di più variabili.** Se le derivate parziali rapporto ad x e ad y di $f(x, y)$ esistono in tutto un campo, sono funzioni di x e y in quel campo: esse possono essere funzioni derivabili. La derivata parziale rapporto ad x di $\frac{\partial f}{\partial x}$ si indica con $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; la derivata parziale rapporto ad y di $\frac{\partial f}{\partial x}$ si indica con $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; la derivata rapporto ad x e a y rispettivamente di $\frac{\partial f}{\partial y}$ si indicano con $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Si usano anche le notazioni $D_{xx} f$ e f''_{xx} in luogo di $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $D_{yx} f$ e f''_{yx} in luogo di $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ecc. Queste 4 derivate si dicono **de-**

rivate parziali seconde di $f(x, y)$; le due $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ si dicono **pure**, le altre due **miste**.

Teor. dell'inversione nella derivazione: se di $f(x, y)$ esistono $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ in un intorno di (x_0, y_0) , se nell'intorno stesso esiste una delle derivate seconde miste continua in (x_0, y_0) , esiste anche l'altra in (x_0, y_0) ed ivi hanno lo stesso valore.

Derivate parziali terze si dicono le derivate parziali delle derivate parziali seconde; di $f(x, y)$ si hanno le 8 derivate parziali terze $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$. Sotto le condizioni del teor. seguente esse si riducono a 4, essendo $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$.

Se $f(x, y)$ e tutte le derivate parziali dei primi $m - 1$ ordini sono continue in un intorno di (x_0, y_0) e se esiste nello stesso intorno e continua in (x_0, y_0) , una delle derivate m -esime ottenuta derivando, in un ordine qualunque, r volte rispetto ad x , $m - r$ volte rispetto ad y , esistono in (x_0, y_0) e sono ad essa ivi uguali tutte le derivate m -esime che differiscono da essa solo per l'ordine delle derivazioni. Codesta derivata si indica con $\frac{\partial^m f}{\partial x^r \partial y^{m-r}}$. Di $f(x, y)$ sono $m + 1$ le derivate di or-

dine m e cioè $\frac{\partial^m f}{\partial x^m}$, $\frac{\partial^m f}{\partial y \partial x^{m-1}}$, $\frac{\partial^m f}{\partial y^2 \partial x^{m-2}}$, ..., $\frac{\partial^m f}{\partial y^{m-2} \partial x^2}$, $\frac{\partial^m f}{\partial y^{m-1} \partial x}$, $\frac{\partial^m f}{\partial y^m}$.

5. — Differenziali successivi. Differenziale secondo di

$z = f(x, y)$ dicesi il differenziale del differenziale $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, e si indica con $d^2 z$ ed è

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Differenziale terzo dicesi il differenziale del differenziale secondo ed è $d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$; il **differenziale quarto** $d^4 z = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dx^4 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} dx^3 dy + 6 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx^2 dy^2 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} dx dy^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} dy^4$; in generale $d^n z = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \binom{n}{2} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}} dx dy^{n-1} + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n$. Si osservi che il differenziale n -esimo si può avere dalla potenza n -esima di $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, sostituendo al prodotto di derivate la derivazione successiva (es. al prodotto $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{n-h}$ si sostituisce $\frac{\partial^n f}{\partial x^h \partial y^{n-h}}$. Si suole perciò scrivere $d^n z = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right)^{(n)}$ (n -esima potenza simbolica).

Per le funzioni $u = f(x, y, z)$, di 3 variabili x, y, z , si ha $d^{(n)} u = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz\right)^{(n)}$.

6. — **Derivata di $f(x, y)$ in una data direzione.** Presi due punti $P(x_0, y_0)$, $P'(x_0 + h, y_0 + k)$ la cui distanza, supposti gli assi ortogon., è $l = \sqrt{h^2 + k^2}$, si consideri il rapporto $[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)] : l$; si immagini poi di far tendere P' a P mantenendolo sul segmento che unisce P con la posizione iniziale di P' , segmento che forma con l'asse x un angolo α di cui $\cos \alpha = h : l$, il $\lim_{l=0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{l}$, se esiste, è la derivata di $f(x, y)$ nella direzione inclinata di α sull'asse x . Questa derivata esiste se esistono f'_x, f'_y e di più è data da

$f'_x \cos \alpha + f'_y \sin \alpha$. Geometricamente essa rappresenta la tangente dell'angolo che colla sua proiezione su xy fa la tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ alla linea sezione della superficie $z = f(x, y)$ col piano $y - y_0 = \tan \alpha (x - x_0)$ cioè col piano $\parallel$ all'asse z , passante per la retta che esce da (x_0, y_0) ed ha la detta direzione.

Derivate successive in una direzione. La derivata seconda della $f(x, y)$ nel punto xy nella direzione di dianzi è $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \alpha$; la derivata terza $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \cos^3 \alpha + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \sin^3 \alpha$, ... la derivata n -esima è la n -esima potenza simbolica della derivata prima (vedi pag. 234).

7. — Derivate e differenziali delle funzioni composte.

Sia z funzione composta di x mediante le componenti $u = u(x)$ $v = v(x)$, cioè $z = f(u, v)$ (Cap. XXXIII, § 9), se esistono continue la derivate di f rapporto ad u, v e quelle di u, v rapporto ad x , esiste la $\frac{dz}{dx}$ ed è $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}$. Ad esempio

$Df(x)\varphi(x) = \varphi(x)f(x)\varphi'(x) = f'(x) + f(x)\varphi'(x) \log f(x)\varphi'(x)$. Se le funzioni componenti sono le n fun. $u_1, u_2, \dots, u_n$ si ha $\frac{dz}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{du_i}{dx}$.

Il differenziale è $dz = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i$. Se u e v sono funzioni di x e y con derivate parziali continue ed è $z = f(u, v)$ le cui derivate parziali rapporto ad u e v sono continue, esistono $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ e si

ha $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$. Il differenziale totale è $dz = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$.

In generale se $z = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ è funzione delle n funzioni componenti $u_1, u_2, \dots, u_n$ le quali sono funzioni delle m variabili $t_1, t_2, \dots, t_m$, se esistono continue le derivate di f rapporto alle u_i e le derivate delle u_i rapporto alle t_k , la derivata di z rispetto ad una delle variabili t_k è uguale alla somma dei prodotti delle sue derivate rapporto alle funzioni componenti per le derivate di queste rapporto alla variabile considerata; cioè

$$\frac{\partial z}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial t_k}.$$

Il differenziale totale è $dz = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial t_k} \right) dt_k =$
 $= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \sum_{k=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial t_k} dt_k \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i$ cioè si esprime mediante le funzioni componenti come se queste fossero variabili indipendenti. In particolare se $u_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} t_k + b_i$ è $\frac{\partial z}{\partial t_k} =$
 $= \sum_{i=1}^n a_{ik} \frac{\partial f}{\partial u_i}.$

Derivata di un determinante. Sia dato un determinante Δ dell' n -esimo ordine in cui ogni elemento a_{rs} sia funzione di x ; il determinante sarà una funzione composta di x di cui le funzioni componenti sono le n^2 funzioni a_{rs} . La derivata di Δ si compone della somma di n determinanti in ciascuno dei quali ad una linea (o colonna) di funzioni sono sostituite le corrispondenti derivate. Ad esempio

$$D \begin{vmatrix} \sin x & \cotg x \\ \log x & \text{arc sen } x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & -\frac{1}{\sin^2 x} \\ \log x & \text{arc sen } x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin x & \cotg x \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{vmatrix}$$

Se le a_{rs} anzichè funzioni di x fossero funzioni di più variabili, per avere le derivate parziali di Δ si opererebbe nello stesso modo; ogni determinante avrebbe in una linea (o colonna) le derivate parziali delle funzioni di quella linea (o colonna).

La derivata del wronskiano di n funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$ di x è il determinante che si ottiene sostituendo all'ultima linea le derivate dei suoi elementi.

8. — **Funzione omogenea di grado m** dicesi una funz. di più variabili $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ quando si abbia identicamente $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ad es. $\sqrt{(x^2 + y^2)}: x^2 y^2$ è omogenea di grado -1 .

Teorema di Eulero per le funzioni omogenee: se f è omogenea di grado m è $\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Viceversa se f soddisfa la relazione precedente, la funzione è omogenea.

9. — **Derivate e differenziali successivi delle funzioni composte.** Di $y = f(u, v)$ con $u = u(x)$ e $v = v(x)$ le derivate

successive sono: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (u'_x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} u'_x v'_x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} (v'_x)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} u''_x + \frac{\partial f}{\partial v} v''_x$; $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial u^3} (u'_x)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial v} (u'_x)^2 v'_x + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v^2} u'_x (v'_x)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} (v'_x)^3 + 3 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} u''_x u'_x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} (u''_x v'_x + v''_x u'_x) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} v''_x v'_x \right] + \frac{\partial f}{\partial u} u'''_x + \frac{\partial f}{\partial v} v'''_x$, ecc. I differenziali successivi sono: $d^2 y = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial f}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial f}{\partial v} d^2 v$; $d^3 y = \frac{\partial^3 f}{\partial u^3} du^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial v} du^2 dv + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v^2} du dv^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} dv^3 + 3 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} d^2 u du + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} (d^2 u dv + d^2 v du) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} d^2 v dv \right] + \frac{\partial f}{\partial u} d^3 u + \frac{\partial f}{\partial v} d^3 v$, ecc.

Se $u(x)$ e $v(x)$ sono funzioni lineari, ad es. $u(x) = hx + b$; $v(x) = kx + c$, poichè si ha $u'(x) = h$, $v'(x) = k$, $u^{(n)}(x) = 0$, $v^{(n)}(x) = 0$ per $n > 1$, le formule precedenti divengono $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} k^2$; $\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} h + \frac{\partial f}{\partial v} k \right)^{(n)}$ (n -esima potenza simbolica del differenziale primo).

10. — **Determinante funzionale o Jacobiano** di n funzioni $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ delle n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ è il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

che si denota con $\frac{d(f_1 f_2 \dots f_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)}$.

Variando l'ordine delle funz. o delle variabili il jacobiano muta al più di segno.

Se $f_r(x_1 x_2 \dots x_n) \equiv x_r$ si ha

$$\frac{d(f_1 f_2 \dots f_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)} = \frac{d(f_1 f_2 \dots f_{r-1} f_{r+1} \dots f_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_{r-1} x_{r+1} \dots x_n)}.$$

Se $z_1, z_2, \dots, z_n$ sono funzioni di $y_1, y_2, \dots, y_n$ e queste di $x_1, x_2, \dots, x_n$ si ha

$$\frac{d(z_1 z_2 \dots z_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)} = \frac{d(z_1 z_2 \dots z_n)}{d(y_1 y_2 \dots y_n)} \cdot \frac{d(y_1 y_2 \dots y_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)}.$$

In particolare se $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono n funzioni di $x_1, x_2, \dots, x_n$ tali che si possano le x riguardare funzioni delle y (Cap. XLI, § 3) si ha

$$\frac{d(y_1 y_2 \dots y_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)} = 1: \frac{d(x_1 x_2 \dots x_n)}{d(y_1 y_2 \dots y_n)}.$$

Derivate delle funzioni implicite, vedi Cap. XLI.

CAPITOLO XXXVIII.

Integrazione indefinita

1. — **Integrale indefinito o primitiva** di una funzione limitata $f(x)$ dicesi ogni funzione $F(x)$ continua che ammette per derivata $f(x)$ in ogni punto di continuità di quest'ultima, o, ciò che fa lo stesso, che ha per differenziale $f(x) dx$. Se $f(x)$ è integrabile in $a \vdash b$ (Cap. XXXV, § 1), $\varphi(x) = \int_a^x f(x) dx$ (x punto di $a \vdash b$) è una funzione continua

che ammette per derivata $f(x)$ in ogni punto di continuità di questa; è dunque un integrale indefinito di $f(x)$. Ne consegue (Cap. XXXVI, § 5) che ogni altra primitiva $F(x)$ è della forma $\int_a^x f(x) dx + c$, con c costante arbitraria. L'integrale indefinito di $f(x)$ si indica con $\int f(x) dx$. Per definizione, $d \int f(x) dx = f(x) dx$, $\int d f(x) = f(x)$ cioè i segni d e $\int$ applicati successivamente in ordine qualsiasi si distruggono.

Calcolo dell'integrale definito mediante l'indefinito.

Da $F(x) = \int_a^x f(x) dx + c$ ponendo $x = b$, poi $x = a$ e sottraendo si ha $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$; cioè l'integrale definito di $f(x)$ da a a b si calcola facendo la differenza fra i valori che una qualunque primitiva assume nell'estremo superiore ed inferiore.

2. — **Alcuni integrali indefiniti fondamentali.** Se $d f(x) = \varphi(x) dx$, applicando l'operazione di integrazione indefinita, $c + \int \varphi(x) dx$: da ciò un modo di trovare da ogni derivata nota un integrale indefinito: raccogliamone alcuni dedotti dalle formule di derivazione del § 3, Cap. XXXVI.

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{dx}{x} = \log x + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \cos x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x + c$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\log \cos x + c$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc} \sec x + c$
$\int \operatorname{cotg} x dx = \log \sin x + c$	$\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x + c$

In queste formule $\log$ è simbolo di logaritmo naturale.

L'integrazione indefinita è *distributiva*, cioè l'integrale indefinito della somma di un numero finito di funzioni è la somma degli integrali indefiniti delle funzioni; pel caso che il numero delle funzioni sommate sia infinito, vedi Cap. XLIV, § 2.

3. — **Integrazione per parti.** Dalla $d(f_1(x) f_2(x)) = f_1(x) d f_2(x) + f_2(x) d f_1(x)$ applicando l'integrazione indefinita si ha $\int f_1(x) d f_2(x) = f_1(x) f_2(x) - \int f_2(x) d f_1(x)$, cioè l'integrale di un'espressione in cui si distingue un fattore finito ed uno differenziale, è uguale al fattore finito moltiplicato per l'integrale del fattore differenziale meno l'integrale del prodotto dell'integrale trovato per il differenziale del fattore finito. Es.: $\int \log x d x = \log x \cdot x - \int x \frac{d x}{x} = x \log x - x$
 $\int x e^x d x = x e^x - \int e^x d x = e^x (x - 1).$

Indicando con $[\psi(x)]_a^b$ la differenza $\psi(b) - \psi(a)$ la formula dell'integrazione per parti dà, per gli integrali definiti $\int_a^b f_1(x) d f_2(x) = [f_1(x) \cdot f_2(x)]_a^b - \int_a^b f_2(x) d f_1(x).$

4. — **Integrazione per sostituzione.** Per trovare l'integrale indefinito $\int f(x) d x$ si può porre $x = x(u)$ e ridurre l'integrale che si cerca all'altro $\int f(x(u)) x'(u) d u$; trovato questo integrale $\psi(u)$, porre in luogo di u la $u(x)$ funzione inversa della $x = x(u)$; allora $\psi(u(x))$ è l'integrale cercato. Per trovare l'integrale definito in $x_0 \vdash x_1$ di $f(x)$ cioè $\int_{x_0}^{x_1} f(x) d x$ si può procedere in due modi: o calcolare $\psi(u(x))$ e quindi fare la differenza $\psi(u(x_1)) - \psi(u(x_0))$, oppure trovare i due valori u_0, u_1 tali da avere $x(u_0) = x_0, x(u_1) = x_1$ ed allora calcolare $\int_{u_0}^{u_1} f(x(u)) x'(u) d u$ poichè è

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) d x = \int_{u_0}^{u_1} f(x(u)) x'(u) d u.$$

Molte volte accade che la $f(x)$ sia della forma $f(\varphi(x))$ • si pone $\varphi(x) = u$; quando accada che la $\varphi(x)$ non è crescente, non è invertibile, cioè x diventa funzione di u a più valori;

allora dovendosi calcolare un integrale definito da x_0 ad x_1 bisogna spezzare l'intervallo coi punti $a_1, a_2 \dots a_n$ di massimo e di minimo di $\varphi(x)$, in ognuno dei quali la $\varphi(x) = u$ dà luogo ad una funzione inversa ad un valore; calcolare gli integrali

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{a_1} f(x) dx &= \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(a_1)} f(x(u)) x'(u) du, \quad \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx = \\ &= \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(a_2)} f(x(u)) x'(u) du, \dots \int_{a_n}^{x_1} f(x) dx = \\ &= \int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(x_1)} f(x(u)) x'(u) du \text{ e sommare i secondi membri.} \end{aligned}$$

Col processo di integrazione per sostituzione si ricavano i tipi generali seguenti:

$$\begin{aligned} \int \varphi(x)^m d\varphi(x) &= \frac{\varphi(x)^{m+1}}{m+1}; \quad \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \log \varphi(x) \\ \int \frac{d\varphi(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}} &= \sqrt{\varphi(x)}; \quad \int e^{\varphi(x)} d\varphi(x) = e^{\varphi(x)} \\ \int \frac{d\varphi(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}} &= \arcsen \varphi(x); \quad \int \frac{d\varphi(x)}{1+\varphi(x)^2} = \operatorname{arctg} \varphi(x). \end{aligned}$$

5. — **Integrazione delle funzioni razionali.** Una funz. razionale intera è della forma $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, onde $\int f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i \int x^i dx = \sum_{i=0}^n a_i \frac{x^{i+1}}{i+1} + c$.

Decomposizione delle funzioni razionali fratte in frazioni elementari. a) Quando si ha una funz. fratta $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ se il grado di f supera od eguaglia quello di $\psi(x)$ si eseguisce la divisione; se $Q(x)$ è il quoziente, $\varphi(x)$ il resto, $f(x) : \psi(x) = Q(x) + (\varphi(x) : \psi(x))$. Per l'integrazione occorre sapere integrare $\varphi(x) : \psi(x)$. Si può supporre che φ e ψ siano prive di radici comuni, altrimenti basta dividere pel loro massimo comune divisore ambo i termini della frazione. Si può allora decomporre $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ in una somma di **frazioni elementari** della forma $\frac{A}{(x-a)^k}$ mediante il seguente processo. Sia $\psi(x) = (x-a_1)^{\lambda_1} (x-a_2)^{\lambda_2} \dots (x-a_r)^{\lambda_r}$ (ove $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = n$).

Si ha identicamente $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1} \psi_1(x)} - \frac{A_0}{(x-a_1)^{\lambda_1}} +$
 $+ \frac{A_0}{(x-a_1)^{\lambda_1}} = \frac{\varphi(x) - A_0 \psi_1(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1} \psi_1(x)} + \frac{A_0}{(x-a_1)^{\lambda_1}}$. Si prenda ora
 $A_0 = \frac{\varphi(a_1)}{\psi_1(a_1)}$ in modo che $\varphi(x) - A_0 \psi_1(x)$ sia divisibile per
 $(x-a_1)$ e si indichi con $\varphi_1(x)$ il quoziente; si avrà così
 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1-1} \psi_1(x)} + \frac{A_0}{(x-a_1)^{\lambda_1}}$. Se sopra
 $\frac{\varphi_1(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1-1} \psi_1(x)}$ si opera come sopra $\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1} \psi_1(x)}$ e si
 seguita nello stesso processo si avrà:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^{\lambda_1}} + \frac{A_1}{(x-a_1)^{\lambda_1-1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{\lambda_1-2}} + \dots +$$

$$+ \frac{A_{\lambda_1-1}}{(x-a_1)} + \frac{\varphi_{\lambda_1}(x)}{\psi_1(x)}.$$

Allora ponendo $\psi_1(x) = (x-a_2)^{\lambda_2} \psi_2(x)$ si opera su
 $\frac{\varphi_{\lambda_1}(x)}{\psi_1(x)}$ come si operava su $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ e si avrà così:

$$\frac{\varphi_{\lambda_1}(x)}{\psi_1(x)} = \sum_{h=0}^{\lambda_2-1} \frac{B_h}{(x-a_2)^{\lambda_2-h}} + \frac{\varphi_{\lambda_1+\lambda_2}(x)}{\psi_2(x)}.$$

Analogamente si procede sopra quest'ultima frazione, fino all'esaurimento di tutte le radici $a_1, a_2, \dots, a_n$. Codesta decomposizione è unica.

b) Se la $\psi(x)$ è a coefficienti reali ed ha radici complesse, le ha coniugate (Cap. XXV, § 3); in tal caso la decomposizione in frazioni elementari mette in evidenza dei numeri imaginari, ma a calcoli fatti essi devono sparire. Si può fare una decomposizione ove gli imaginari non compaiano neanche formalmente. Siano $a_1 = a + ib, a_2 = a - ib$ due radici complesse coniugate di $\psi(x)$: allora $(x-a_1)^{\lambda_1} (x-a_2)^{\lambda_1} = [(x-a)^2 + b^2]^{\lambda_1}$. Posto $\psi(x) = [(x-a)^2 + b^2]^{\lambda_1} \psi_1(x)$ si ha

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^{\lambda_1} \psi_1(x)} - \frac{B_0 x + C_0}{[(x-a)^2 + b^2]^{\lambda_1}} +$$

$$+ \frac{B_0 x + C_0}{[(x-a)^2 + b^2]^{\lambda_1}} = \frac{\varphi(x) - (B_0 x + C_0) \psi_1(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^{\lambda_1} \psi_1(x)} + \frac{B_0 x + C_0}{[(x-a)^2 + b^2]^{\lambda_1}}.$$

Si determinano B_0 e C_0 in modo da essere $\varphi(x) - (B_0 x + C_0)\psi_1(x)$ divisibile per $(x - a)^2 + b^2$ (cioè per $x - a - ib$ e quindi per $x - a + ib$) ed allora indicando con $\varphi_1(x)$ il quoziente si ha

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{[(x - a)^2 + b^2]^{\lambda_1 - 1} \psi_1(x)} + \frac{B_0 x + C_0}{[(x - a)^2 + b^2]^{\lambda_1}}.$$

Così procedendo si ottiene

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{h=0}^{\lambda_1-1} \frac{B_h x + C_h}{[(x - a)^2 + b^2]^{\lambda_1 - h}} + \frac{\varphi_{\lambda_1}(x)}{\psi_1(x)}.$$

Se $\psi(x)$ ha tutte le radici semplici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ allora

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\varphi(\alpha_i)}{\psi'(\alpha_i)}}{x - \alpha_i}$$

c) **Metodo dei coefficienti indeterminati.** Note che siano le radici di $\psi(x)$ ed il loro ordine di molteplicità, sappiamo che

$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ si riduce alla somma di frazioni elementari dei tipi

$$\frac{A}{(x - a)^k}, \frac{Bx + C}{[(x - a)^2 + b^2]^k}$$

a seconda delle radici reali o complesse. Per la determinazione dei coefficienti A, B, C oltrechè coi metodi indicati si usa del *metodo dei coefficienti indeterminati*: si scrive formalmente la decomposizione, cioè indicando letteralmente i coefficienti incogniti; se si eseguisce la somma delle frazioni ridotte al minimo comune denominatore, questo risulterà $\psi(x)$ e si avrà per numeratore un polinomio $P(x)$ che deve essere *identico* a $\varphi(x)$ (Cap. XXIV, § 1); eguagliando i coefficienti dei termini simili si ha un sistema di equaz. lineari nei coefficienti A, B, C incogniti, che si sa a priori avere un sistema unico di soluzioni.

Integrazione delle funzioni razionali fratte. Eseguita la decomposizione di $\varphi(x) : \psi(x)$ in frazioni elementari i tipi di

funzioni da integrare sono $\frac{A}{(x - a)}, \frac{A}{(x - a)^k}$ con $k > 1$,

$\frac{Bx + C}{(x - a)^2 + b^2}, \frac{Bx + C}{[(x - a)^2 + b^2]^k}$ con $k > 1$. Si ha $\int \frac{A dx}{x - a} =$

$$\begin{aligned}
&= A \log (x-a); \int \frac{A dx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} dx = \frac{-A}{k-1} \times \\
&\times \frac{1}{(x-a)^{k-1}}. \text{ Con la sostituzione } x = a + bt, \text{ l' integrale} \\
&\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2} dx \text{ diviene } \frac{Ba+C}{b} \int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{B}{2} \int \frac{2t dt}{1+t^2} = \\
&= \frac{Ba+C}{b} \operatorname{arctg} t + \frac{B}{2} \log (1+t^2) \text{ e però } \int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2} dx = \\
&= \frac{Ba+C}{b} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{b} + \frac{B}{2} \log \frac{(x-a)^2+b^2}{b^2} (*).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Si ha poi identicamente } \int \frac{Bx+C}{[(x-a)^2+b^2]^k} dx = \\
&= B \int \frac{(x-a) dx}{[(x-a)^2+b^2]^k} + (Ba+C) \int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^k} = \\
&= \frac{-B}{2(k-1)} \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{k-1}} + (Ba+C) \int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^k}.
\end{aligned}$$

Per calcolare quest'ultimo integrale, si pone ancora $x = a + bt$, con che, prescindendo dal fattore numerico $Ba+C$ diviene

$$\begin{aligned}
b^{1-2k} \int \frac{dt}{(1+t^2)^k} &= b^{1-2k} \left[\int \frac{dt}{(1+t^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^k} \right] = \\
&= b^{1-2k} \left[\int \frac{dt}{(1+t^2)^{k-1}} + \frac{t}{2(k-1)(1+t^2)^{k-1}} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2(k-1)} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{k-1}} \right] = b^{1-2k} \left[\frac{t}{2(k-1)(1+t^2)^{k-1}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2k-3}{2k-2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{k-1}} \right]
\end{aligned}$$

che è una formula di riduzione giacchè l'integrale proposto si riduce all'integrazione di una funzione dello stesso tipo in cui l'esponente del denominatore è diminuito di un'unità.

Casi particolari:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \log (ax+b); \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

(*) Si può anche porre come 2° termine $B \log \sqrt{(x-a)^2+b^2}$ equivalendo cioè ad aggiungere la costante $B \log b$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a(a_1 - a_2)} \left\{ \int \frac{dx}{x - a_1} - \int \frac{dx}{x - a_2} \right\} = \frac{1}{a(a_1 - a_2)} \log \frac{x - a_1}{x - a_2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}; \text{ e se } b^2 - 4ac < 0, \\
&\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}, \\
&\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{m}{2a} \log(ax^2 + bx + c) + \\
&\quad + \frac{2an - bm}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \\
&\int \frac{\varphi(x)}{(x-a)^m} = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^k(a)}{k!} \frac{(x-a)^{-m+k+1}}{-m+k+1} \text{ se } n \text{ è il grado di } \varphi(x).
\end{aligned}$$

6. — **Integrazione di funzioni irrazionali.** a) L'integrale di

$f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m_n}}\right)$ ove $m_1, m_2, \dots, m_n$ sono interi ed f è razionale nei suoi $n+1$ argomenti, si riduce ad integrale di funz. razionale con la sostituzione $\frac{ax+b}{cx+d} = t^\mu$, essendo μ il minimo comune multiplo di $m_1, m_2, \dots, m_n$.

b) Una funz. razionale di x e $\sqrt{R(x)}$ ove $R(x)$ è un polinomio in x sarà della forma

$\frac{A_0(\sqrt{R})^n + A_1(\sqrt{R})^{n-1} + \dots + A_{n-1}\sqrt{R} + A_n}{B_0(\sqrt{R})^n + B_1(\sqrt{R})^{n-1} + \dots + B_{n-1}\sqrt{R} + B_n}$ ove le A e le B sono funz. razionali di x .

Ma osservando che $(\sqrt{R})^{2k} = R^k$, $(\sqrt{R})^{2k+1} = R^k \sqrt{R}$, la frazione precedente si riduce al tipo $\frac{L + M\sqrt{R}}{N + P\sqrt{R}}$ ove L, M, N, P sono funz. razionali di x ; moltiplicando anche i membri per $(N - P\sqrt{R})$ ci si riduce a $\frac{Q + S\sqrt{R}}{T}$ cioè a $\frac{Q}{T}$ funz. razionale e a $\frac{SR}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}$ cioè a $G(x) \frac{1}{\sqrt{R(x)}}$ ove G è razionale.

Supponiamo $R(x) = ax^2 + bx + c$ e $G(x)$ funz. razionale intera, allora $\int \frac{G(x)}{\sqrt{R(x)}} dx = G_1(x)\sqrt{R(x)} + A \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ dove A è un numero e $G_1(x)$ una funzione di grado di una unità inferiore a quello di $G(x)$ tali da aversi identicamente (Cap. XXIV, § 1) $G(x) \equiv G'_1(x)R(x) + G_1(x)R'(x) + A$. L'integrale $\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ si riduce alla somma d'integrali della forma $\int \frac{1}{(x-a)^m} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ pel quale si ha $\int \frac{1}{(x-a)^m} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{G_1(x)\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{m-1}} + A \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}$ dove $G_1(x)$ è una funzione razionale intera di grado $m-2$ ed A un numero per cui si ha identicamente $1 \equiv (x-a)\{G'_1(x)R(x) + G_1(x)R'(x)\} - (m-1)G_1(x)R(x) + A(x-a)^{m-1}$.

Per l'integrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}$ con la sostituzione $x-a = \frac{1}{t}$, ci si riduce all'integrale della forma $\int \frac{dt}{\sqrt{c't^2 + b't + a'}}$.

Pel calcolo di $\int \frac{G(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$, se non si vuole ricorrere al metodo sopra indicato, può servire la formula di riduzione

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{x^{n-1}}{na} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b(2n-1)}{2na} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} - \frac{c(n-1)}{na} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

L'integrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ col porre $x = a + (1:z)$ si trasforma in $\int \frac{-z^{m-1} dz}{\sqrt{(a^2 + ba + c)z^2 + (2aa + b)z + a}}$ che è del tipo precedente.

In ogni modo si è condotti all'integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

Se $a > 0$, colla sostituzione $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}(x + t)$; se $a < 0$, (x_1, x_2 le due radici di $ax^2 + bx + c$) colla sostituzione $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t^2$, la funzione integranda si riduce a razionale; si ha:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \log(b + 2ax + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}) & \text{se } a > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{a}} \log(b + 2ax - 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}) \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{b + 2ax + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}}{b + 2ax - 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}} \end{cases}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b + 2ax + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-(b + 2ax) + \sqrt{b^2 - 4ac}}} \quad \text{se } a < 0$$

In particolare

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} = -\log(-x + \sqrt{x^2 + c}), \log(x + \sqrt{x^2 + c}), \frac{1}{2} \log \frac{x + \sqrt{x^2 + c}}{-x + \sqrt{x^2 + c}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c - x^2}} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{-x + \sqrt{c}}{x + \sqrt{c}}}, \text{ o } \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{c}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \log \frac{(bx + 2c + 2\sqrt{c}\sqrt{c + bx + ax^2})}{x} & \text{se } c > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bx + 2c + x\sqrt{b^2 - 4ac}}{-(bx + 2c) + x\sqrt{b^2 - 4ac}}} & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{m}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2an - mb}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{b}{4a} \right) \sqrt{ax^2 + bx + c} +$$

$$+ \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

c) L'integrale $\int f(x, \sqrt{a + bx}, \sqrt{a' + b'x}) dx$ ove f è simbolo di funzione razionale dei 3 argomenti, colla sostituzione $\sqrt{a' + b'x} = t$ diviene $\int f\left(\frac{t^2 - a'}{b'}, \sqrt{\frac{b'a - a'b + b't^2}{b'}}, t\right) \frac{2t}{b'} dt$ che è del tipo studiato sopra.

d) **Integrali ellittici.** Sia $f(x, \sqrt{R(x)})$ una funzione razionale di x e $\sqrt{R(x)}$ ove R è un polinomio di 3° o 4° grado in x . Se R è di 4° grado ed a una sua radice, col porre $x = a + (1 : z)$, $\sqrt{R(x)}$ si trasforma in

$$(\sqrt{24 R'(a) z^3 + 12 R''(a) z^2 + 4 R'''(a) z + R^{IV}(a)}) : 2 \sqrt{6} z^2$$

cioè $f(x, \sqrt{R(x)})$ diventa razionale in z e in $\sqrt{R_1(z)}$ essendo $\sqrt{R_1(z)}$ il numeratore della precedente frazione ed $R_1(z)$ di 3° grado in z . Gli integrali di siffatte funzioni diconsi **integrali ellittici**. Si dimostra che gli integrali ellittici si possono

ridurre ai tre tipi (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, $\int \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}}$, $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}$ oppure a tre integrali dei tipi (**forme canoniche di Legendre**)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \int \frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

(ove $k < 1$ è il **modulo**) che si dicono rispettiv. **integrali ellittici di 1ª, di 2ª e 3ª specie**. Facendo $x = \sin \varphi$ divengono ordinatamente

$$(2) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \int \frac{d\varphi}{(1+m \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Pel calcolo in serie vedi Cap. XLIV, § 9.

Si riduce il primo integrale (1) al primo integrale (2) coi metodi seguenti. Sia $R(x) = \pm x^3 + a x^2 + b x + c$; a, β, γ le sue radici supposte reali; a la più grande o la più piccola a seconda che x^3 è preceduta da $+$ o da $-$; β la media; posto $k^2 = (\beta - a) : (\gamma - a)$ sempre compreso fra 0 ed 1 la sostituzione $x = a + (\beta - a) \sin^2 \varphi$ dà $R(x) = |\gamma - a| (\beta - a)^2 \times \times (1 - k^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$, $dx = (\beta - a) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$ onde $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ diventa $\frac{2}{\sqrt{|\gamma - a|}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$. Se la sola radice a è reale si pone $R(x) = \pm (x - a)(x^2 + p x + q)$. Colla sostituzione $x = a \pm \sqrt{a^2 + p a + q} \operatorname{tg}^2(\varphi : 2)$ l'integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ diventa } (\alpha^2 + p\alpha + q)^{-\frac{1}{4}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \text{ ove } k^2 = \\ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\alpha + q}{2\sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}} \right) \text{ compreso fra 0 ed 1.}$$

Nel caso delle 3 radici reali $\int \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}}$, colla sostituzione sopra indicata, diviene: $\frac{2\beta + 2\alpha(k^2 - 1)}{k^2 \sqrt{|\gamma - \alpha|}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} +$
 $+\frac{2(\alpha - \beta)}{k^2 \sqrt{|\gamma - \alpha|}} \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ e nel caso di una sola radice reale, colla già indicata sostituzione diviene:

$$\frac{\alpha + (\alpha^2 + p\alpha + q)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha^2 + p\alpha + q)^{\frac{1}{4}}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + 2(\alpha^2 + p\alpha + q)^{\frac{1}{4}} \times \\ \times \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + 2(\alpha^2 + p\alpha + q)^{\frac{1}{4}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

e) **Integrale di** $f(a+x)^\alpha (b+x)^\beta dx$. Se a è intero e $\beta = r:s$ colla sostituzione $b+x = t^s$ l'integrale diviene $s f(a-b+t^s)^\alpha t^{r+s-1} dt$ di funz. razionale in t . Se neanche a è intero, ma $a+\beta = m$ intero ponendo $\frac{b+x}{a+x} = t^s$ l'integrale diviene $s(a-b)^{m+1} \int \frac{t^{r+s-1} dt}{(1-t^s)^{m+2}}$ che è di funz. razionale in t .

In ogni altro caso si ha la formula di riduzione

$$f(a+x)^\alpha (b+x)^\beta dx = \frac{(a+x)^\alpha (b+x)^{\beta+1}}{a+\beta+1} - \\ - \frac{\alpha(b-a)}{a+\beta+1} f(a+x)^{\alpha-1} (b+x)^\beta dx.$$

Scambiando a in β , a in b si ottiene una formula che fa diminuire di 1 l'esponente β . Se poi a è negativo

$$f(a+x)^\alpha (b+x)^\beta dx = \frac{(a+x)^{\alpha+1} (b+x)^{\beta+1}}{(a+1)(b-a)} - \frac{a+\beta+2}{(a+1)(b-a)} \times \\ \times f(a+x)^{\alpha+1} (b+x)^\beta dx \text{ che serve a fare aumentare di 1}$$

l'esponente a . Cambiando a in β , a in b si ha una formula analoga che fa crescere di 1 l'esponente β .

f) Differenziali binomi diconsi le espressioni della forma

$x^m (a x^n + b)^p dx$. Se $a > 0$ col porre $x = a^{-\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}}$ l'espressione diviene $\frac{1}{n} a^{-\frac{m+1}{n}} (b + t)^p t^{\frac{m+1}{n}-1} dt$, se $a < 0$ col porre $x = (-a)^{-\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}}$ diviene $\frac{1}{n} (-a)^{-\frac{m+1}{n}} (b - t)^p t^{\frac{m+1}{n}-1} dt$;

si è condotti ai tipi considerati sopra. L'integrabilità mediante funzioni algebriche o logaritmiche si compie quando sono interi uno almeno dei 3 numeri $p, (m+1):n, p + [(m+1):n]$ e solo in questi casi.

Se poniamo $a x^n + b = y$ e $\int x^m y^p dx = I_{m, p}$ si hanno le formule di riduzione

$$I_{m, p} = \frac{x^{m+1} y^p}{m+1} - \frac{p n a}{m+1} I_{m+n, p-1}$$

$$I_{m, p} = \frac{x^{m-n+1} y^{p+1}}{(p+1) n a} - \frac{m-n+1}{(p+1) n a} I_{m-n, p+1}$$

$$I_{m, p} = \frac{x^{m-n+1} y^{p+1}}{(m+pn+1) a} - \frac{m+pn+n+1}{(m+1) b} I_{m+n, p}$$

$$I_{m, p} = \frac{x^{m-n+1} y^{p+1}}{(m+pn+1) a} - \frac{(m-n+1) b}{(m+pn+1) a} I_{m-n, p}$$

$$I_{m, p} = \frac{n^{m+1} y^p}{m+pn+1} + \frac{p n b}{m+pn+1} I_{m, p-1}$$

$$I_{m, p} = - \frac{x^{m+1} y^{p+1}}{(p+1) n b} + \frac{m+pn+n+1}{(p+1) n b} I_{m, p+1}$$

Notevoli i casi particolari $\int \frac{x^k dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{\sqrt{1-x^2}}{k} \times$

$$\times \left[x^{k-1} + \frac{k-1}{k-2} x^{k-3} + \frac{(k-1)(k-3)}{(k-2)(k-4)} x^{k-5} + \dots \right] +$$

$$+ \begin{cases} \frac{(k-1)(k-3)\dots 3.1}{k(k-2)\dots 4.2} \arcsin x, & \text{se } k \text{ è pari} \\ - \frac{(k-1)(k-3)\dots 4.2}{k(k-2)\dots 3.1} \sqrt{1-x^2}, & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^k \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{k-1} \left[\frac{1}{x^{k-1}} + \frac{k-2}{k-3} \frac{1}{x^{k-3}} + \frac{(k-2)(k-4)}{(k-3)(k-5)} \frac{1}{x^{k-5}} + \dots \right] + \begin{cases} -\frac{(k-2)(k-4)\dots 2}{(k-3)(k-5)\dots 1} \frac{1}{x} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{(k-2)(k-4)\dots 1}{(k-1)(k-3)\dots 2} \log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{se è dispari} \end{cases}$$

7. — Integrazione di funzioni trascendenti.

a) Se $f(x)$ è algebrica il cui integrale $F(x)$ è algebrico; $g(x)$ trascendente la cui derivata $g'(x)$ è algebrica, allora ci si riduce a integrali di funzioni algebriche applicando l'integrazione per parti $\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx$.

$$\text{Es. } \int x^m \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (\text{con } m \neq -1); \int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2};$$

$$\int x^m \arcsin x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \arcsin x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx; (m \leq -1)$$

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int x^m \arctg x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \arctg x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{1+x^2} dx; (m \leq -1)$$

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \log \sqrt{1+x^2}$$

$$\int x^m \operatorname{arcsec} x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-1}}; (m \leq -1)$$

$$\int \operatorname{arcsec} x dx = x \arcsin x - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = x \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{2} \log \left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} \right)$$

$$\int x^m \log x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}; \text{ per } m = -1, \int \log x dx = x \log x - x.$$

Notiamo le formule di riduzione:

$$\int \{ \log(x + \sqrt{1+x^2}) \}^m dx = x \{ \log(x + \sqrt{1+x^2}) \}^m -$$

$$-m\sqrt{1+x^2}\{\log(x+\sqrt{1+x^2})\}^{m-1}+m(m-1)\int\{\log(x+\sqrt{1+x^2})\}^{m-2}dx.$$

$$\int(\operatorname{arc\,sen} x)^m dx = x(\operatorname{arc\,sen} x)^m + m(\operatorname{arc\,sen} x)^{m-1}\sqrt{1-x^2} - m(m-1)\int(\operatorname{arc\,sen} x)^{m-2} dx.$$

$$\int \frac{x^m dx}{(\log x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m dx}{(\log x)^{n-1}} \quad (\text{con } m \neq -1).$$

Coll'applicazione di questa formula si giunge a $\int \frac{x^m dx}{\log x}$

la quale con la sostituzione $x^{m+1} = z$ diviene $\int \frac{dx}{\log z}$ che è

una trascendente detta **integral-logaritmo**. Se $m = -1$, $n > 1$, $\int \frac{dx}{x(\log x)^n} = \frac{1}{(1-n)(\log x)^{n-1}}$ e se $m = -1$, $n = 1$, $\int \frac{dx}{x \log x} = \log \log x$

$$\int \frac{dx}{(\operatorname{arc\,sen} x)^n} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(\operatorname{arc\,sen} x)^{n-1}} + \frac{x}{(n-1)(n-2)(\operatorname{arc\,sen} x)^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{dx}{(\operatorname{arc\,sen} x)^{n-2}} \text{ e coll'applicazione ripetuta si}$$

perviene a $\int \frac{dx}{\operatorname{arc\,sen} x}$ che colla sostituzione $x = \sin z$ diviene

$\int \frac{\cos z}{z} dz$ che è l'**integral coseno** (Cap. XLIV, § 6 m), ed a

$$\int \frac{dx}{(\operatorname{arc\,sen} x)^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\operatorname{arc\,sen} x} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{\operatorname{arc\,sen} x} \text{ il 2° dei}$$

quali colla sostituzione $x = \sin z$ diviene $\int \frac{\sin z dz}{z}$, **integralseno**.

b) $\int f(e^{ax}) dx$ ove f è simbolo di funzione razionale col porre $x = \frac{\log t}{a}$ diviene $\frac{1}{a} \int f(t) dt$ ove la funz. integranda è razionale.

c) $\int e^{ax} f(x) dx$ ove $f(x)$ è razionale intera si integra mediante la formula $\int e^{ax} x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{a^{n+1}} e^{ax} \left(1 - \frac{ax}{1} + \right.$

$+ \frac{a^2 x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{a^n x^n}{n!}$); se $f(x)$ è razionale fratta vale

la formula $\int \frac{e^{ax} dx}{(x-b)^n} = \frac{e^{ax}}{(n-1)(x-b)^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax} dx}{(x-b)^{n-1}}$

l'applicazione ripetuta della quale porta all'integrale $\int \frac{e^{ax} dx}{x-b}$

che colla sostituzione $x = b + (z:a)$ diviene $e^{ab} \int \frac{e^z dz}{z}$ di

cui è dato lo sviluppo in serie al Cap. XLIV, § 6 n. I casi

più generali di $\int f(x, e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx$ e $\int \frac{f(x, e^{a_1 x}, \dots, e^{a_n x})}{\varphi(x)} dx$

ove f è simbolo di funz. razionale intera e $\varphi(x)$ un polinomio si riconducono ad integrali dei tipi precedenti.

d) $\int f(\operatorname{tg} x) dx$ ove f è simbolo di funz. razionale si trasforma colla sostituzione $\operatorname{tg} x = t$ in $\int \frac{f(t) dt}{1+t^2}$.

e) $\int f(\sin x, \cos x) dx$ con f simbolo di funz. razionale, mediante la sostituzione $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, diviene $2 \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}$

f) Un tipo particolare del caso precedente è l'integrale $T_{h,k} = \int \sin^h x \cos^k x dx$ che con la sostituzione $\sin x = t$ diviene l'integrale $\int t^h (1-t^2)^{\frac{k-1}{2}} dt$ che è del tipo f del § 6.

Notiamo le formule di riduzione

$$T_{h,k} = \frac{\sin^{h+1} x \cos^{k-1} x}{h+1} + \frac{k-1}{h+1} T_{h+2,k-2};$$

$$T_{h,k} = -\frac{\sin^{h-1} x \cos^{k+1} x}{h+1} + \frac{h-1}{k+1} T_{h-2,k+2};$$

$$T_{h,k} = \frac{\sin^{h+1} x \cos^{k+1} x}{h+1} + \frac{h+k+2}{h+1} T_{h+2,k};$$

$$T_{h,k} = -\frac{\sin^{h-1} x \cos^{k+1} x}{h+k} + \frac{h-1}{h+k} T_{h-2,k};$$

$$T_{h,k} = \frac{\sin^{h+1} x \cos^{k-1} x}{h+k} + \frac{k-1}{h+k} T_{h,k-2};$$

$$T_{h,k} = - \frac{\operatorname{sen}^{h+1} x \cos^{k+1} x}{k+1} + \frac{h+k+2}{k+1} T_{h,k+2}.$$

Se h e k sono interi colle formule precedenti ci si riduce ai 9 integrali $\int dx = x$, $\int \operatorname{sen} x = -\cos x$, $\int \cos x = \operatorname{sen} x$,

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}; \quad \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \log \operatorname{sen} x;$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\log \cos x; \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \log \operatorname{tg} x;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

Se poniamo $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^h x \cos^k x dx = L_{h,k}$ (h, k maggiori

di 1) si hanno le formule di riduzione $L_{h,k} = \frac{k-1}{h+1} L_{h+2,k-2}$;

$$L_{h,k} = \frac{h-1}{k+1} L_{h-2,k+2}; \quad L_{h,k} = \frac{h+k+2}{h+1} L_{h+2,k};$$

$$L_{h,k} = \frac{h-1}{h+k} L_{h-2,k}; \quad L_{h,k} = \frac{k-1}{h+k} L_{h,k-2};$$

$$L_{h,k} = \frac{h+k+2}{k+1} L_{h,k+2}.$$

Se h e k sono interi positivi, r ed s i quozienti interi della divisione di h e k per 2, si ha

$$\begin{aligned} L_{h,k} &= \frac{(h-1)(h-3)\dots(h-2r+1)}{(h+k)(h+k-2)\dots(h+k-2r+2)} L_{h-2r,k} = \\ &= \frac{(k-1)(k-3)\dots(k-2s+1)}{(h+k)(h+k-2)\dots(h+k-2s+2)} L_{h,k-2s} = \\ &= \frac{(h-1)(h-3)\dots(h-2r+1)(k-1)(k-3)\dots(k-2s+1)}{(h+k)(h+k-2)\dots(h+k-2r-2s+2)} L_{h-2r,k-2s} \end{aligned}$$

e con ciò si è portati a $L_{0,0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$,

$$L_{0,1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1, \quad L_{1,0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x dx = 1,$$

$$L_{1,1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2}. \text{ Notiamo ancora i casi parti-}$$

$$\begin{aligned}
 \text{colari frequentissimi } L_{2p,0} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} \frac{\pi}{2} = \\
 &= \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}; \quad L_{2p+1,0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p}{3 \cdot 5 \dots (2p+1)} = \\
 &= \frac{2^{2p} (p!)^2}{2p+1!}; \quad L_{0,2p} = L_{2p,0}, \quad L_{0,2p+1} = L_{2p+1,0}.
 \end{aligned}$$

Formula di Wallis. Mediante le formule precedenti si dimostra $\frac{\pi}{2} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \dots (2p-2)^2 (2p)^2}{3^2 \cdot 5^2 \dots (2p-1)^2 2p+1}$.

g) Per n intero positivo valgono le formule di riduzione

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx$$

$$\int \operatorname{cotg}^n x \, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x \, dx$$

$$\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx;$$

$$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx;$$

$$\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n x^{n-1} \sin x - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x \, dx$$

$$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x \, dx$$

h) Notiamo qualche integrale particolare

$$\left. \begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx \, dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) \\ \int e^{ax} \cos bx \, dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ottenuti per} \\ \text{integrazione} \\ \text{per parti.} \end{array}$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ con la sostituzione $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ diviene $\sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t+t^3}}$
integrale ellittico.

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x} = \begin{cases} + \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctg \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) & \text{se } a^2 > b^2 \\ + \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \left| \frac{b+a \cos x + \sqrt{b^2-a^2} \sin x}{a+b \cos x} \right| & \text{se } a^2 < b^2 \end{cases}$$

il segno $+$ se $a+b > 0$, il $-$ se $a+b < 0$.

Integrali di funzioni aventi punti di infinito ed integrali estesi ad intervalli infiniti

1. — **Integrale di una funzione (di una variabile) avente punti di infinito.** Abbia $f(x)$ in $x = b$ un punto d'infinito (Cap. XXXIV); in ogni intervallo $a \vdash b - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, piccolo a piacere, esista $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$; il $\lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$, se esiste ed è finito, si dice **integrale generalizzato od improprio** di $f(x)$ nell'intervallo $a \vdash b$ e si indica, al solito, con $\int_a^b f(x) dx$. Se il punto d'infinito è a , $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$, se questo esiste. Se $f(x)$ ha il punto di infinito x_1 interno ad $a \vdash b$ ed esistono $\int_a^{x_1} f(x) dx$, $\int_{x_1}^b f(x) dx$ come dianzi sono definiti, si pone $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^b f(x) dx$. E ciò è estendibile al caso di un numero finito qualunque di punti d'infinito. La funzione si dice integrabile.

Condizione necessaria e sufficiente acciò esista l'integrale improprio $\int_a^b f(x) dx$, quando $f(x)$, integrabile in ogni intervallo $a \vdash b - \varepsilon$, ha in b un punto d'infinito, è che prefissato un numero σ piccolo a piacere esista un numero positivo δ tale che per $\varepsilon' < \varepsilon < \delta$ sia $|\int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x) dx| < \sigma$ o, in altre parole, che $\lim_{\varepsilon=0} |\int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x) dx| = 0$. L'integrale $\int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x) dx$ dicesi **integrale definito singolare** relativo al punto b . Per un punto x_1 d'infinito interno ad $a \vdash b$ si hanno due integrali definiti singolari l'uno a destra, l'altro a sinistra $\int_{x_1-\delta'}^{x_1-\varepsilon'} f(x) dx$, $\int_{x_1+\varepsilon'}^{x_1+\delta'} f(x) dx$, ($\delta' < \delta$; $\varepsilon < \varepsilon'$).

Se $f(x)$ è integrabile in ogni intervallo parziale di $a \dashv b$ non contenente punti d'infinito, è integrabile in $a \dashv b$ se gli integrali definiti singolari relativi ai punti d'infinito tendono a zero al tendere dell'estremo più lontano al punto d'infinito.

Valgono per gli integrali impropri le proposizioni a) b) c) e) del Cap. XXXV, § 2. Se $f(x)$ e $\varphi(x)$ pur avendo punti d'infinito sono integrabili in $a \dashv b$ insieme con $|f(x)|$, $|\varphi(x)|$, se i punti di infinito di $f(x)$ non coincidono con quelli di $\varphi(x)$, il prodotto $f(x)\varphi(x)$ è integrabile in $a \dashv b$. Se di $f(x)$, avente punti d'infinito in $a \dashv b$, esiste l'integrale improprio in $a \dashv b$, la funz. $\int_a^X f(x) dx$, X punto di $a \dashv b$, è funz. continua ed ha per derivata $f(X)$ in tutti i punti in cui $f(x)$ è finita e continua. Se $\varphi(x)$ è una funz. non negativa e pur avendo punti d'infinito in $a \dashv b$ è ivi integrabile, è pure in $a \dashv b$ integrabile $f(x)$ se $|f(x)| \leq \varphi(x)$. Se $f(x)$ è integrabile in ogni intervallo parziale di $a \dashv b$ non contenente il punto x_1 in cui è infinita d'ordine $r < 1$, è integrabile in $a \dashv b$. È pure integrabile $f(x)$ se diventa infinita come una delle funzioni $1:(x-x_1)[\log(x-x_1)]^{1+\mu}$, $1:(x-x_1)\log(x-x_1)[\log|\log(x-x_1)|]^{1+\mu} \dots$ con $\mu < 0$.

Se $f(x)$ in $x=x_1$ diventa infinita d'ordine $r \geq 1$ e conserva segni costanti nelle immediate vicinanze destre e sinistre di x_1 , non è integrabile in nessun intervallo contenente x_1 (tendendo all' ∞ gli integrali che hanno un estremo in x_1). Altrettanto accade se $f(x)$ diviene in x_1 infinita dello stesso ordine o maggiore a quello delle funzioni $1:(x-x_1)\log(x-x_1)$, $1:(x-x_1)\log(x-x_1)\log|\log(x-x_1)|, \dots$ (*).

Una funz. razionale fratta $F(x)$ non è integrabile in nessun intervallo contenente le radici del denominatore: se α è l'ordine maggiore di molteplicità delle radici del denominatore,

$[F(x)]^{\frac{1}{\beta}}$ è integrabile solo se $\beta > \alpha$.

(*) Per l'esatta interpretazione del teor. veggasi la definizione di infiniti dello stesso ordine data alla pag. 218.

Se $f(x)$ ha punti d'infinito in $a \dashv b$ ed esiste una funz. $\varphi(x)$ continua in $a \dashv b$ avente per derivata $f(x)$ in tutti i punti ove questa è finita e continua, $f(x)$ è in $a \dashv b$ integrabile ed è $\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$. La funz. $\varphi(x)$ dicesi **integrale indefinito** o **primitiva** di $f(x)$.

2. — **Integrale di $f(x)$ esteso ad un intervallo infinito.**
Sia $f(x)$ integrabile in ogni intervallo $a \dashv b$ con b grande ad arbitrio; il $\lim_{b=\infty} \int_a^b f(x) dx$, se esiste ed è finito, si definisce integrale di $f(x)$ esteso all'intervallo $a \dashv \infty$ e si indica con $\int_a^\infty f(x) dx$: allora $f(x)$ si dice integrabile in $a \dashv \infty$. Analogamente $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a=-\infty} \int_a^b f(x) dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\substack{a=-\infty \\ b=+\infty}} \int_a^b f(x) dx$, se i limiti esistono e sono finiti.

Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità della $f(x)$ in $a \dashv \infty$ è che, essendo $b' > b$, l'integrale $\int_b^{b'} f(x) dx$ tende a 0 al tendere di b all' ∞ . Questo integrale dicesi **definito singolare** relativo al punto ∞ . Se esiste una funz. $\varphi(x)$ continua in $a \dashv \infty$ che ha per derivata $f(x)$ dove questa è continua, $f(x)$ è integrabile in $a \dashv \infty$ e si ha $\int_a^\infty f(x) dx = \varphi(\infty) - \varphi(a)$. La $\varphi(x)$ dicesi ancora **l'integrale indefinito** di $f(x)$.

Se $f(x)$ in $x = \infty$ è infinitesimo d'ordine $\mu > 1$ rispetto a $1:x$, $f(x)$ è integrabile in $a \dashv \infty$, se lo è in ogni tratto finito; è ancora integrabile se diviene infinitesima in $x = \infty$ dell'ordine delle funzioni $1:x(\log x)^{1+\mu}$, $1:x \log x (\log \log x)^{1+\mu}$, .. con $\mu > 0$. Se $f(x)$, conservando lo stesso segno da un punto in poi, è infinitesima in $x = \infty$ d'ordine $\mu \leq 1$ rispetto a $1:x$, non è integrabile in $a \dashv \infty$, come pure, sotto la prima ipotesi, non è integrabile in $a \dashv \infty$ se in $x = \infty$ è infinitesima di un ordine $<$ a quello delle funz. $1:x \log x$, $1:x \log x \log \log x$, ..

Integrali delle funzioni di più variabili

1. — **Integrale di campo.** In un campo C quadrabile (Cap. XLV, § 1), la cui area indicheremo pure con C , sia data una funzione limitata $f(x, y)$, il cui limite inferiore è l ed il superiore L . Si divida C in parti quadrabili $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ le cui aree indicheremo colle stesse lettere; sia l_s, L_s, D_s il limite inferiore, il limite superiore e l'oscillazione di $f(x, y)$ in ω_s ; r_s la massima corda che può tracciarsi in ω_s . Le somme $S = \sum_1^n \omega_s L_s$ al variare comunque delle divisioni del campo C costituiscono un gruppo di infiniti numeri che è limitato, perchè compreso fra CL e Cl ; questo gruppo abbia il limite inferiore g . Le somme $s = \sum_1^n \omega_s l_s$ costituiscono in modo analogo un gruppo di infiniti numeri limitato, di cui sia G il limite superiore. La totalità dei sistemi di divisione di C in parti ω_s può *ordinarsi* (Cap. XX, § 3) qualora si convenga che un sistema ζ di divisioni segua un altro ζ' quando la massima fra le corde r_s di ζ è minore della massima fra le corde r_s di ζ' ; che se queste corde massime coincidono cercheremo, considerando le corde r_s in ordine di grandezza decrescente, le prime due disuguali ed allora ζ seguirà ζ' , se di queste è minore quella relativa a ζ . Anche l'aggregato delle somme S può *ordinarsi* convenendo che la somma S segue la somma S' quando dei due sistemi di divisioni ζ, ζ' corrispondenti, ζ segue ζ' : in ugual modo si ordina l'aggregato delle somme s . Ora si dimostra che (**Teor. di Darboux**): il limite (Cap. XX, § 3) dell'aggregato

ordinato delle S è g ; e il limite dell'aggregato ordinato s è G , suo limite superiore. Il numero g dicesi **integrale superiore** di $f(x, y)$ esteso al campo C e si indica con $\int_C f(x, y) dC$, indicando con dC l'elemento infinitesimo di area del campo C ; il numero G dicesi **integrale inferiore** di $f(x, y)$ esteso a C e si indica con $\int_C f(x, y) dC$.

Quando accada che $g = G$, cioè $\lim_{r=0} \sum \omega_s D_s = 0$ (r massima corda fra le r_s), la funzione $f(x, y)$ si dice **integrabile nel campo C** ed il valore $g = G$ dicesi **integrale** di $f(x, y)$ esteso al campo C e si rappresenta con $\int_C f(x, y) dC$.

La condizione $\lim_{r=0} \sum \omega_s D_s = 0$ è la **condizione di integrabilità di Riemann**. Quando la condizione di integrabilità è soddisfatta, il limite della somma dei prodotti delle parti ω_s per un valore qualunque f_s compreso fra l_s ed L_s (in particolare per un valore assunto da $f(x, y)$ in un punto di ω_s) al tendere di r a zero è ancora $g = G$, cioè $\lim_{r=0} \sum f_s \omega_s = \int_C f(x, y) dC$.

Solitamente il sistema di divisione è quello che si ottiene mediante due fasci di rette || agli assi, alle distanze Δx quelle || ad y e Δy quelle || ad x . Allora l'integrale è il limite della somma $\sum f(x, y) \Delta x \Delta y$ per Δx e Δy che vanno a zero, la somma estesa ai rettangoli contenuti interamente in C ; giacchè si dimostra essere evanescente la somma dei prodotti delle parti di C che non sono rettangoli completi per un valore di $f(x, y)$ in dette parti: l'integrale allora si indica con $\int_C f(x, y) dx dy$. Al § 4 si indicherà il modo di calcolarli.

Proprietà degli integrali di campo. a) Una funz. integrabile in un campo C lo è in una qualunque sua parte quadrabile, e se C_1, C_2 sono le due parti di C , $\int_C f(x, y) dx dy = \int_{C_1} f(x, y) dx dy + \int_{C_2} f(x, y) dx dy$.

b) Se $f_1(x, y)$ ed $f_2(x, y)$ sono integrabili in C , $f_1 + f_2$ è integrabile in C ed è $\int_C [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy = \int_C f_1(x, y) dx dy + \int_C f_2(x, y) dx dy$.

c) Se $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ sono integrabili in C , il prodotto $f_1 \cdot f_2$ è integrabile in C e se $|f_2(x, y)|$ ha limite inferiore $\neq 0$ è integrabile in C anche il quoziente $f_1(x, y) : f_2(x, y)$.

d) $\int_C k f(x, y) dx dy = k \int_C f(x, y) dx dy$.

e) Se f_1, f_2 , definite in uno stesso campo C , differiscono solo in un numero finito di punti o sopra un numero finito di linee, se l'una è integrabile, l'altra è pure integrabile e gli integrali estesi a C coincidono.

f) Se $f_1 \geq f_2$ sono integrabili, $\int_C f_1(x, y) dx dy \geq \int_C f_2(x, y) dx dy$.

g) **Teor. della media.** Se f_1, f_2 sono integrabili in C e f_2 è sempre di un segno $\int_C f_1(x, y) f_2(x, y) dx dy = \vartheta \int_C f_2(x, y) dx dy$, essendo ϑ un conveniente numero compreso fra il limite inferiore e superiore di f_1 in C . In particolare se $f_2(x, y) = 1$, $\int_C f_1(x, y) dx dy = \vartheta C$.

h) Una funzione continua o generalmente continua (Capitolo XXXIII, § 8) in C è in integrabile.

Significato geometrico di integrale di $f(x, y)$ in un campo C .
Vedi Cap. XLVII, § 11.

2. — **Integrale di spazio.** In uno spazio Ω avente volume (Cap. XLVII, § 11) sia data una funzione limitata $f(x, y, z)$. Si divida Ω in parti η_s aventi volume e si formino le somme $S = \sum \eta_s L_s$, $s = \sum \eta_s l_s$ essendo L_s, l_s i limiti superiore ed inferiore di $f(x, y, z)$ in η_s . Gli aggregati (limitati) delle somme S e s che corrispondono agli infiniti sistemi possibili di divisione si possono ordinare come è indicato al § 1. Allora si dimostra che il limite dell'aggregato S è il suo limite inferiore g e il limite dell'aggregato s è il limite superiore G che sono detti rispettivamente **integrale superiore** ed **integrale inferiore** di $f(x, y, z)$ in Ω . Quando $g = G$ questo valore è detto **integrale** di $f(x, y, z)$ esteso allo spazio Ω e si rappresenta con $\int_{\Omega} f(x, y, z) d\Omega$, essendo $d\Omega$ l'elemento infinitesimo di volume. La condizione $g = G$ cioè $\lim_{r=0} \sum \eta_s D_s = 0$ (r massima corda inscrivibile nelle parti η_s , e D_s oscillazione di $f(x, y, z)$ in η_s) è detta **condizione di integrabilità di Riemann**. Quando questa è soddisfatta l'integrale di $f(x, y, z)$ esteso

allo spazio Ω si può definire il limite della somma dei prodotti delle parti η_s per un valore compreso fra l_s ed L_s (od in particolare un valore assunto da $f(x, y, z)$ in η_s) al tendere a zero di r .

Per gli integrali di spazio valgono proprietà analoghe a quelle esposte per gli integrali di campo.

3. — Integrali semplici delle funzioni di più variabili.

Se in un campo C è definita una funzione continua $f(x, y)$, e consideriamo in essa $y = y_1$, la funz. $f(x, y_1)$ diventa funz. continua della sola x e come tale integrabile nel segmento o nei segmenti che la retta $y = y_1$ ha in comune col campo C . L'integrale esteso a questo o a questi tratti dicesi **integrale semplice** della funz. $f(x, y)$; esiste certo per le ipotesi fatte. Supporremo il campo C limitato da una linea L incontrata da ogni retta $\parallel$ all'asse x in 2 punti soli, cosicchè mediante i punti di minima ordinata c e massima ordinata d essa sarà spezzabile in 2 parti ciascuna delle quali incontrata dalle rette $\parallel$ ad x in un punto solo; le equaz. di codeste 2 parti siano $x = \alpha(y)$ $x = \beta(y)$ con α e β funz. continue di y . Il campo potrebbe anche essere limitato da 2 archi appartenenti a $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ i cui estremi insistono su 2 rette $y = c$, $y = d$, e da queste rette. L'integrale $\int_{\alpha(y_1)}^{\beta(y_1)} f(x, y_1) dx$ rappresenta l'area racchiusa dalla curva intersezione della superficie $z = f(x, y)$ col piano $y = y_1$, dalle ordinate nei 2 punti $(\alpha(y_1), y_1)$ $(\beta(y_1), y_1)$ e dal tratto di retta $y = y_1$ (nel piano xy) intercetto da queste. Per le fatte ipotesi, esiste per ogni y di $c \rightarrow d$ l'integrale $\varphi(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ che è funz. continua di y in $c \rightarrow d$. La $\varphi(y)$ è continua anche se $f(x, y)$ ha un numero finito di discontinuità sopra ogni retta $y = \text{costante}$.

Derivazione sotto il segno. Supposto che $f(x, y)$ abbia la derivata rapporto ad y continua nel campo C , e che $\alpha(y)$, $\beta(y)$ siano derivabili, si ha $\frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx +$
 $+ \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y).$

Nel caso che $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ siano costanti, con che $\alpha'(y) = \beta'(y) = 0$ si ha $\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f'_y(x, y) dx$, cioè sono scambiabili i segni di derivazione ed integrazione. Pel caso che f o f'_y abbiano punti d'infinito, vedi § 5 b), e pel caso che sia $b = \infty$ vedi § 6, b).

Integrazione sotto il segno. Data la funzione $f(x, y)$ continua nel rettangolo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, la funzione $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ è continua, onde integrabile in $c \rightarrow d$; sarà $\int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$. Anche la funzione $\psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ è atta all'integrazione in $a \rightarrow b$; sarà $\int_a^b \psi(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$. Ora si dimostra che $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$.

Nel caso che la funz. abbia punti di infinito (§ 5), non è sempre lecita l'inversione dell'ordine delle due integrazioni; ad es. $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}$; $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4}$.

4. — **Integrali doppi.** La $f(x, y)$ sia continua in un campo C il cui contorno L , incontrato da ogni parallela ad y in 2 soli punti, può dal punto di minima ascissa a e da quello di massima ascissa b essere diviso in due parti di equazioni $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$. Per definizione l'integrale della $f(x, y)$ nel campo C è il $\lim_{\Delta x = \Delta y = 0} \sum f(x, y) \Delta x \Delta y$ indicando con $\Delta x \Delta y$ un rettangolo con i lati || agli assi, $f(x, y)$ un valore della funzione in un punto del rettangolo e la Σ estesa a tutti i rettangoli in cui C è diviso. Pel calcolo di una tale somma, si fissi un valore X ; la somma parziale corrispondente a tutti i rettangoli incontrati dalla retta $x = X$ è $\Delta x \sum f(X, y) \Delta y$ e al limite per $\Delta y = 0$ è $\Delta x \int_{y_1(X)}^{y_2(X)} f(X, y) dy$ onde la somma totale diviene $\lim_{\Delta x = 0} \sum \Delta x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ (la somma estesa da a a b) cioè si ha $\int_C f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$.

Un integrale di campo dicesi **integrale doppio**, perchè, nella ipotesi posta, si calcola con 2 integrazioni successive. Se si suppone $f(x, y) = 1$, $C = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$. Avendo invece decomposto il contorno di C in due parti mediante i punti di minima ordinata c e massima ordinata d , le cui equazioni siano $x = x_1(y)$ $x = x_2(y)$ si avrebbe $\int_C f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$.

Integrali tripli. Sia data una funzione continua di tre variabili $f(x, y, z)$ in uno spazio Ω limitato da una superficie incontrata da ogni parallela all'asse z in 2 soli punti. La superficie che racchiude Ω potrà dividersi in 2 parti ciascuna incontrata in un punto solo delle dette rette e le cui equazioni siano $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, con z_1 e z_2 funzioni continue.

Lo spazio Ω si proietti sul piano xy in un'area C il cui contorno sia, come dianzi, dato dalle due equazioni $y = y_1(x)$ $y = y_2(x)$; siano infine a e b le ascisse minima e massima del contorno.

Noi supporremo la divisione di Ω fatta con piani || ai piani coordinati, in guisa che ogni parte è un parallelepipedo $\Delta x \Delta y \Delta z$. L'integrale di $f(x, y, z)$ esteso allo spazio Ω è il limite di $\Sigma f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$ per $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$.

Fissato un punto (X, Y) in C la somma parziale estesa ai parallelepipedi incontrati dalla retta $x = X$, $y = Y$ è $\Delta x \Delta y \Sigma f(X, Y, z) \Delta z$ ed al limite per $\Delta z = 0$ è

$\Delta x \Delta y \int_{z_1(X, Y)}^{z_2(X, Y)} f(X, Y, z) dz$ e la somma totale di dianzi diviene $\Sigma \Delta x \Delta y \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ estesa ai rettangoli $\Delta x \Delta y$ di C : onde $\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$. L'integrale di spazio si dice **integrale triplo** giacchè, sotto le poste ipotesi, si calcola mediante 3 integrazioni successive.

Integrali multipli. Il concetto di integrale di una funzione limitata di n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ in uno spazio ad n dimensioni si stabilisce nell'identico modo degli integrali estesi ad un campo o ad uno spazio. E sotto le ipo-

tesi della continuità di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rispetto al complesso delle variabili il calcolo si compie mediante n integrazioni successive, cosicchè l'integrale dicesi **n-plo**.

$I = \int_{a_1}^{x_1} dx_1 \int_{a_2}^{x_2} dx_2 \dots \int_{a_{n-1}}^{x_{n-1}} dx_{n-1} \int_{a_n}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n$, se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è funzione continua, è funzione continua di $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. La derivata di I rispetto ad x_i è l'integrale $(n-1)$ -plo ottenuto da I sopprimendo l'integrazione rispetto ad x_i ; in particolare $\frac{\partial^n I}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Per $n=2$, $\frac{\partial}{\partial x} \int_a^x dx \int_b^y f(x, y) dy = \int_b^y f(x, y) dy$;

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_a^x dx \int_b^y f(x, y) dy = \int_a^x f(x, y) dx$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_a^x dx \int_b^y f(x, y) dy = f(x, y).$$

5. — Integrale di una funzione di più variabili esteso ad un campo in punti del quale la funz. diventa infinita.

a) Sia $f(x, y)$ infinita in (x_1, y_1) ma in ogni campo parziale C' di C che non contiene (x_1, y_1) esista determinato e finito $\int_{C'} f(x, y) dx dy$; $C_1, C_2 \dots C_i, \dots$ sia una successione di campi tutti compresi in C e comprendenti (x_1, y_1) ciascuno contenuto nel precedente e tali che preso un punto P per quanto prossimo a (x_1, y_1) vi sia sempre un campo che non contiene P ; se esiste ed è finito il $\lim_{i=\infty} \int_{C'_i} f(x, y) dx dy$ (essendo C'_i il

campo C da cui si è tolto C_i) questo si definisce integrale di $f(x, y)$ esteso al campo C e si indica, al solito, con $\int_C f(x, y) dx dy$; in tal caso la $f(x, y)$ si dice integrabile in C . Ciò è estendibile a funzioni ad un numero qualunque di variabili. I punti di infinito potrebbero costituire una linea l ; se questa è rettificabile si può definire l'integrale di $f(x, y)$ esteso al campo C in modo del tutto analogo a quello tenuto sopra, sostituendo la l al punto (x_1, y_1) .

b) Se $f(x, y)$ ha in (x_0, y_0) un punto d'infinito o ivi l'ha

$f'_y(x, y)$ od entrambe, supposto che per $a \leq x \leq b$ siano $f(x, y)$ e $f'_y(x, y)$ integrabili rispetto alla x in $a \vdash b$ e che prefissato un σ positivo piccolo ad arbitrio esistano 2 numeri > 0 ε_0, k_0 tali che per $|k| < k_0$ (k anche variabile con x) $\varepsilon_1 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ sia $|\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon_1} f'_y(x, y_0+k) dx| < \sigma, |\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon_1} f(x, y_0+k) dx| < \sigma$, e se in ogni intervallo di $a \vdash b$ non contenente x_0 è applicabile all'integrale rapporto ad x di $f(x, y)$ la derivazione sotto il segno (§ 3) rispetto ad y , allora la derivata rapporto ad y in y_0 di $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ è $\varphi'(y_0) = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$.

6. — **Integrale di una funzione di più variabili estesa ad un campo infinito.** a) Sia $f(x, y)$ definita in un campo infinito C e sia $C_1, C_2 \dots C_i \dots$ una successione di campi tutti contenuti in C , ciascuno contenente il precedente e tali che preso un punto qualunque del campo C vi sia sempre un campo C_i che lo contiene; allora se esiste determinato e finito $\lim_{i=\infty} \int_{C_i} f(x, y) dx dy$ questo si definisce una integrale di $f(x, y)$ esteso al campo C ed ivi la $f(x, y)$ si dice *integrabile*. Ciò è estendibile al caso di funzioni ad un numero qualunque di variabili.

b) Se, per quanto grande sia γ , all'integrale $\int_a^\gamma f(x, y) dx$ è applicabile la derivazione sotto il segno (§ 3) e se preso σ positivo piccolo ad arbitrio esistono 2 numeri > 0 , γ e k_0 tali che per $b > \gamma$ e $|k| \leq k_0$ (k anche variabile con x) sia $|\int_\gamma^b f'_y(x, y_0+k) dx| < \sigma$, allora la derivata di $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ in y_0 è $\varphi'(y_0) = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$.

7. — **Cambiamento di variabili negli integrali multipli.** a) Sia da calcolarsi l'integrale di $f(x, y)$ esteso al campo quadrabile C . Si ponga $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e sia non identicamente nullo il determinante funzionale $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ (Capitolo XXXVII, § 10) cosicchè si può ricavare $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Sia C' il campo luogo dei punti (u, v) che si ottengono dando ad x, y tutte le coppie di valori del campo C . Le linee $u(x, y) = \text{costante}$ formano una famiglia di linee non aventi punti in co-

mune, altrettanto dicasi delle linee $v(x, y) = \text{costante}$. Quando le costanti varino per gradi arbitrariamente piccoli il campo C resta diviso in quadrilateri curvilinei infinitesimi; le 4 curve $u(x, y) = u, v(x, y) = v, u(x, y) = u + du, v(x, y) = v + dv$ danno luogo ad un quadrilatero curvilineo che prescindendo da infinitesimi d'ordine superiore ha l'area $\left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv$ onde l'integrale di $f(x, y)$ esteso al campo C sarà il limite della somma dei prodotti dei singoli quadrilateri curvilinei $\left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv$ per un valore di $f(x(u, v), y(u, v))$ in detti quadrilateri, cioè

$$\int_C f(x, y) dx dy = \int_{C'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv.$$

Ad es. L'integrale della funzione $x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ esteso all'astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$, posto $x = r u^3, y = r v^3$ equivale all'integrale $9 r^{\frac{10}{3}} \int u^4 v^4 du dv$ esteso al cerchio di centro (0,0) e raggio 1, cioè a $36 r^{\frac{10}{3}} \int_0^1 u^4 du \int_0^{\sqrt{1-u^2}} v^4 dv = \frac{27}{320} r^{\frac{10}{3}} \frac{\pi}{2}$.

Se il cambiamento di variabili è una sola trasformazione di coordinate, il campo C' è lo stesso C . Passando dalle coordinate cartesiane x, y, z alle cilindriche ρ, ω, z (Cap. I, § 13) è $\frac{d(x, y)}{d(\rho, \omega)} = \rho$.

b) In modo analogo si fa il cambiamento di variabili in un integrale di spazio. Se si pone $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ essendo il determinante funzionale $\frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)}$ non identicamente nullo, se Ω è lo spazio a cui si estende l'integrale di $f(x, y, z)$, Ω' il luogo dei punti (u, v, w) ottenuti dando ad x, y, z tutte le terne di valori coordinate dei punti di Ω , allora: $\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$
 $= \int_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} \right| du dv dw.$

Se il cambiamento di variabili è una trasformazione di coordinate, $\Omega' \equiv \Omega$; se si passa dalle coord. cartesiane ortogonali alle coord. polari $\varrho, \varphi, \vartheta$ (Cap. I, § 13) $\frac{d(x, y, z)}{d(\varrho, \varphi, \vartheta)} =$

$$= \varrho^2 \sin \vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi, \text{ onde } \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ = \int_{\Omega} f(\varrho \sin \vartheta \cos \varphi, \varrho \sin \vartheta \sin \varphi, \varrho \cos \vartheta) \varrho^2 \sin \vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi.$$

c) In un integrale n -plo $\int_{S_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$ esteso ad uno spazio S_n si eseguisce un cambiamento di variabili definito dalle equaz. $x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) di cui il jacobiano $\frac{d(x_1, x_2, \dots, x_n)}{d(u_1, u_2, \dots, u_n)}$ è non identicamente nullo (Capitolo XXXVII, § 10) ponendo in posto di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(u_1(x_1, \dots, x_n), u_2(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n))$ ed in posto di $dx_1 dx_2 \dots dx_n$, $\left| \frac{d(x_1, x_2, \dots, x_n)}{d(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right| du_1 du_2 \dots du_n$, l'integrazione rispetto ad $u_1, u_2, \dots, u_n$ estesa allo spazio S_n' che è il trasformato di S mediante le equaz. $u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che si ottengono invertendo le $x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

8. — **Integrali curvilinei.** Se l è una linea definita da $y = f(x)$ e se $F(x, y)$ è una funzione di x, y si dice **integrale curvilineo** esteso alla linea l e si denota con $\int_{(l)} F(x, y) \, dx$ l'integrale $\int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x)) \, dx$, supposte x_0, x_1 le ascisse degli estremi di l .

Sia C un campo il cui contorno è spezzabile in due parti mediante i punti di minima e massima ascissa a, b le cui equazioni siano $y = y_1(x), y = y_2(x)$ e mediante i punti di minima e massima ordinata c, d in due parti di equazioni $x = x_1(y), x = x_2(y)$; e siano $P(x, y), Q(x, y)$ due funz. continue in C insieme alle derivate parziali prime. Indicando con l il contorno di C percorso in senso tale da lasciare a sinistra il campo, sarà $\int_{(l)} Q(x, y) \, dx = \int_a^b \{ Q(x, y_1(x)) - Q(x, y_2(x)) \} \, dx =$

$$= - \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial y} \, dy = - \int_C \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx \, dy. \text{ In modo analogo}$$

$$\int_{(l)} P(x, y) \, dy = \int_c^d \{ P(x_2(y), y) - P(x_1(y), y) \} \, dy =$$

$$= \int_c^d \{ P(x_2(y), y) - P(x_1(y), y) \} dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial P}{\partial x} dx =$$

$$= \int_c \frac{\partial P}{\partial x} dx dy \text{ onde } \int_{(l)} \{ P(x, y) dy - Q(x, y) dx \} = \int_c \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy, \text{ formula di Green, che trasforma un integrale}$$

di campo in un integrale di un contorno.

Se $P(x, y) dy - Q(x, y) dx$ è un differenziale esatto (Capitolo XLVIII, § 1) l'integrale, esteso ad una qualunque linea chiusa l , di $P dy - Q dx$ è nullo.

9. — **Integrali di superficie.** a) Consideriamo un pezzo di superficie limitato da una o più curve, sulla quale si possano considerare due bande (cioè tale che non si possa andare dall'una all'altra con moto continuo senza attraversare il contorno) (*).

L'equaz. della superficie sia $z = \varphi(x, y)$, limitata da una curva L , la proiezione della quale sul piano xy sia l , e λ sia l'area racchiusa da l .

Consideriamo l'integrale doppio $\iint_\lambda F(x, y, \varphi(x, y)) dx dy$ ove $F(x, y, \varphi(x, y))$ è stato ottenuto dalla funzione $F(x, y, z)$ ponendo $\varphi(x, y)$ in luogo di z e $F(x, y, z)$ si suppone finita continua in una porzione di spazio contenente il pezzo considerato di superficie $z = \varphi(x, y)$. Chiamando con $d\sigma$ l'elemento differenziale della superficie (Cap. XLVII, § 15), che si proietta nell'elemento $dx dy$ di λ e con γ l'angolo che la normale alla superficie (Cap. XLVII, § 1) elevata da una banda determinata fa coll'asse z , sarà $d\sigma \cos \gamma = dx dy$; onde l'integrale doppio considerato si può scrivere $\iint F(x, y, \varphi(x, y)) \cos \gamma d\sigma$ od anche $\iint F(x, y, z) \cos \gamma d\sigma$ ove si supponga sempre z rappresentare $\varphi(x, y)$. Questo integrale si dice **integrale di $F(x, y, z)$ esteso alla superficie** dalla banda considerata.

(*) Non ha che una banda sola la superficie ottenuta da un rettangolo $ABCD$ (di cui A, C e B, D sono le due coppie di vertici opposti) e flettendolo in modo che il lato AB va a sovrapporsi a DC in guisa che A coincida con C e B con D .

Se $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$ sono 3 funzioni, si può considerare l'integrale di superficie $\iint (A \, dy \, dz + B \, dz \, dx + C \, dx \, dy)$ che si può scrivere anche $\iint (A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma) \, d\sigma$ se con $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ si indicano i coseni direttori della normale alla superficie elevata da una banda determinata. Se la superficie ha l'equaz. $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$,

$z = z(u, v)$ l'integrale precedente diviene $\iint \left(A \frac{d(y, z)}{d(u, v)} + B \frac{d(z, x)}{d(u, v)} + C \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right) du \, dv$ ove $\frac{d(y, z)}{d(u, v)}$ è il jaco-

biano (Cap. XXXVII, § 10) di y, z , ecc.; A, B, C sono $A(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ecc. (Cfr. § 7).

b) Formula di Gauss. Se $F(x, y, z)$ è una funz. ad un valore, finita e continua in una porzione continua S di spazio limitata da una superficie σ , si ha la formula dovuta a Gauss: $\iint_S \frac{\partial F}{\partial z} \, dS = - \int_{\sigma} F \cos(n, z) \, d\sigma$, ove $\cos(n, z)$ è il coseno dell'angolo che la normale alla superficie σ rivolta verso l'interno di S fa con la direzione positiva di z ; e l'integrale del 2° membro è l'integrale di F esteso alla superficie dalla banda interna.

c) Formula di Stokes. Se $F(x, y, z)$ ha derivate parziali continue nello spazio S ove è definita e σ è un pezzo di superficie contenuta nello spazio S , il cui contorno è la linea L ; fissata una banda di σ , e considerato L percorso da sinistra verso destra rispetto ad un osservatore posto sulla banda prefissata della superficie ed in prossimità del contorno, vale la formula

$$\int_{\sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} \cos(n, y) - \frac{\partial F}{\partial y} \cos(n, z) \right\} d\sigma = \int_{(L)} F \, dx$$

che trasforma un integrale di superficie in un integrale curvilineo.

Se A, B, C sono 3 funzioni di x, y, z , ad un valore continue insieme alle loro derivate parziali prime, vale la formula

$$\int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] d\sigma = \int_{(L)} (A dx + B dy + C dz).$$

Quando $A dx + B dy + C dz$ è un differenziale esatto (Cap. XLVIII, § 1), gli integrali precedenti sono nulli.

CAPITOLO XLI.

Funzioni implicite

1. — **Funzione implicita di una variabile.** Sia data un'equaz. $f(x, y) = 0$; se f è finita e continua in un campo A , ove ammette la derivata parziale f'_y sempre positiva o nulla, escluso che i punti in cui è nulla riempiano un tratto di retta $x = \text{costante}$; si conosca una coppia di valori (x_0, y_0) in cui $f(x_0, y_0) = 0$, allora per x variabile in un intervallo contenente x_0 , l'equaz. data definisce un'unica funzione continua $y = y(x)$ che rende $f(x, y(x)) = 0$ (*).

Derivate di una funzione implicita. Se nel campo A esistono le derivate parziali f'_x, f'_y e soddisfano alle condizioni

* Esistono varie dimostrazioni dell'esistenza della funzione implicita, per alcune delle quali è necessario ammettere l'esistenza della derivata rispetto ad x , la continuità e il non annullarsi della f'_y ; per altre, questa sola ultima condizione.

richieste nella regola di derivazione delle funz. composte, derivando l'identità $f(x, y(x)) = 0$, si ha $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) = 0$ da cui $y'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$. Pel caso in cui in un punto (x_0, y_0) si annullano entrambe le derivate parziali, vedi Cap. XLV, § 9.

Se la $f(x, y)$ ammette le tre derivate seconde continue insieme alle prime, la derivata seconda di $y(x)$ è data da $y''_{xx} = [f''_{xx}(f'_y)^2 - 2f''_{xy}f'_x f'_y + f''_{yy}(f'_x)^2] : (f'_y)^3 = \frac{1}{(f'_y)^3} \begin{vmatrix} 0 & f'_{xx} & f'_{xy} \\ f'_{xx} & f''_{xx} & f''_{xy} \\ f'_{xy} & f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$

2. — Funzione implicita di 2 variabili. Sia data l'equaz. $f(x, y, z) = 0$ in cui $f(x, y, z)$ è funzione finita e continua in un certo spazio Ω ; la f'_z abbia sempre uno stesso segno, non escluso che sia nulla purchè non lo sia in tutto un tratto di retta $x = \text{costante}$, $y = \text{cost.}$; si conosca un punto (x_0, y_0, z_0) per cui $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, allora si ha tutto un intorno di (x_0, y_0) entro cui resta definita una unica funzione continua $z = z(x, y)$ che rende $f(x, y, z(x, y)) = 0$.

Derivate parziali di una funzione implicita di 2 variabili.

Se nello spazio Ω esistono le 3 derivate parziali f'_{xx}, f'_{yy}, f'_z soddisfacenti alla condizione per la derivazione delle funzioni composte, dalla derivazione dell'identità $f(x, y, z(x, y)) = 0$ si ha $z'_x = -f'_{xz} : f'_z$; $z'_y = -f'_{yz} : f'_z$ ed il differenziale totale è $dz = -[f'_{xz} dx + f'_{yz} dy] : f'_z$. Se esistono le 6 derivate parziali seconde e sono continue insieme alle prime, si ha $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$

$$= \begin{vmatrix} 0 & f'_{xx} & f'_{xz} \\ f'_{xx} & f''_{xx} & f''_{xz} \\ f'_{xz} & f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} : \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \begin{vmatrix} 0 & f'_{xy} & f'_{yz} \\ f'_{xy} & f''_{xy} & f''_{yz} \\ f'_{yz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} : \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \begin{vmatrix} 0 & f'_{yy} & f'_{yz} \\ f'_{yy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f'_{yz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix}$$

Funzione implicita di un numero qualunque di variabili.

Se la funz. $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ è continua in uno spazio a $n + 1$ dimensioni D , con derivata f'_y sempre di un segno o se annullantesi non si annulli per tutti i valori $x_1 = \text{costante}$, $x_2 = \text{cost.}$, $\dots$, $x_n = \text{cost.}$; se l'equazione $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ è soddisfatta

da $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, y$, allora in un intorno di $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ esiste una funzione continua y di $x_1, x_2, \dots, x_n$ che rende $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$.

Derivate parziali della precedente funzione. Se esistono anche le n derivate $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e sono continue, si ha $\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ ed il differenziale totale è $dy = -\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) : \frac{\partial f}{\partial y}$.

3. — Sistemi di equazioni. a) Sia dato il sistema delle due equazioni $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$. Le funzioni f e φ siano in uno spazio Ω finite, continue e derivabili; la f'_z sia sempre di un segno e se nulla in qualche punto non lo sia in un tratto di retta $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$; sia il jacobiano $\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}$ sempre positivo o sempre negativo e si conosca una terna di valori (x_0, y_0, z_0) per cui sia $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$; allora esiste un intorno di x_0 entro cui restano dal dato sistema di equaz. definite due funzioni $y = y(x)$, $z = z(x)$ che sono uniche e continue.

Le derivate delle due funzioni sono date da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} f'_z & f'_x \\ \varphi'_z & \varphi'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}}$$

b) Siano date le m equaz. $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) soddisfatte da $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m$, punto di uno spazio Ω ad $n + m$ dimensioni in cui le f_i sono continue insieme alle m^2 derivate $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ ed in cui è $\neq 0$ il determ. funzionale

$$\frac{d(f_1 f_2 \dots f_m)}{d(y_1 y_2 \dots y_m)} \quad (\text{Cap. XXXVII, § 10});$$

allora esiste in Ω un unico sistema di m funzioni continue che rendono soddisfatte identicamente le m equaz. $f_i = 0$.

Se le f_i ammettono anche le mn derivate $\frac{\partial f_i}{\partial x_h}$ e sono continue, delle m funzioni $y_1, y_2, \dots, y_m$ dianzi definite esistono

le derivate parziali rispetto ad $x_1 x_2 \dots x_n$. Le derivate $\frac{\partial y_1}{\partial x_h}$,

$\frac{\partial y_2}{\partial x_h}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_h}$ si ottengono risolvendo il sistema di m equaz.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_h} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_h} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_h} = 0 \quad (i=1, 2 \dots m)$$

le cui soluz. sono $\frac{\partial y_i}{\partial x_h} = - \frac{d(f_1 f_2 \dots f_m)}{d(y_1 \dots y_{h-1} x_h y_{h+1} \dots y_m)} \cdot \frac{d(f_1 f_2 \dots f_m)}{d(y_1 y_2 \dots y_m)}$

Invertibilità di un sistema di funzioni. Date le n equazioni $x_i = \varphi_i(y_1 y_2 \dots y_n)$ ($i=1, 2, \dots, n$), se il determinante funzionale $\frac{d(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n)}{d(y_1 y_2 \dots y_n)}$ è diverso da zero, le y possono inversamente considerarsi quali funzioni delle $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Indipendenza di m funzioni di n variabili.

Si dicono **indipendenti** m funzioni $y_i = \varphi_i(x_1, x_2 \dots x_n)$ delle n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ se non esiste alcuna identità della forma $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) = 0$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè delle m funzioni $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, h e non più siano indipendenti è che la matrice di cui la linea r -esima è $\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n}$ ($r=1, 2, \dots, m$) abbia la caratteristica h (Cap. XVI, § 1).

Tra $n+p$ funzioni di n variabili esistono almeno p relazioni. Condizione necessaria e sufficiente perchè n funz. di n variabili non siano indipendenti è che il loro determ. funzionale sia identicamente nullo.

Formule abbreviate del Taylor.

Espressioni che si presentano sotto forma indeterminata

1. — **Teorema del valor medio generalizzato (teor. di Cauchy).** Se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono due funzioni continue in $x_0 \vdash x_0 + h$ aventi in ogni punto interno le derivate $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ determinate e la $\psi'(x)$ è finita e diversa da zero, $\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)} =$

$$= \frac{\varphi'(x_0 + \vartheta h)}{\psi'(x_0 + \vartheta h)} \quad (0 < \vartheta < 1). \text{ Se } \varphi(x_0) = \psi(x_0) = 0 \text{ è } \frac{\varphi(x_0 + h)}{\psi(x_0 + h)} =$$

$$= \frac{\varphi'(x_0 + \vartheta h)}{\psi'(x_0 + \vartheta h)}. \text{ Se } \varphi'(x) \text{ e } \psi'(x) \text{ si comportano in } x_0 \vdash x_0 + \vartheta h \text{ come}$$

mele φ e ψ in $x_0 \vdash x_0 + h$, $\frac{\varphi'(x_0 + \vartheta h)}{\psi'(x_0 + \vartheta h)} = \frac{\varphi''(x_0 + \vartheta' h)}{\psi''(x_0 + \vartheta' h)} \quad (0 < \vartheta' < \vartheta).$

Se $\varphi''(x)$ e $\psi''(x)$; $\varphi'''(x)$, $\psi'''(x)$; . . . $\varphi^{(n-1)}(x)$, $\psi^{(n-1)}(x)$ si comportano negli intervalli rispettivi $x_0 \vdash x_0 + \vartheta'' h$ ($0 < \vartheta'' < \vartheta'$); $x_0 \vdash x_0 + \vartheta''' h$ ($0 < \vartheta''' < \vartheta''$) . . $x_0 \vdash x_0 + \vartheta^{(n-1)} h$ ($0 < \vartheta^{(n-1)} <$

$$< \vartheta^{(n-2)}) \text{ come } \varphi \text{ e } \psi \text{ in } x_0 \vdash x_0 + h, \text{ è, } \frac{\varphi(x_0 + h)}{\psi(x_0 + h)} = \frac{\varphi'(x_0 + \vartheta h)}{\psi'(x_0 + \vartheta h)} =$$

$$= \frac{\varphi''(x_0 + \vartheta' h)}{\psi''(x_0 + \vartheta' h)} = \dots = \frac{\varphi^{(n-1)}(x_0 + \vartheta^{(n-2)} h)}{\psi^{(n-1)}(x_0 + \vartheta^{(n-2)} h)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0 + \vartheta^{(n-1)} h)}{\psi^{(n)}(x_0 + \vartheta^{(n-1)} h)}.$$

Col prendere $\psi(x) = (x - x_0)^n$ e scrivendo ϑ in luogo di $\vartheta^{(n-1)}$ si trae $\varphi(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!} \varphi^{(n)}(x_0 + \vartheta h).$

2. — **Formula abbreviata di Taylor per le funzioni di una variabile.** Se $f(x)$ è una funzione finita e continua nell'intervallo $x_0 \vdash x_0 + h$ che ha derivate fino all'ordine $n - 1$ ivi

finite e continue, eccettuato al più il punto $x_0 + h$, ed ha derivata n -esima determinata in ogni punto interno, si ha:

$$(1) f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \\ + \dots + \frac{h^{n-1}}{n-1!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \text{ con } 0 < \vartheta < 1$$

(formula abbreviata o sviluppo accorciato di Taylor).

Se si pone $x_0 + h = x$ con che $h = x - x_0$ si ha

$$(2) f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \\ + \dots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{n-1!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)).$$

Se $x_0 = 0$ si ha (3) $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{n-1!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\vartheta x)$. Gli sviluppi (2) e (3) si dicono *sviluppi accorciati di Mac-Laurin*.

Il termine $R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h)$ dicesi **termine complementare** o **resto** dello sviluppo accorciato (1).

Se $f(x)$, $f'(x)$, $\dots$, $f^{(n-1)}(x)$ sono finite e continue in tutto $x_0 \vdash x_0 + h$ e $f^{(n)}(x)$ esiste determinata nei punti interni ad $x_0 \vdash x_0 + h$ si può scrivere $f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n-1!} f^{(n-1)}(x_0) + h^n \frac{(1 - \vartheta)^{n-p}}{p(n-1)!} \times$
 $\times f^{(n)}(x_0 + \vartheta h)$. Il termine $R'_n = \frac{h^n (1 - \vartheta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h)$ è il *resto* nella forma di *Schlömilch - Roche*. Per $p = 1$ si ha la forma di *Cauchy* $R''_n = \frac{h^n (1 - \vartheta)^{n-1}}{n-1!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h)$ e per $p = n$ si ha la forma su riportata di *Lagrange*, (che si stabilisce sotto condizioni meno restrittive).

Per gli sviluppi (2) e (3) i resti nelle varie forme si ottengono facendo le indicate sostituzioni.

3. — **Formula abbreviata di Taylor per le funzioni a più variabili.** Sia $f(x, y)$ una funzione finita e continua in un certo

campo A in cui sono finite e continue tutte le derivate successive fino all'ordine $n - 1$ e quelle di ordine n -esimo sono determinate e finite in un certo intorno di (x_0, y_0) ; sotto queste ipotesi è

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}^{(2)} + \dots + \frac{1}{n-1!} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}^{(n-1)} + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0 + \frac{h}{n}, y_0 + \frac{k}{n}}^{(n)} \text{ dove, come altra volta fu detto, è} \\ &\left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(m)} = \frac{\partial^m f}{\partial x^m} h^m + \binom{m}{1} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y} h^{m-1} k + \\ &+ \binom{m}{2} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-2} \partial y^2} h^{m-2} k^2 + \dots + \binom{m}{m-1} \frac{\partial^m f}{\partial x \partial y^{m-1}} h k^{m-1} + \\ &+ \frac{\partial^m f}{\partial y^m} k^m. \text{ L'ultimo termine si dice resto.} \end{aligned}$$

4. — **Espressioni che si presentano sotto forma indeterminata.**

a) **Espressione** $\frac{0}{0}$. Se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono due funzioni continue che tendono a zero per x tendente a x_0 , il quoziente $f(x) : \varphi(x)$ per $x = x_0$ assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per la determinazione di $\lim_{x=x_0} [f(x) : \varphi(x)]$, se esistono le derivate prime finite e continue, si formi il rapporto $f'(x) : \varphi'(x)$; se di esso esiste il limite per $x = x_0$, si assume per valore di $\lim_{x=x_0} [f(x) : \varphi(x)]$. Se il rapporto $f'(x_0) : \varphi'(x_0)$ si presenta sotto forma indeterminata, si formi il rapporto delle derivate seconde: in generale vale la **regola di l'Hospital**: se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono continue in un intorno di x_0 ove si annullano ed hanno le derivate $f'(x), \varphi'(x); f''(x), \varphi''(x); \dots$ finite e continue non annullantisi in alcun punto di un determinato intorno di x_0 (eccetto x_0), il primo dei quozienti $\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}, \frac{f''(x_0)}{\varphi''(x_0)}, \dots$

... $\frac{f^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_0)}$, ... che ha significato determinato, rappresenta il
 $\lim_{x=x_0} [f(x) : \varphi(x)]$.

$$\begin{aligned} \text{Esempi: } \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{1} = 1; \lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1; \\ \lim_{x=0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \sin x}{x - \sin x} &= \lim_{x=0} \frac{e^{-x} + e^{-x} - 2 \cos x}{1 - \cos x} = \\ = \lim_{x=0} \frac{e^{-x} - e^{-x} + 2 \sin x}{\sin x} &= \lim_{x=0} \frac{e^{-x} + e^{-x} + 2 \cos x}{\cos x} = 4; \\ \lim_{x=0} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{b - \sqrt{b^2 - x^2}} &= \lim_{x=0} \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}; \lim_{x=0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \\ = \lim_{x=0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{c^x \log c - d^x \log d} &= \frac{\log(a:b)}{\log(c:d)}; \lim_{x=0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \\ = \frac{1}{3} \lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{6} \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}; \lim_{x=0} \frac{\cotg x}{\log x} = \\ = \lim_{x=0} \frac{-x}{\sin^2 x} &= \lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} \left(-\frac{1}{\sin x} \right) = -\infty. \end{aligned}$$

b) Espress. $\frac{\infty}{\infty}$. Se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono in $x = x_0$ infinite (Cap. XXXIV, § 3) il quoziente $f(x) : \varphi(x)$ si presenta in $x = x_0$ sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Se $f(x)$ e $\varphi(x)$ conservano in un intorno di x_0 segno determinato, per la determinazione del $\lim_{x=x_0} [f(x) : \varphi(x)]$ si usa la stessa regola di l' Hospital.

$$\begin{aligned} \text{Esempi: } \lim_{x=0} \frac{\log \operatorname{tg} a x}{\log \operatorname{tg} x} &= \lim_{x=0} \left[\frac{a \sec^2 a x}{\operatorname{tg} a x} : \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} \right] = \\ = \lim_{x=0} \frac{a \sin 2 x}{\sin 2 a x} &= \lim_{x=0} \frac{2 a \cos 2 x}{2 a \cos 2 a x} = 1; \lim_{x=a} \frac{\log (x-a)}{\log (e^x - e^a)} = \\ = \lim_{x=a} \frac{1}{e^x} \cdot \frac{e^x - e^a}{x-a} &= \frac{1}{e^a} \lim_{x=a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = 1; \lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x^m} = \\ \lim_{x=\infty} \frac{1}{m x^m} &= 0 \text{ qualunque sia } m; \lim_{x=0} \frac{\log x}{x^{-m}} = -\frac{1}{m} \lim_{x=0} x^m = 0: \end{aligned}$$

gli ultimi due risultati significano che $\log x$ è in $x=0$ e in $x=\infty$ infinito di ordine minore di qualunque numero positivo;

$\lim_{x=\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$ qualunque sia il positivo m , cioè e^x è infinito d'ordine maggiore di qualunque numero finito.

c) **Espress.** $0 \cdot \infty$. Se al tendere di x ad x_0 , $f(x)$ tende a 0, $\varphi(x)$ a ∞ , il prodotto $f(x) \varphi(x)$ in $x = x_0$ assume la forma indetermin. $0 \cdot \infty$. Ma $f(x) \cdot \varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)} = \varphi(x) : \frac{1}{f(x)}$ che

$$\text{sono espressioni del tipo } a) \circ b). \text{ Esempi: } \lim_{x=\infty} \left(a^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \\ = \lim_{x=\infty} \left[\left(a^{\frac{1}{x}} - 1 \right) : \frac{1}{x} \right] = \log a; \lim_{x=0} x \cotg x = \lim_{x=0} (x : \tg x) = 1;$$

$$\lim_{x=0} \sen x \cdot \log \cotg x = \lim_{x=0} \frac{\log \cotg x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x=0} \frac{\sen x}{\cos^2 x} = 0.$$

d) **Espress.** 0^0 . Se $f(x)$, $\varphi(x)$ si annullano in $x = x_0$, $f(x)^{\varphi(x)}$ in $x = x_0$ assume la forma indetermin. 0^0 . Ma $\log f(x)^{\varphi(x)} = \varphi(x) \log f(x)$ che in $x = x_0$ è della forma c). Se $A = \lim_{x=x_0} \log f(x)^{\varphi(x)}$, $\lim_{x=x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^A$. *Es.* $\lim_{x=+0} x^x = 1$, perchè

$$\lim_{x=+0} x \log x = 0; \lim_{x=0} (1 - \cos x)^{\sen^2 x} = 1, \text{ perchè}$$

$$\lim_{x=0} \sen^2 x \log (1 - \cos x) = \lim_{x=0} (\log (1 - \cos x) : \sen^{-2} x) = 0.$$

e) **Espress.** 1^∞ . Se al tendere di x a x_0 , $f(x)$ tende ad 1 e $\varphi(x)$ a ∞ , $f(x)^{\varphi(x)}$ in $x = x_0$ assume la forma indetermin. 1^∞ . Ma $\log f(x)^{\varphi(x)} = \varphi(x) \log f(x)$, che in $x = x_0$ è della forma c).

(Cfr. d)). *Es.* $\lim_{x=\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^a$; infatti $\lim_{x=\infty} x \log \left(1 + \frac{a}{x} \right) = a$.

f) **Espress.** ∞^0 . Se al tendere di x a x_0 , $f(x)$ tende a ∞ e $\varphi(x)$ a 0, $f(x)^{\varphi(x)}$ assume in $x = x_0$ la forma indetermin. ∞^0 . Ma procedendo come nei casi d) ed e) ci si riduce alla forma c).

$$\text{Es. } \lim_{x=\infty} \sqrt[x]{x} = 1.$$

g) **Espress.** $\infty - \infty$. Se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono entrambe infinite in x_0 , $f(x) - \varphi(x)$ assume in x_0 la forma indetermin. $\infty - \infty$.

Mediante l'identità $f(x) - \varphi(x) = \left(\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) : \frac{1}{f(x) \varphi(x)}$

ci si riduce al caso a). Mediante l'altra $f(x) - \varphi(x) = \log \frac{e^{-\varphi(x)}}{e^{-f(x)}}$ si calcolerà prima $\frac{e^{-\varphi(x)}}{e^{-f(x)}}$ che è della forma a). Se $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ tende ad 1, mediante l'identità $f(x) - \varphi(x) = f(x) \left(1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$ si è ricondotti al caso c). *Esempio*: $\lim_{x=\infty} x - \sqrt{(x-a)(x-b)} =$

$$= \lim_{x=\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x=\infty} \left[\left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{a}{x}\right)\left(1 - \frac{b}{x}\right)}\right) : \frac{1}{x} \right] = -\frac{a+b}{2} \text{ (applicando}$$

 la regola di l' Hospital),

CAPITOLO XLIII.

Crescenza e decrescenza delle funzioni; massimi e minimi

1. — **Funzione crescente e decrescente in x_0 ; massimo o minimo in x_0** sono stati definiti al Cap. XXXVI, §4. Se $f'(x_0) > 0$ $f(x)$ è crescente in x_0 se $f'(x_0) < 0$ la funz. è decrescente in x_0 ; se $f'(x_0) = 0$, ma $f''(x_0) \neq 0$ la funzione non è nè crescente, nè decrescente, ma ha massimo se $f''(x_0) < 0$, minimo se $f''(x_0) > 0$. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$ la funz. è crescente se $f'''(x_0) > 0$, decrescente se $f'''(x_0) < 0$: in generale, se $f(x)$ è una funz. che ha derivate successive ed in x_0 sono nulle $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots$, $f^{(r-1)}(x)$ ed è $f^{(r)}(x_0) \neq 0$ la funzione in $x = x_0$ ha massimo o minimo se r è pari e precisamente massimo se $f^{(r)}(x_0) < 0$, minimo se $f^{(r)}(x_0) > 0$; se r è dispari la funzione è crescente se $f^{(r)}(x_0) > 0$, decrescente se $f^{(r)}(x_0) < 0$.

Nell'estremo inferiore a dell'intervallo $a \rightarrow b$ si dice che $f(x)$ ha minimo se per $h < \delta$ di un conveniente numero $\delta > 0$ è $f(a) < f(a + h)$; ha massimo se $f(a) > f(a + h)$. Calcolate in a le derivate successive, sia $f^{(r)}(a)$ la prima non nulla, se questa è > 0 la funz. ha minimo, se < 0 ha massimo. Nell'estremo superiore b , la $f(x)$ ha massimo se per $h < \delta$ di un conveniente numero $\delta > 0$, è $f(b - h) < f(b)$, ha minimo se $f(b - h) > f(b)$. Calcolate in b le derivate successive, sia $f^{(r)}(b)$ la prima non nulla; se r è dispari la $f(x)$ ha massimo se $f^{(r)}(b) > 0$, minimo se $f^{(r)}(b) < 0$; se r è pari la $f(x)$ ha massimo se $f^{(r)}(b) < 0$, minimo se $f^{(r)}(b) > 0$.

Massimi e minimi corrispondenti ai punti di discontinuità della derivata. In un punto $x = x_0$ la $f'(x)$ può saltare bruscamente da $+\infty$ a $-\infty$ (o viceversa); ciò avviene quando la retta $x = x_0$ è tangente ai due rami destro e sinistro della curva $y = f(x)$ che in $x = x_0$ ha una *cuspidè* (Cap. XLV, § 9). La funzione (supposto $f(x_0)$ finito) ha in $x = x_0$ un massimo se $f'(x)$ passa da $-\infty$ a $+\infty$, o un minimo se passa da $+\infty$ a $-\infty$. In un punto $x = x_1$ la $f'(x)$ può passare da un valore positivo ad un negativo (o viceversa), uno dei quali od entrambi finito; si riconosce pure che in $x = x_1$ c'è un massimo o un minimo se $f'(x)$ passa dal positivo al negativo o viceversa; in $x = x_1$ la curva $y = f(x)$ ha un *punto saliente*.

2. — Massimi e minimi per le funzioni di più variabili. Una funzione $f(x, y)$ ha in (x_0, y_0) un **massimo** se esiste un intorno determinato di (x_0, y_0) tale che se $(x_0 + h, y_0 + k)$ è un punto di questo intorno sia $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \leq 0$ ed ha un **minimo** se $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \geq 0$ (la eguaglianza non essendo sempre verificata).

Condizione necessaria (non sufficiente) per l'esistenza di un massimo o minimo è che i rapporti incrementali tanto rispetto a x quanto a y calcolati in (x_0, y_0) abbiano segni opposti per incrementi di segno opposti dati alle variabili, e $<$

in modulo di un conveniente numero; se in (x_0, y_0) esistono f'_x, f'_y è necessario (non sufficiente) siano nulle.

Si applichi lo sviluppo accorciato di Taylor (pag. 276) relativo a x_0, y_0 , se x_0, y_0 è una coppia di radici comuni delle equaz. $f'_x = 0, f'_y = 0$; se le derivate di ordine n sono le prime *non tutte* nulle in (x_0, y_0) si avrà $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$

$$= \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \right]_{x_0, y_0}^{(n)} + \frac{1}{n+1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \right]_{x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k}^{(n+1)} =$$

$$= \frac{\varrho^n}{n!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \right]_{x_0, y_0}^{(n)} + \frac{\varrho^{n+1}}{n+1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \right]_{x_0 + \vartheta \varrho \cos \alpha, y_0 + \vartheta \varrho \sin \alpha}^{(n+1)}$$

avendo posto $h = \varrho \cos \alpha, k = \varrho \sin \alpha$. L'espressione $\left[\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \right]_{x_0, y_0}^{(n)}$ è una forma P_n di n -esimo grado in $\cos \alpha, \sin \alpha$;

allora se P_n è **definita negativa** (pag. 188), in (x_0, y_0) v'ha minimo; se è **definita positiva** v'ha massimo; non v'ha nè massimo nè minimo se è **indefinita**; nulla si può dire se P_n è **semidefinita**. È condizione solamente necessaria per l'esistenza di un massimo o di un minimo che n sia pari, perchè per n dispari P_n è indefinita. Le considerazioni precedenti sono estendibili alla funz. di più variabili.

Casi particolari. Sia $n = 2$. Posto $f''_{xx} = A, f''_{xy} = B, f''_{yy} = C$, è $P_2 = A \cos^2 \alpha + 2 B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha$; si consideri l'Hessiano (pag. 191) della $f(x, y)$, cioè $A C - B^2$. Se $A \neq 0$ e $A C - B^2 < 0$ non c'è nè massimo, se $A C - B^2 = 0$ v'ha dubbio, se $A C - B^2 > 0$ v'ha minimo se $A > 0$ e massimo se $A < 0$. Se $A = 0$ e $C \neq 0$ valgono considerazioni analoghe; se $A = C = 0$ non v'ha nè massimo nè minimo.

Per la funz. $f(x, y, z)$ perchè ci sia massimo o minimo dev'essere

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} > 0,$$

calcolate nelle terne di valori che annullano insieme f'_x, f'_y, f'_z ; verificato ciò, v'ha massimo se $f''_{xx} < 0$, minimo se $f''_{xx} > 0$.

3. — **Massimi e minimi nelle funzioni implicite.** *a)* Siano date le m equaz. $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) atte a definire $y_1, y_2, \dots, y_m$ quali funzioni di $x_1, x_2, \dots, x_n$ e si vogliano i massimi e minimi di y_1 . Si determineranno le derivate di y_1 rispetto ad $x_1, x_2, \dots, x_n$ colla regola di derivazione delle funzioni implicite (Cap. XLI, § 3) e si eguagliano a zero per determinare i sistemi di valori per le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ pei quali ci può essere massimo o minimo. Il calcolo può condursi così: si differenzino le m equazioni $f_i = 0$ e si otterrà il sistema

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m} dy_m = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

lineare in $dy_1, dy_2, \dots, dy_m$.

Colla regola di Cramer si ottiene $dy_1 = -(X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n) : Y_1$ ove è $Y_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$

ed X_r è ottenuto da Y_1 sostituendo alla prima colonna gli elementi $\frac{\partial f_1}{\partial x_r}, \frac{\partial f_2}{\partial x_r}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_r}$. Le n equaz. $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 0$ insieme alle m equaz. $f_i = 0$ danno i valori delle n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ cercati e i valori che $y_1, y_2, \dots, y_m$ assumono per essi.

Casi particolari. Per trovare i massimi e i minimi della funz. y di x definita dall'equaz. $f(x, y) = 0$ si trovano le soluzioni comuni a $f(x, y) = 0, f'_x = 0$; se queste sono $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots$ fra $x_1, x_2 \dots$ vi sono i possibili punti di massimo e minimo e fra $y_1, y_2 \dots$ i massimi o i minimi stessi. Si ha il massimo y_i nel punto x_i se in (x_i, y_i) è $f'_x f''_{xx} > 0$, il minimo y_i in x_i se in (x_i, y_i) è $f''_x f''_{xx} < 0$.

Se $f(x, y, z) = 0$ definisce una funz. $z = z(x, y)$, i massimi ed i minimi z_i di questa e le coord. x_i, y_i dei punti ove sono assunti si trovano fra le terne di soluzioni x_i, y_i, z_i comuni alle 3 equaz. $f = 0, f'_x = 0, f'_y = 0$. Se il sistema $f(x, y, z) = 0$

$\varphi(x, y, z) = 0$ definisce y e z quali funzioni di x , i massimi o minimi di $y(x)$ e le ascisse in cui sono assunti si trovano fra le soluzioni x_i, y_i, z_i comuni alle 3 equaz. $f(x, y, z) = 0, \varphi(x, y, z) = 0, f'_x \varphi'_z - f'_z \varphi'_x = 0$; analogam. i massimi o minimi di $z(x)$ e le ascisse in cui sono assunti si trovano fra le soluzioni comuni alle 3 equaz. $f = 0, \varphi = 0, f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y = 0$.

b) Massimi e minimi di una funzione di più variabili legate da certe relazioni. Si vogliano i massimi e minimi della funz. (1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ quando fra $x_1, \dots, x_n$ passano m ($< n$) relazioni (2) $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$): se da queste equaz. $x_1, x_2, \dots, x_m$ restano definite in funzioni delle rimanenti $x_{m+1}, \dots, x_n$ si potrà considerare f funzione delle $n - m$ variabili indipendenti $x_{m+1}, \dots, x_n$. Le derivate rispetto a queste variabili, eguagliate a 0, danno insieme alle (2) i valori delle variabili $x_1, \dots, x_n$ per cui la f può assumere massimo o minimo. Le derivate da eguagliare a zero si ottengono derivando rapporto ad $x_{m+1}, \dots, x_n$ la (1) quale funz. composta e determinando le derivate delle $x_1 \dots x_m$ rapporto ad $x_{m+1}, \dots, x_n$ quali funz. implicite definite da (2). Il calcolo può condursi così: si eguagliano a 0 le derivate parziali della funz. $f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m$ ove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sono parametri, poi si eliminano i parametri, si ottengono $n - m$ equaz. che si associano alle (2). Le dette $n - m$ equaz. si ottengono eguagliando a 0 i determinanti ottenuti aggiungendo alle prime m colonne della matrice

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{array}$$

ciascuna delle successive, supposto $\neq 0$ il minore della matrice formato colle prime m linee ed m colonne.

Serie di funzioni - Serie di potenze - Sviluppi in serie delle funzioni - Funzioni trascendenti elementari

1. — **Convergenza semplice ed uniforme.** Se $u_1(x), u_2(x), \dots u_n(x), \dots$ sono infinite funzioni definite in $a \vdash b$, la serie $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ dicesi **convergente** in $x = x_0$ se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ è convergente (Cap. XXI, § 1). Se per tutti i punti di $a \vdash b$ la $\sum u_n(x)$ è convergente, dicesi che è convergente in $a \vdash b$; la sua somma è una funzione $S(x)$ definita in $a \vdash b$; si scrive $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Resto della serie dicesi $R_n(x) = \sum_{n+1}^{\infty} u_i(x)$. Sia la serie converg. in $a \vdash b$; prefissato un numero $\sigma > 0$, comunque piccolo, ad ogni x di $a \vdash b$ corrisponde un numero n_x per cui $|R_{n_x}(x)| < \sigma$. Se per gli x di $a \vdash b$ il limite superiore di n_x è un numero finito N , la serie dicesi **convergente uniformemente od in ugual grado od equiconvergente**: in questo caso per ogni $n > N$ e in tutto $a \vdash b$ è $|R_n(x)| < \sigma$; se il limite superiore degli n_x è infinito, la serie dicesi **semplicemente convergente**. Ad es. le serie $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x^n)x^n$ nell'intervallo $0 \vdash 1$ non sono convergenti uniformemente; lo sono in un intervallo $0 \vdash 1 - \varepsilon$. Se le funzioni $u_n(x)$ sono di variabile complessa definite in un campo C si dirà che $\sum u_n$ converge *uniformemente* se prefissato un numero $\sigma > 0$ piccolo a piacere, esiste un numero N tale che per ogni

$n > N$ e per qualunque punto x di C sia $|R_n(x)| < \sigma$. Se L_n rappresenta il limite superiore di $|u_n(x)|$ in $a \vdash b$ (o nel campo C se è di variabile complessa), e $\sum_1^{\infty} L_n$ è converg. $\sum_1^{\infty} u_n(x)$ è converg. uniformemente in $a \vdash b$.

2. — **Continuità, derivabilità e integrabilità delle serie di funzioni.** Condizione sufficiente, ma non necessaria, affinché una serie di funzioni continue in $a \vdash b$ sia ivi continua è che sia convergente uniformemente in $a \vdash b$. Se però le $u_n(x)$ sono tutte di un segno, la condizione è anche necessaria. Condizione sufficiente, ma non necessaria, acciò che una serie $S(x) = \sum u_n(x)$ di funzioni integrabili in $a \vdash b$ sia ivi integrabile è che la serie sia uniformemente converg. in quest'intervallo: in quest'ipotesi $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$, cioè l'integrale della serie è la serie degli integrali (**Teor. dell'integraz. per serie**). Se le u_i sono funzioni derivabili in $a \vdash b$, se $S(x) = \sum u_n(x)$ è converg. in $a \vdash b$ e la serie delle derivate $\sum u'_n(x)$ è ivi converg. uniformemente, $S'(x) = \sum u'_n(x)$ cioè la derivata della serie è la serie delle derivate. La uniforme convergenza di $\sum u'_n(x)$ non è però condizione necessaria.

Se $\sum |u_n(x)|$ è funzione continua in $a \vdash b$, ivi è convergente uniformemente.

3. — **Serie di potenze.** a) Una serie ordinata per le potenze intere positive di una variabile x dicesi **serie di potenze**:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \text{ È data una}$$

serie quando è data la successione $a_0, a_1, a_2 \dots a_n \dots$ dei suoi coefficienti. Ogni serie di potenze è convergente per $x = 0$. Supporremo i coefficienti a_i reali e la variabile x reale. Se a e k sono > 0 e per ogni $n >$ di un numero m è $|a_n| \alpha^n < k$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente per $|x| < a$ ed è converg. uniformemente nell'intervallo $-a \vdash a$, esclusi, al più, gli estremi. Se per $x = x'$ la $\sum a_n x^n$ è convergente o anche solo

il suo termine generale è limitato, è converg. assolutamente per ogni $|x| < |x'|$; e se per $x = |x'|$ la serie non converge o converge non assolutamente, non converge se $|x| > |x'|$.

L'intervallo di convergenza per una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è un intervallo (che esiste per ogni serie, ma può ridursi a un punto); $-|x_1| \vdash |x_1|$ tale che se si prende un punto interno ivi la serie è converg. e se si prende un punto esterno è divergente. L'intervallo detto può estendersi anche da $-\infty$ a $+\infty$, cioè la serie può convergere per qualunque valore reale di x . In ogni intervallo interno a quello di convergenza, una serie di potenze converge in ugual grado.

Teor. di Cauchy-Hadamard. Per una serie $\sum a_n x^n$, l'intervallo di convergenza è $-a \vdash a$, se $1:a$ è il massimo fra i punti limiti della successione

$$|a_1|, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \sqrt[4]{|a_4|}, \dots, \sqrt[n]{|a_n|}, \dots$$

Se $S(x)$ è la somma di una serie di potenze $\sum a_n x^n$ avente l'intervallo di convergenza $-a \vdash a$, in ogni punto x interno $S(x)$ è funzione continua, ammette derivata di ogni ordine che è la serie delle derivate dei termini di $\sum a_n x^n$, la quale ha per intervallo di convergenza lo stesso $-a \vdash a$; infine è integrabile e l'integrale è la serie degli integrali dei singoli termini.

Teor. di Abel. Se in un estremo dell'intervallo di convergenza la serie converge ed ha per somma l , la funzione rappresentata dalla serie tende ad l al tendere di x all'estremo considerato.

Se l'intervallo di convergenza non è nullo e $a_0 \neq 0$, esiste sempre un intorno dell'origine ove la serie non si annulla.

Se 2 serie $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ assumono valori determinati uguali nei punti di un gruppo che ha per punto limite $x = 0$, coincidono termine a termine.

Serie dedotte. Se $\sum a_n x^n$ ha $-a \vdash a$ per intervallo di convergenza e x_0 è un punto dell'intervallo, posto $f(x) =$

$$= \sum_0^{\infty} a_n x^n, f'(x) = \sum_1^{\infty} n a_n x^{n-1}, f''(x) = \sum_2^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \dots$$

la $f(x)$ è rappresentata anche dalla serie $f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$ quando x è un punto del tratto $x_0 - (a - |x_0|) \vdash x_0 + (a - |x_0|)$. Quest'ultima serie si dice dedotta da $\sum a_n x^n$; il suo intervallo di convergenza può anche estendersi al di fuori dell'intervallo $-a \vdash a$; in questo caso si dice che dà la **continuazione analitica** della serie iniziale. Se 2 serie $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ hanno valori uguali nei punti di un gruppo infinito contenuto in un tratto comune ai loro intervalli di convergenza, esse coincidono termine a termine. Se si hanno 2 serie dedotta l'una dall'altra rispetto ad un punto x_0 e si deducono poi da ciascuna di esse altre due serie rispetto ad uno stesso punto x_1 , interno ai due intervalli di convergenza, queste coincidono.

b) Serie di potenze di variabile complessa. Data la serie $\sum_0^{\infty} a_n x^n$, se r e k sono due numeri > 0 e per ogni $n > di un certo m è $|a_n| r^n < k$ la serie converge assolutamente per ogni x di modulo $< r$; se per qualche n arbitrariamente grande $|a_n| r^n > k$, la serie non converge per ogni x di modulo $\geq r$. Se $\sum a_n x_1^n$ è converg. anche semplicemente o anche solo se il suo termine generale è limitato, la $\sum a_n x^n$ è converg. assolutamente per ogni $|x| < |x_1|$.$

Cerchio di convergenza di $\sum a_n x^n$ è un cerchio di centro l'origine e raggio r (che può anche essere nullo o infinito) tale che pei punti *interni* la serie è *convergente* e pei punti *esterni* è *divergente*; in generale, nulla si può dire dei punti sulla circonferenza. Il cerchio di convergenza si indica con $(0 | r)$; r dicesi **raggio** di convergenza. La serie $\sum n! x^n$ ha raggio di convergenza nullo, $\sum (x^n : n!)$ ha raggio di convergenza infinito, $\sum x^n$ ha raggio di convergenza $= 1$.

Teor. di Hadamard-Cauchy. Se ρ è il massimo dei punti limiti della successione $|a_1|, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \dots, \sqrt[n]{|a_n|}, \dots$ il raggio di convergenza di $\sum a_n x^n$ è $1:\rho$.

Se $S(x)$ è la somma di $\sum a_n x^n$ che ha il cerchio di convergenza $(0 | r)$, in ogni punto x interno a $(0 | r)$, $S(x)$ è funz. continua, ammette derivata di ogni ordine il cui cerchio di convergenza è sempre $(0 | r)$ ed il suo integrale è la serie degli integrali degli addendi.

Se il raggio di convergenza non è nullo e $|a_0| \neq 0$, esiste sempre un intorno dell'origine in cui la $\sum a_n x^n$ non si annulla.

Se $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ prendono valori determinati uguali in un gruppo di punti aventi l'origine per punto limite, coincidono termine a termine.

Serie dedotte. Se $\sum a_n x^n$ ha $(0 | r)$ per cerchio di convergenza ed x_0 è un punto di questo cerchio, posto $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$,

$$f'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}, f''(x) = \sum_2^\infty n(n-1) a_{n-2} x^{n-2}, \dots \text{ la } f(x)$$

è rappresentata anche dalla serie $f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$ quando x è

tale che $|x-x_0| < r - |x_0|$, cioè per x interno al cerchio di centro x_0 e raggio $r - |x_0|$ (che si indica con $(x_0 | r - |x_0|)$). Questa serie si dice **dedotta** da $\sum a_n x^n$ relativamente al punto x_0 ; il suo cerchio di convergenza potrebbe essere maggiore; in questo caso si dice che per i punti esterni a $(0 | r)$ dà la **continuazione analitica** della serie iniziale.

Se $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ hanno valori uguali nei punti di un gruppo infinito contenuto in un'area comune ai loro cerchi di convergenza coincidono termine a termine. Se si hanno 2 serie dedotte l'una dall'altra rispetto ad un punto x_0 e si deducono poi altre 2 serie rispetto ad uno stesso punto x_1 , interno ai 2 cerchi di convergenza, queste coincidono.

4. — **Sviluppo di una funzione di una variabile in serie di Taylor e di Mac-Laurin.** Al Cap. XLII, § 2 è stato indicato sotto quali condizioni vale per $f(x)$ lo sviluppo accorciato di Taylor. Supposto che esso sia valido per qualunque n , se il limite per $n = \infty$ del resto (o termine complementare) R_n è lo zero, vale per $f(x)$ lo sviluppo in serie $f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$ detto **sviluppo in serie di Taylor**. Cambiando h in $x - x_0$ si ha $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$ e se nell'intorno in cui il termine complementare tende a 0 è compreso $x = 0$, si può fare $x_0 = 0$ ed avere $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$; questi ultimi 2 sviluppi diconsi **sviluppi in serie di Mac-Laurin**. La serie (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$ può convergere senza rappresentare $f(x_0 + h)$; ciò accade se il limite per $n = \infty$ del termine complementare è $\neq 0$. Se il termine complementare non ha limite la (3) è indeterminata.

Se nell'intervallo $x_0 \pm h$ qualunque sia n , è $|f^{(n)}(x)| < A$ od anche $|f^{(n)}(x)| < A^n$ per $f(x)$ vale lo sviluppo $f(x_0 + h) = \sum_0^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$. Per gli sviluppi di Taylor e di Mac-Laurin sono applicabili i teoremi generali validi per le serie di potenze, in particolare se $f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$ è $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1!} f^{(n)}(0)$, $\int_0^x f(x) dx = \sum_0^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1!} f^{(n)}(0)$.

5. — **Trascendenti elementari uniformi.** a) **Funzione esponenziale** è definita dalla serie $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, convergente per ogni x finito (nel piano complesso per ogni x di modulo finito). Soddisfa all'equaz. funzionale $E(x + y) = E(x) E(y)$.

La $E(x)$ non si annulla per nessun valore reale di x è sempre positiva e crescente; $\lim_{x=-\infty} E(x) = 0$. Indicando con e la

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,7182818284590452353602874 \dots \text{ (Cap. XX, § 6)}$$

per ogni x reale si dimostra essere $e^x = E(x)$. Per x complesso si assume come definizione $e^x = E(x)$. La e^x ammette come **periodo** $2\pi i$, cioè $e^{x+2\pi i} = e^x$. Sussistono le relazioni $e^{\pm(\pi i:2)} = \pm i$; $e^{\pm \pi i} = -1$.

b) Funzioni circolari. Di $\sin x$, $\cos x$ valgono gli sviluppi di Mac-Laurin: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots; \text{ convergenti per qualunque}$$

x reale o complesso di modulo finito. Le radici di $\sin x$ sono i soli numeri reali $k\pi$, quelle di $\cos x$ i soli numeri reali $(2k+1)\pi:2$, con k intero positivo, nullo o negativo. Sussistono le relazioni $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$,

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \cos x, \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \sin x,$$

$\sin(x \pm \pi) = -\sin x$, $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ (cioè 2π è il **periodo**), $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$; $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin(x:2) = \pm \sqrt{(1 - \cos x):2}$, $\cos(x:2) = \pm \sqrt{(1 + \cos x):2}$; le espressioni di $\sin mx$, $\cos mx$ per mezzo di $\sin x$, $\cos x$ sono date a pag. 141.

Formula di Eulero: $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$; si deduce $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix}) : 2i$; $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix}) : 2$.

c) Funzioni iperboliche. Le serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!}$

sono convergenti per qualunque x reale finito (nel piano complesso per ogni x di modulo finito): la prima si dice **coseno iperbolico** di x e si denota con $\cosh x$, la seconda **seno iperbolico** e si denota con $\sinh x$; sono periodiche di periodo $2\pi i$.

Sussistono le relazioni $\cosh(-x) = \cosh x$; $\sinh(-x) = -\sinh x$; $e^x = \cosh x + \sinh x$; $\sinh x = (e^x - e^{-x}):2$; $\cosh x = (e^x + e^{-x}):2$; $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$; $D^{(2n)} \cosh x = \cosh x$ $D^{(2n+1)} \cosh x = \sinh x$; $D^{(2n)} \sinh x = \sinh x$, $D^{(2n+1)} \sinh x = \cosh x$; $\cosh ix = \cos x$; $\sinh ix = i \sin x$; $\cosh x = \cos ix$, $i \sinh x = \sin ix$; $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$; $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$.

Le funzioni e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ diconsi **uniformi** perchè suscettibili di un solo valore determinato per ogni valore reale o complesso della variabile.

6. — **Altri sviluppi in serie.** a) **Serie binomiale:** Se m è un qualunque numero reale ed $|x| < 1$ si ha lo sviluppo $(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{n}x^n + \dots$ che dicesi **serie binomiale**. Se $m > 0$, è converg. assolutamente anche in $x = \pm 1$; se $-1 < m < 0$, è converg. semplicemente per $x = 1$; in tutti gli altri casi la serie diverge.

b) **Funzioni circolari inverse.** Integrando lo sviluppo in serie di $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ che è $1 + \sum_1^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} x^{2n}$ si ha $\text{arc sen } x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ indicando con $k!!$ il prodotto degli interi inferiori a k e della stessa parità. (Es. $7!! = 1.3.5.7$). Per $x = 1$ si ha $\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{1}{2n+1}$. Integrando lo sviluppo di $\frac{1}{1+x^2}$ che è $\sum_0^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ si ha $\text{arc tg } x = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ e per $x = 1$, $\pi = 4 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 3,141592653589793238462643383279\dots$

Numeri Bernoulliani sono i coefficienti B_n nello sviluppo $\frac{x e^x}{e^x - 1} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} x^{2n}}{2n!}$. I primi 18 numeri Bernoulliani sono $B_2 = \frac{1}{6}$; $B_4 = \frac{1}{30}$; $B_6 = \frac{1}{42}$; $B_8 =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{30}; B_{10} = \frac{5}{66}; B_{12} = \frac{691}{2730}; B_{14} = \frac{7}{6}; B_{16} = \frac{3617}{510}; B_{18} = \\
&= \frac{43867}{798}; B_{20} = \frac{174611}{330}; B_{22} = \frac{854513}{138}; B_{24} = \frac{236364091}{2730}; \\
&B_{26} = \frac{8553103}{6}; B_{28} = \frac{23749461029}{870}; B_{30} = \frac{8615841276005}{14322}; \\
&B_{32} = \frac{7709321041217}{510}; B_{34} = \frac{2577687858367}{6}; \\
&B_{36} = \frac{26315271553053477373}{1919190}. \text{ Vedi al Cap. XVI, § 4 il cal-}
\end{aligned}$$

colo di B_{2m} mediante un determinante.

c) **Sviluppo di** $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x : \cos x$ è $x + \frac{1}{3} x^3 +$
 $+ \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \frac{1382}{155925} x^{11} + \dots =$
 $= \sum_1^{\infty} \frac{2^{2m} (2^{2m} - 1)}{2m(2m-1)!} B_{2m} x^{2m-1}$ (ove B_{2m} è l' m -esimo dei nu-
 meri Bernoulliani dianzi definiti) valido per $|x| < \pi$.

d) **Sviluppo di** $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}$ è $-\frac{1}{3} x -$
 $-\frac{1}{45} x^3 - \frac{2}{945} x^5 - \frac{1}{4725} x^7 - \frac{2}{93555} x^9 - \dots =$
 $= -\sum_1^{\infty} \frac{2^{2m}}{2m!} B_{2m} x^{2m-1}$ valido per $-\pi < x < +\pi$.

e) **Sviluppo di** $\sec x = 1 : \cos x$ valido per $|x| < \pi : 2$ è
 $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \dots = 1 + \sum_1^{\infty} E_{2m} \frac{x^{2m}}{2m!}$ ove i coeffi-
 cienti E_{2m} sono i **numeri Euleriani**, di cui i primi 14 sono:
 $E_2 = 1; E_4 = 5; E_6 = 61; E_8 = 1385; E_{10} = 50521;$
 $E_{12} = 2702765; E_{14} = 199360981; E_{16} = 19391512145;$
 $E_{18} = 2404879675441; E_{20} = 370371188237525;$
 $E_{22} = 69348874393137901; E_{24} = 15514534163557086905;$
 $E_{26} = 4087072509293123892361;$
 $E_{28} = 1252259641403629865468285;$

Pel calcolo di E_{2m} mediante un determinante vedi Capi-
 tolo XVI, § 4.

f) **Sviluppo di cosec x** — $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ valido per $-\pi < x < \pi$ è $\sum_0^{\infty} \frac{2(2^{2m+1} - 1)}{2^{m+2}!} B_{2m+2} x^{2m+1}$, ove i B sono i numeri Bernoulliani (vedi sopra).

g) **Sviluppo di $\log \sin x$** valido per $|x| < \pi$ è $\log x - \sum_1^{\infty} \frac{2^{2m-1}}{m} \cdot \frac{B_{2m}}{2^{m+1}!} x^{2m}$.

h) **Sviluppo di $\log(x + \sqrt{1+x^2})$** è $x + \sum_1^{\infty} (-1)^{2+1} \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (il' significato di $k!!$ è dato a pag. 292 linea 19) valido per $|x| < 1$.

i) **Sviluppo di $e^{ax} \cos bx$** è $\sum_0^{\infty} \frac{(r \cos \varphi)^n}{n!} x^n$ ove $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$.

l) **Integralseno** dicesi la funzione $\int \frac{\sin x}{x} dx = \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \text{costante}$, serie convergente in qualunque intervallo finito.

m) **Integralseno** dicesi la funzione $\int \frac{\cos x}{x} dx = \log x + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n \cdot 2^{n+1}!} + \text{cost}$, serie convergente in qualunque intervallo non contenente $x = 0$.

n) **Sviluppo in serie** di $\int \frac{e^x}{x} dx$ è $\log x + \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}$.

7. — **Logaritmi.** L'equaz. $a^x = c$ (con $a \neq 1$) dicesi **equaz. esponenziale**; ogni sua soluzione dicesi **logaritmo di base a del numero c** ; si rappresenta con $\log_a c$. Se la base è il numero e definito al § 5, a), il logaritmo dicesi **naturale**; si rappresenta con $\log c$.

a) **Nel campo reale**, supposto $a > 0$ esiste per $c > 0$ un solo logaritmo reale, che è positivo se a e c sono entrambi maggiori o minori di 1, negativo nel caso contrario; fra il logaritmo

naturale e quello di base a di un numero positivo c passa la relazione $\log_a c = \frac{\log c}{\log a}$; fra il logaritmo di base a e quello di base b di uno stesso numero c , passa la relazione $\log_a c : \log_b c = \log b : \log a$. **Modulo** del sistema di logaritmi di base a è il numero $1 : \log a$ per cui bisogna moltiplicare il logaritmo naturale per avere il logaritmo di base a .

Logaritmo volgare è il logaritmo reale di base 10; si denota con Log ; il modulo dei logaritmi volgari è $1 : \log 10 = \text{Log } e = 0, 43427448\dots$. Dai logaritmi volgari si passa ai naturali moltiplicando per $\log 10 = 1 : \text{Log } e = 2, 30258509\dots$

b) Logaritmi complessi. Se a è un numero reale o complesso, $a = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, l'equaz. $e^x = a$ ammette le infinite soluzioni $x = \log \rho + i(\vartheta + 2k\pi)$ ove $\log \rho$ è il logaritmo reale di ρ . Nel campo complesso infiniti dunque sono i valori di $\log a$, tutti aventi la stessa parte reale e le parti immaginarie diverse per multipli di $2\pi i$.

Serie logaritmica. Per $-1 < x \leq 1$, $\log(1+x) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$; per $0 < x \leq 2$, $\log x = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n}$; $\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ per $-1 < x \leq 1$; $\log(a+z) = \log a + 2 \sum_0^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{z}{2a+z} \right)^{2n+1}$ per $|z| < |2a+z|$.

8. — Sviluppo in serie delle funzioni razionali fratte.

a) Per la funzione $\frac{a}{x-a}$ vale lo sviluppo in serie $-a \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{a^{\nu+1}}$ per $|x| < |a|$ o lo sviluppo $a \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^{\nu}}{x^{\nu+1}}$ per $|x| > |a|$. Per la funzione $\frac{a}{(x-a)^r}$ vale lo sviluppo in serie $(-1)^r a \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{r+\nu-1}{\nu} \frac{x^{\nu}}{a^{r+\nu}}$ se $|x| < |a|$ o lo sviluppo $a \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{r+\nu-1}{\nu} \frac{a^{\nu}}{x^{r+\nu}}$ se $|x| > |a|$.

b) Sia $R(x) = g(x) : f(x)$ con $g(x)$ di grado inferiore a quello di $f(x)$. Posto $f(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_k)^{r_k}$ ove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sono le radici, $r_1, r_2, \dots$ gli ordini rispettivi di molteplicità (Cap. XXV, § 2), $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{(x - \alpha_1)^{r_1}} \cdot \frac{1}{(x - \alpha_2)^{r_2}} \dots$
 $\dots \frac{1}{(x - \alpha_k)^{r_k}}$ e poichè i singoli fattori $\frac{1}{(x - \alpha_i)^{r_i}}$ sono svilup-

pabili in serie di potenze di $\frac{1}{x}$ convergenti assolutamente per $|x| >$ del massimo fra i moduli $| \alpha_1 |, | \alpha_2 |, \dots | \alpha_k |$, sarà $1 : f(x)$ sviluppabile secondo la serie che si ottiene moltiplicando $1 : a_0$ per il prodotto delle serie (Cap. XXI, § 5) a cui sono uguali i singoli fattori. Moltiplicando questo sviluppo per $g(x)$ si ha lo sviluppo in serie di $R(x)$. Se indichiamo questo sviluppo con $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{x^{i+1}}$, posto $g(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}$, $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, i coefficienti c_i sono dati, i primi dal sistema $a_0 c_0 = b_0$, $a_0 c_1 - a_1 c_0 = b_1$, $\dots$, $a_0 c_{n-1} - a_1 c_{n-2} + a_2 c_{n-1} + \dots + a_{n-1} c_0 = b_{n-1}$ e gli altri dall'equazione ricorrente $a_0 c_{\nu+n} + c_1 c_{\nu+n-1} + a_2 c_{\nu+n-2} + \dots + a_n c_{\nu} = 0$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$).

Si può sviluppare ancora $R(x)$ secondo una serie di potenze di x , assolutamente convergente per $|x| <$ del minimo fra i moduli $| \alpha_1 |, | \alpha_2 |, \dots | \alpha_k |$. Indicando questo sviluppo con $\sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i$ i coefficienti g sono dati, i primi n dal sistema $a_n g_0 = b_{n-1}$, $a_{n-1} g_0 + a_n g_1 = b_{n-2}$, $\dots$, $a_1 g_0 + a_2 g_1 + \dots + a_n g_{n-1} = b_0$ e gli altri dall'equazione ricorrente $a_0 g_{\nu-n} + a_1 g_{\nu-n+1} + \dots + a_n g_{\nu} = 0$ ($\nu = n, n+1, \dots$).

9. — **Integrali ellittici** (Cap. XXXVIII, § 6). Si rappresenta con $F(k, \varphi)$ l'integrale ellittico di 1^a specie $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$, con $E(k, \varphi)$ l'integrale di 2^a specie $\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$. Allora si ha $F(k, \varphi) = \varphi + \sum_1^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} k^{2n} \int_0^{\varphi} \sin^{2n} \varphi d\varphi$; $E(k, \varphi) =$

$$= \varphi - \frac{k^2}{2} \int_0^\varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi - \sum_2^\infty \frac{(2n-3)!!}{2n!!} k^{2n} \int_0^\varphi \sin^{2n} \varphi \, d\varphi; \text{ pel}$$

calcolo degli integrali che qui compaiono, vedi Cap. XXXVIII, § 7 f; pel significato di $h!!$ vedi pag. 292 linea 19.

Integrali ellittici completi sono quelli che corrispondono all'amplitudine $\varphi = \pi : 2$. In luogo $F \left(k, \frac{\pi}{2} \right)$, $E \left(k, \frac{\pi}{2} \right)$ usasi scrivere $F(k)$, $E(k)$. Allora si ha

$$F(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_1^\infty \left(\frac{(2n-1)!!}{2n!!} k^n \right)^2 \right\},$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_1^\infty \frac{1}{2n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{2n!!} k^n \right)^2 \right\}.$$

Si hanno tavole dette **tavole ellittiche** che permettono il calcolo degli integrali ellittici; notiamo gli 8 valori degli integrali completi

$$F \left(\frac{1}{3} \right) = 1,617\dots; E \left(\frac{1}{3} \right) = 1,526\dots;$$

$$F \left(\frac{1}{2} \right) = 1,685\dots; E \left(\frac{1}{2} \right) = 1,467\dots; F \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= 1,854\dots; E \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1,350\dots; F \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2,156\dots;$$

$$E \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1,211\dots$$

Trasformazione di Landen. Le serie indicate sopra sono poco convergenti se k non è piccolo: si ottiene di trasformare $F(k)$, $E(k)$ in analoghi, relativi ad un valore piccolo del modulo, mediante le formule di Landen: $F(k) = (1 + \mu) F(\mu)$; $E(k) = \frac{2}{1 + \mu} E(\mu) - (1 - \mu) F(\mu)$ ove μ è definito da $k = 2 \sqrt{\mu} : (1 + \mu)$.

Funzioni ellittiche. Se si pone $u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$, φ può considerarsi funz. di u ; dicesi **amplitudine** di u ; $\varphi = \text{am } u$. Allora $x = \sin \text{am } u = \text{sn } u$, $\sqrt{1 - x^2} = \cos \text{am } u = \text{cn } u$, $\sqrt{1 - k^2 x^2} = \Delta \text{am } u = \text{dn } u$. Le funzioni $\text{sn } u$ (seno amplitu-

dine), $\text{cn } u$ (coseno amplitudine), $\text{dn } u$ (delta amplitudine) diconsi **funzioni ellittiche**. Fra esse passano le relazioni: $\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1$, $k^2 \text{sn}^2 u + \text{dn}^2 u = 1$, $\text{dn}^2 u - k^2 \text{cn}^2 u = 1 - k^2 = k'^2$ (ove k' è detto **modulo complementare**). Si ha poi $\frac{d \text{sn } u}{d u} = \text{cn } u \text{ dn } u$, $\frac{d \text{cn } u}{d u} = -\text{sn } u \text{ dn } u$, $\frac{d \text{dn } u}{d u} = -k^2 \text{sn } u \text{ cn } u$.

10. — **Serie di funzioni di più variabili**. Se si hanno infinite funzioni di 2 variabili x, y in un campo C , $u_1(x, y)$, $u_2(x, y), \dots u_n(x, y), \dots$ la serie $\sum_1^{\infty} u_n(x, y)$ è convergente in un punto (x_0, y_0) quando converge la serie numerica $\sum u_n(x_0, y_0)$: se converge in ogni punto di C si dice che converge in C : allora per ogni punto (x, y) esiste una somma $S(x, y)$ che è funzione di x, y in C .

Se, prefissato un numero positivo σ piccolo a piacere, esiste un numero finito N tale che per ogni $n > N$ e per *qualsiasi* punto di C sia $|R_n(x, y)| < \sigma$, si dice che $\sum u_n(x, y)$ è **convergente uniformemente** in C . In quest'ipotesi se le $u_n(x, y)$, sono continue in C , anche $\sum u_n(x, y)$ è continua in C ; l'integrale di $S(x, y)$ nel campo C è la serie degli integrali estesi allo stesso campo delle funzioni $u_n(x, y)$, se queste sono ivi atte all'integrazione. Se poi, essendo converg. $\sum u_n$, le serie $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\sum \frac{\partial u_n}{\partial y}$ sono converg. uniformemente, esse rappresentano le derivate parziali della serie.

Serie di Taylor e di Mac-Laurin per le funz. di più variabili. Se $f(x, y)$ è continua in un certo intorno di (x_0, y_0) ed ivi esistono continue le derivate parziali di tutti gli ordini, e di più la quantità $R_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \right\}_{x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k}^{(n)}$, detto **resto** della serie (pag. 277) tende a 0 al tendere di n all' ∞ , vale lo sviluppo in serie di Taylor: $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \right)_{x_0, y_0} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \right)_{x_0, y_0}^{(2)} +$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \right)_{x_0, y_0}^{(n)} + \dots \text{ Se si pone } x_0 + h = \\
& = x, y_0 + k = y, \text{ si ha } f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left\{ (x - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} + \right. \\
& \quad \left. + (y - y_0) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ (x - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} + \right. \\
& \quad \left. + (y - y_0) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} \right\}^{(2)} + \dots + \frac{1}{n!} \left\{ (x - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} + \right. \\
& \quad \left. + (y - y_0) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} \right\}^{(n)} + \dots \text{ e se nell'intorno detto } \nabla' \text{ ha il} \\
& \text{punto } (0, 0) \text{ è } f(x, y) = f(0, 0) + \left\{ x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{0, 0} + y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{0, 0} \right\} + \\
& + \frac{1}{2!} \left\{ x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{0, 0} + y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{0, 0} \right\}^{(2)} + \dots + \frac{1}{n!} \left\{ x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{0, 0} + \right. \\
& \quad \left. + y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{0, 0} \right\}^{(n)} + \dots
\end{aligned}$$

CAPITOLO XLV.

Applicazioni del Calcolo alle linee piane

1. — **Area** di una porzione di superficie piana limitata da una linea chiusa L è il limite, se esiste, dell'area racchiusa da un poligono inscritto in L , al tendere a 0 del massimo lato. Se una porzione di superficie è limitata da una linea chiusa L e da un'altra linea chiusa L_1 tutta interna ad L (o avente qualche punto in comune con L) la sua area è la differenza fra le aree delle 2 porzioni di superficie limitate rispettivamente da L e da L_1 .

Quadrabile dicesi una porzione di superficie se ha area.

Calcolo delle aree. a) Se in $a \mapsto b$ la $f(x)$ è sempre di un segno, l'area racchiusa dall'arco di curva $y = f(x)$ dall'asse x e dalle ordinate in $x = a$, $x = b$ è data in valore assoluto da $|\int_a^b f(x) dx|$. Se $f(x)$ cambia di segno in $a \mapsto b$ per avere l'area in valore assoluto racchiusa dalla linea dall'asse x e dalle dette ordinate si calcolerà l'integrale di $f(x)$ esteso alle varie parti di $a \mapsto b$ in cui c'è costanza di segno e si sommeranno gli integrali positivi coi contrari dei negativi; altrimenti $\int_a^b f(x) dx$ rappresenta la differenza fra le aree che stanno da bande opposte dell'asse x .

Se il pezzo di superficie C di cui si vuole l'area è limitato da 2 archi appartenenti alle curve $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$ e proiettantisi sull'asse x in $a \mapsto b$, oppure dai 2 archi detti e dalle rette $x = a$, $x = b$, l'area è $\int_a^b \{ \beta(x) - \alpha(x) \} dx$. La stessa area può essere calcolata con una doppia integrazione, integrando la funzione $z = 1$ nel campo C : cioè $\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy$.

b) L'area racchiusa da un arco di curva di equaz. polare $\varrho = \varrho(\omega)$ i cui estremi hanno le anomalie ω_0 , ω_1 e dai raggi vettori agli estremi è $\frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \varrho^2(\omega) d\omega$; se il pezzo di superficie C di cui si calcola l'area è limitata da 2 archi appartenenti alle curve $\varrho = \alpha(\omega)$, $\varrho = \beta(\omega)$ per ω variabile in $\omega_0 \mapsto \omega_1$ oppure dai detti 2 archi e dalle rette $\omega = \omega_0$, $\omega = \omega_1$, l'area è $\frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \{ \alpha(\omega)^2 - \beta(\omega)^2 \} d\omega$; l'area di C si ottiene anche mediante l'integrazione doppia $\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\alpha(\omega)}^{\beta(\omega)} \varrho d\varrho$.

c) L'area racchiusa da un arco appartenente alla curva di equaz. parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ i cui estremi corrispondono ai valori t_0 , t_1 di t e dai raggi che dall'origine vanno a codesti estremi è data da $\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{ x(t)y'(t) - y(t)x'(t) \} dt$.
Se la curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ è chiusa ed è $x(t_0) = x(t_1)$,

$y(t_0) = y(t_1)$, l'area racchiusa dalla curva è data dall'integrale precedente.

2. — Quadrature approssimate. a) Metodo dei trapezi.

Dato da un arco della curva $y = f(x)$ i cui estremi abbiano le ascisse a e b , si inscriba una poligonale di n lati in guisa che le proiezioni sull'asse x siano uguali tra loro e quindi a $(b - a) : n$. L'area racchiusa dalla poligonale, dall'asse x e dalle ordinate

in $x = a$ $x = b$, è data da $\frac{b-a}{2n} \{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n\}$,

avendo posto $y_i = f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$: questa è una valutazione approssimata dell'area $\int_a^b f(x) dx$.

b) **Formula di Simpson.** Se $f(x)$ è razionale intera di grado non superiore al 3^0 , si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

e codesta formula si assume per la valutazione approssimata di $\int_a^b f(x) dx$ se $f(x)$ è di grado superiore al 3^0 , o non razionale intera.

Dividendo l'intervallo $a \rightarrow b$ in $2n$ parti uguali e dette $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ le ordinate negli estremi nei punti di divisione, si ha la formula d'approssimazione nota sotto il nome di *formula di Simpson*

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} \{y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})\}.$$

c) **Formula di Cotes.** Se $f(x)$ è razionale intera di grado non superiore ad $n+1$, data nell'intervallo $a \rightarrow b$, si ha

$$\text{esattamente } \int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n h_n^{(i)} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

$$\text{ove } h_n^{(i)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot i! (n-i)!} \int_0^n (t-1)(t-2)\dots(t-i+1) \times \\ \times (t-i-1)\dots(t-n) dt.$$

Questa formula si assume come formula d'approssimazione per le funzioni che non siano razionali intere di grado non superiore a $n + 1$.

I numeri h soddisfano alla relazione $h_n^{(i)} = h_n^{(n-i)}$. Ecco una tabella di valori h : $h_1^{(0)} = \frac{1}{2}$; $h_2^{(0)} = \frac{1}{6}$, $h_2^{(1)} = \frac{2}{3}$;

$$h_3^{(0)} = \frac{1}{3}, h_3^{(1)} = \frac{3}{8}; h_4^{(0)} = \frac{7}{90}, h_4^{(1)} = \frac{16}{45}, h_4^{(2)} = \frac{2}{15};$$

$$h_5^{(0)} = \frac{19}{288}, h_5^{(1)} = \frac{95}{96}, h_5^{(2)} = \frac{25}{144}; h_6^{(0)} = \frac{41}{840}, h_6^{(1)} = \frac{9}{35}, h_6^{(2)} = \frac{9}{280}, h_6^{(3)} = \frac{34}{105}; h_7^{(0)} = \frac{751}{17280}, h_7^{(1)} = \frac{3577}{17280},$$

$$h_7^{(2)} = \frac{49}{640}, h_7^{(3)} = \frac{2089}{17280}; h_8^{(0)} = \frac{989}{28350}, h_8^{(1)} = \frac{2944}{14175},$$

$$h_8^{(2)} = \frac{-464}{14175}, h_8^{(3)} = \frac{5248}{14175}, h_8^{(4)} = \frac{-454}{2835}; h_9^{(0)} = \frac{2857}{89600},$$

$$h_9^{(1)} = \frac{15741}{89600}, h_9^{(2)} = \frac{27}{2240}, h_9^{(3)} = \frac{1209}{5600}, h_9^{(4)} = \frac{2889}{44800};$$

$$h_{10}^{(0)} = \frac{16067}{598752}, h_{10}^{(1)} = \frac{26575}{149688}, h_{10}^{(2)} = \frac{-16175}{199584}, h_{10}^{(3)} = \frac{5675}{12474},$$

$$h_{10}^{(4)} = \frac{-4825}{11088}, h_{10}^{(5)} = \frac{17807}{24948}.$$

3. — Aree di alcune curve. Pel circolo $x^2 + y^2 - r^2 = 0$,

$$\int_0^x \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2}; \text{ area totale } \pi r^2.$$

Per l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $\frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dx =$
 $= \frac{a b}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{b x}{2 a} \sqrt{a^2 - x^2}; \text{ area totale } \pi a b.$

Per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $\frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{x^2 - a^2} dx =$
 $= \frac{b x}{2 a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a b}{2} \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$

Per la parabola $y^2 = 2 p x$, $\int_0^x \sqrt{2 p x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{2 p x}.$

L'area compresa da un arco di **cicloide** (pag. 41) (*) fra due cuspidi e la corda (asse x) è

$$\frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} \{ 2(1 - \cos \vartheta) - \vartheta \sin \vartheta \} d\vartheta = 3 \pi r^2.$$

L'area completa della **cardioide** (pag. 42) è

$$2 a^2 \int_0^\pi (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = 6 \pi a^2.$$

L'area completa dell'**asteroide** (pag. 42)

$$4 \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} dx = 12 a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^4 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

Per la **concoide di Nicomede** $\varrho = k + \frac{a}{\cos \varphi}$ (pag. 42) l'area racchiusa dalla curva e dai raggi vettori corrispondenti ad angoli $\varphi = 0$, $\varphi = \omega < \frac{\pi}{2}$ è $\frac{1}{2} \int_0^\omega \left(k^2 + \frac{2 k a}{\cos \varphi} + \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi =$
 $= \frac{1}{2} k^2 \omega - k a \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2} \right) + \frac{a^2}{2} \operatorname{tg} \omega.$

La **lumaca di Pascal** (pag. 43) ha l'area

$$\int_0^\pi (k^2 + 4 b^2 \cos^2 \varphi + 4 b k \cos \varphi) d\varphi = (k^2 + 2 b^2) \pi.$$

La **lemniscata di Bernoulli** (pag. 43) ha l'area

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 a^2 \cos 2 \varphi d\varphi = 2 a^2$$

La **lemniscata di Geron** (pag. 43) ha l'area

$$\frac{4}{r} \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{4 r^2}{3}.$$

Per la **visiera di Agnesi** (pag. 43) l'area compresa tra la curva ed i raggi vettori corrispondenti a $\varphi = 0$ e $\varphi = \omega < \frac{\pi}{2}$

$$\text{è } \frac{r^2}{2} \left\{ \operatorname{tg} \omega + \frac{\cos \omega \sin \omega}{2} + \frac{3}{2} \omega \right\}.$$

(*) Alle pag. indicate si veggano le definizioni e le equaz. delle curve.

Per la **catenaria** (pag. 44)

$$\frac{a}{2} \int_0^x (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx = \frac{a^2}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}).$$

Per la **spirale d'Archimede** (pag. 44) l'area racchiusa dai raggi vettori corrispondenti a $\varphi = 0$, $\varphi = \omega$ è

$$\frac{1}{2} \int_0^\omega k^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{k^2 \omega^3}{6}.$$

Per la **spirale parabolica** (pag. 44) l'area racchiusa tra i raggi vettori corrispondenti a $\varphi = 0$, $\varphi = \omega$ è

$$\frac{1}{2} \int_0^\omega a^2 \varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \omega^2.$$

Per la **spirale iperbolica** $\varrho \varphi = a$ l'area compresa tra i 2 raggi vettori corrispondenti a $\varphi = \omega_1$, $\varphi = \omega_2$ è

$$\frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{a^2}{\varphi^3} d\varphi = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right).$$

Per la **spirale logaritmica** (pag. 44)

$$\frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{2a\varphi} d\varphi = \frac{1}{4a} (e^{2a\omega_2} - e^{2a\omega_1}).$$

La **cissoide di Diocle** (pag. 43) racchiude coll'asintoto l'area $2 \int_0^{2r} x \sqrt{\frac{x}{2r-x}} dx = 3 \pi r^2$.

4. — **Rettificazione delle curve piane. Lunghezza di un arco di curva** è il limite, se esiste, della lunghezza di una poligonale inscritta, al tendere a zero del massimo lato. Se la curva è data mediante l'equaz. cartesiana $y = f(x)$ e gli estremi dell'arco da rettificare hanno le ascisse a e b , la lunghezza dell'arco è $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$. La lunghezza a partire da un punto fisso A sulla curva di ascissa a a un punto P generico di ascissa x è rappresentata dalla funzione

$\int_a^x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = s(x)$. Il differenziale dell'arco è $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ ossia $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

In una curva rettificabile il rapporto fra la lunghezza di un arco e la corda sottesa tende ad 1 al tendere a zero della corda.

Se la curva è data mediante le equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ il differenziale dell'arco è dato da $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (dx , dy differenziali di x e di y rispetto alla variabile indipendente t); la lunghezza tra un punto fisso ($t = t_0$) e un punto generico è

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Se la curva è data mediante un'equazione tra le coordinate polari $\varrho = \varrho(\omega)$ è $s(\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{\varrho^2(\omega) + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} d\omega$ formula che si ottiene dalla precedente ponendo $x = \varrho(\omega) \cos \omega$, $y = \varrho(\omega) \sin \omega$.

5. — Lunghezza di alcune curve piane.

Pel **cerchio**, $s(x) = \int_0^x \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \arcsin \frac{x}{r}$: lunghezza totale $2\pi r$.

Per la **parabola** $y^2 = 2px$, $s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x(2x+p)} + \frac{p}{4} \log \frac{4x+p-2\sqrt{2x(2x+p)}}{p}$.

Per l'**ellisse** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, posto $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, l'arco a partire dal vertice $(0, b)$ ha la lunghezza $\int_0^x \frac{(a^2 - e^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - e^2 x^2)}}$, il quale integrale, posto $x = a \sin \varphi$ diviene l'integrale ellittico di 2ª specie (pag. 296) a $\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$. La lunghezza totale è (*ibidem*) $4a E(e)$. Un valore approssimato è

$$\pi \left\{ \frac{3}{4} (a+b) - \frac{5}{2} \sqrt{ab} + 3 \sqrt{\frac{a+b}{2}} \sqrt[4]{ab} \right\}$$

Dell'**iperbole** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'arco a partire dal vertice

$(a, 0)$ ha la lunghezza $s = \int_0^y \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)y^2 + b^4}{b^2(b^2 + y^2)}} dy$. Posto $y = (b^2 : \sqrt{a^2 + b^2}) \operatorname{tg} \varphi$ e $k = a : \sqrt{a^2 + b^2} = 1 : e$ si ha $s = \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} - k^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right\} =$
 $= \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi + \right.$
 $\left. + (1 - k^2) \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right\} = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2} -$
 $-\sqrt{a^2 + b^2} E(k, \varphi) + (b^2 : \sqrt{a^2 + b^2}) F(k, \varphi)$ (Cap. XLIV, § 9).

Della **cicloide** (pag. 41) l'arco i cui estremi corrispondono a $\vartheta = \vartheta_0, \vartheta = \vartheta_1$ ha la lunghezza $4r \{ \cos(\vartheta_0 : 2) - \cos(\vartheta_1 : 2) \}$; l'arco fra 2 cuspidi consecutive è lungo $8r$.

Della **cardioide** (pag. 42) l'arco i cui estremi hanno le anomalie $0, \omega$ ha la lunghezza $\int_0^\omega 4r \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8r \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}$; la lunghezza totale è $16r$.

Dell'**asteroide** (pag. 42) l'arco a partire dal vertice $(0, r)$ ha la lunghezza $\int_0^x r^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} r^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$; la lunghezza totale è $6r$.

La quarta parte della **lemniscata di Bernoulli** (pag. 43) è lunga $a \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$; posto $\operatorname{sen} \psi = \sqrt{2} \operatorname{sen} \varphi$ l'integrale diventa $a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \psi}} = a F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (pag. 297).

Della **catenaria** (pag. 44) l'arco a partire da $(0, a)$ ha la lunghezza $s = \frac{1}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$; l'area (pag. 304) è as .

Della **cissoide di Diocle** (pag. 43) l'arco che comincia nella cuspide ha la lunghezza $\frac{a}{2} \int_0^x \sqrt{\frac{4a - 3x}{(a - x)^3}} \cdot dx =$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2} \log \frac{-7a + 6x + 2\sqrt{3}(4a - 3x)(a - x)}{-7a + 4\sqrt{3}a}.$$

Della **catenaria di egual resistenza** (pag. 44) l'arco a partire dall'origine è lungo $a \log \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a} \right)$.

La **lumaca di Pàscal** (pag. 43) ha la lunghezza totale

$$2 \int_0^{\pi} \sqrt{k^2 + 4b^2 + 4bk \cos \varphi} \cdot d\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(k+2b)^2 - 8bk \sin^2 \omega} \cdot d\omega = 4(k+2b) E\left(\frac{2\sqrt{2bk}}{k+2b}\right)$$

(pag. 297).

Della **spirale d'Archimede** (pag. 44) l'arco con l'origine nel polo è lungo $\int_0^{\varphi} a \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = a \left[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \log(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}) \right] : 2$.

Della **spirale iperbolica** (pag. 44), l'arco i cui estremi hanno le anomalie ω_0, ω_1 è lungo

$$a \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\varphi^2 + 1}}{\varphi^2} d\varphi = a \left[\log \frac{\omega_1 + \sqrt{1 + \omega_1^2}}{\omega_0 + \sqrt{1 + \omega_0^2}} + \frac{\sqrt{1 + \omega_0^2}}{\omega_0} - \frac{\sqrt{1 + \omega_1^2}}{\omega_1} \right].$$

Della **spirale parabolica** (pag. 44) l'arco che comincia nel

polo è lungo $a \int_0^{\varphi} \sqrt{\varphi + \frac{1}{4\varphi}} \cdot d\varphi$. Ma $\int \sqrt{\varphi + \frac{1}{4\varphi}} d\varphi =$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{4\varphi^3 + \varphi} + \frac{1}{3} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 + \varphi}}; \text{ se poi si pone } \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}$$

è $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 + \varphi}} = \sqrt{2} \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta}} = \sqrt{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \vartheta\right).$

Della **spirale logaritmica** l'arco a partire dal polo è lungo

$$\sqrt{1 + a^2} \int_{-\infty}^{\varphi} e^{a\varphi} d\varphi = \sqrt{1 + a^2} e^{a\varphi} \text{ (supposto } a > 0).$$

6. — **Tangente e normale ad una linea piana.** **Tangente** ad una linea in M è la posizione limite della secante MM' al tendere di M' ad M . La tangente in (x_1, y_1) alla linea $y = y(x)$ ha l'equaz. $y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)$.

Se l'equaz. della curva è $f(x, y) = 0$, l'equazione della tangente è $(x - x_1) f'_x(x_1, y_1) + (y - y_1) f'_y(x_1, y_1) = 0$. Se entrambe le derivate sono nulle, vedi § 9.

Se la curva ha le equaz. parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$, l'equaz. della tangente nel punto $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$ è $(y - y_1) x'(t_1) = (x - x_1) y'(t_1)$.

Se α è l'angolo che la tangente forma con l'asse x , in assi ortogon. è $\cos \alpha = \pm 1 : \sqrt{1 + y'^2(x)} = \pm x'(t) : \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} =$
 $= \mp f'_y : \sqrt{f'^2_x + f'^2_y}$; $\sin \alpha = y'(x) : \sqrt{1 + y'^2(x)} =$
 $= \pm y'(t) : \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \pm f'_x : \sqrt{f'^2_x + f'^2_y}$ a seconda dei 3 modi esposti per rappresentare la curva. È anche $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$, $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$; il coseno dell'angolo ω formato da 2 curve che si incontrano è $(dx_1 dx_2 + dy_1 dy_2) : ds_1 ds_2$, l'indice 1 riferendosi ad una curva, e 2 all'altra.

Tangenti ad una curva algebrica. L'equaz. della tangente alla curva algebrica $F(x, y) = 0$ di grado m è di grado $m - 1$ nelle coordinate x_1, y_1 del punto di contatto. Introducendo le coordinate omogenee (Cap. I, § 4) l'equaz. della tangente in (x_1, y_1, z_1) è $(x - x_1) F'_x + (y - y_1) F'_y + (z - z_1) F'_z = 0$ le derivate essendo calcolate in (x_1, y_1, z_1) . In generale il numero delle tangenti che da un punto si possono condurre ad una curva algebrica di ordine m è al più $m(m - 1)$; in generale i punti di contatto delle tangenti condotte da un punto ad una curva algebrica dell'ordine m sono situati su una curva dell'ordine $m - 1$.

Normale in un punto M ad una linea piana è la retta $\perp$ alla tangente in M . La normale in (x_1, y_1) alla curva $y = y(x)$ ha l'equaz. $(y - y_1) y'(x_1) + (x - x_1) = 0$; se l'equaz. della curva è $f(x, y) = 0$, l'equaz. della normale è $(y - y_1) f'_x = (x - x_1) f'_y$ ed infine è $(y - y_1) y'(t_1) + (x - x_1) x'(t_1) = 0$ se la curva ha le equaz. $x = x(t)$, $y = y(t)$ e t_1 il valore del parametro per cui x e y divengono x_1, y_1 .

7. — **Lunghezza della tangente** dicesi quella del segmento di tangente intercetto fra il punto di tangenza e l'asse x ; è data da $L_t = y \frac{ds}{dy}$ (ds differenziale dell'arco).

Le curve per le quali la lunghezza della tangente è la costante k sono le **trattrici** $x + c = \sqrt{k^2 - y^2} - k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - y^2}}{y}$ ove c è una costante arbitraria. Per la parabola $y^2 = 2px$, $L_t = \sqrt{2x(2x+p)}$.

Lunghezza della normale dicesi quella del segmento di normale intercetto tra il punto di tangenza e l'asse delle x : è misurato da $L_n = y \frac{ds}{dx}$.

Le curve per le quali la lunghezza della normale è costantemente uguale a k sono i cerchi di raggio k col centro sull'asse x . Per la parabola $L_n = \sqrt{p(p+2x)}$.

Sottotangente è il segmento di asse x intercetto fra il punto di intersezione con la tangente e il piede dell'ordinata del punto di contatto; è misurata da $S_t = y \frac{dx}{dy}$. Le curve per le quali la lunghezza della sottotangente è la costante k ,

sono le **curve logaritmiche** $y = c e^{\frac{x}{k}}$ essendo c un parametro arbitrario, e la base dei logaritmi naturali. Le curve nelle quali la sottotangente è proporzionale all'ascissa secondo il numero $1:a$ sono le curve $y = c x^a$, essendo c una costante arbitraria. In particolare nella parabola la sottotangente è doppia dell'ascissa. Per la curva $y = a^x$, $S_t = 1 : \log a$.

Sottonormale è il segmento dell'asse x intercetto fra il punto di intersezione con la normale e il piede dell'ordinata dal punto di contatto: è misurata da $S_n = y \frac{dy}{dx}$. Le curve per le quali la sottonormale è costantemente uguale a k sono le **parabole** $y^2 = 2kx + c$, ove c è un parametro arbitrario. Le curve per le quali la sottonormale è proporzionale all'ascissa

secondo il numero a sono le coniche $y^2 = ax^2 + c$, essendo c una costante arbitraria.

Sottonormale polare dicesi il segmento di retta pel polo perpendicolare al raggio vettore che va al punto di tangenza, intercetto dal polo stesso e dal punto in cui essa retta è incontrata dalla normale: è misurata da $\frac{d\rho}{d\omega}$. Le curve per le quali la sottonormale polare è costantemente uguale a k sono le **spirali archimedee** $\rho = k\omega + c$. Per la spirale logaritmica $\rho = e^{k\omega}$, la sottonormale polare è $k\rho$.

Sottotangente polare dicesi il segmento di retta pel polo perpendicolare al raggio vettore che va al punto di tangenza, intercetto dal polo stesso e dal punto in cui essa retta è incontrata dalla tangente: è misurata da $\rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}$. Le curve per le quali la sottotangente polare è costantemente uguale a k sono le **spirali iperboliche** $\rho = k : (\omega + c)$ essendo c un parametro arbitrario. Per la spirale logaritmica $\rho = e^{k\omega}$ la sottotang. polare è $\rho : k$.

8. — **Concavità** verso l'asse delle x presenta una curva in un punto M , se esiste un arco di cui M è interno che rispetto alla tangente in M sta dalla stessa banda del piede dell'ordinata di M ; la curva dicesi concava in M .

Convessità verso l'asse x presenta la curva in M se esiste un arco di cui M è interno che rispetto alla tangente in M sta da banda opposta a quella in cui cade il piede dell'ordinata di M : la curva dicesi convessa in M .

Inflessione (o flesso) presenta la curva in M se esistono 2 archi aventi l'estremo comune in M che stanno da bande opposte rispetto alla tangente in M . Sia $y = f(x)$ l'equaz. della curva ed x_0 l'ascissa di M ; se la prima derivata non nulla in x_0 , a cominciare dalla 2^a, è di ordine m , la curva ha in M inflessione se m è dispari; se m è pari, ha concavità o convessità a seconda che $f^{(m)}(x_0) f'(x_0) < 0$ o > 0 . Se in un punto la

derivata è infinita di segno determinato, si ha una tangente di flesso parallela ad y .

Ricerca dei flessi. Le ascisse dei flessi si cercano fra le radici di $f''(x) = 0$: a quest'equaz. si sostituisce $x'(t) y''(t) - y'(t) x''(t) = 0$ se la curva ha equaz. parametriche, o la $\varrho^2(\omega) + 2 \left(\frac{d\varrho}{d\omega} \right)^2 - \varrho(\omega) \frac{d^2\varrho}{d\omega^2} = 0$ se l'equaz. è $\varrho = \varrho(\omega)$ o la

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{yx} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yy} \\ f''_{xx} & f''_{xy} & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ associata alla } f(x, y) = 0 \text{ se}$$

questa è l'equaz. della curva.

Se $F(x, y, z) = 0$ è l'equaz. di una curva algebrica in coordinate omogenee (pag. 24) si associa a codesta equazione la

$$\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} \end{vmatrix} = 0$$

Quest'equaz. definisce una curva che dicesi **Hessiana** della $F(x, y, z) = 0$.

9. — **Punti singolari.** La tangente nel punto (x_1, y_1) della curva di equaz. $f(x, y) = 0$ ha il coefficiente angolare $-f'_x(x_1, y_1) : f'_y(x_1, y_1)$, purchè non siano contemporaneamente nulle le derivate. **Punti singolari** si dicono i punti della curva in cui simultaneamente è $f'_x = 0, f'_y = 0$. In questo caso, derivando 2 volte la $f(x, y) = 0$, ove si consideri y funz. di x , si ha $f''_{xx} + 2 f''_{xy} \cdot y' + f''_{yy} y'^2 = 0$ e per y' si hanno 2 valori reali e distinti o reali coincidenti o immaginari secondo che $f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ è $> 0, = 0, < 0$.

Corrispondentemente in M si hanno 2 tangenti reali distinte, 2 tangenti reali coincidenti, 2 tangenti immaginarie. Nel 1° caso M dicesi **punto doppio**, nel 2° **cuspidale o punto di regresso**, nel 3° **punto isolato**. Se $f''_{yy} = 0$, le radici in y' si riducono ad una sola: si ha un punto doppio con tangente parallela all'asse y ; se anche $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, mentre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$ si ha una cuspidale con tangente parallela all'asse y . Per una curva in coordinate cartesiane omogenee $F(x, y, z) = 0$ le coord. dei punti singolari sono dati da $F'_x = F'_y = F'_z = 0$.

Esempio. Nel *folium* $x^3 + y^3 = 3axy$ l'origine è un punto doppio. Infatti $f'_x = 3(x^2 - ay)$; $f'_y = 3(y^2 - ax)$ che si annullano contemporaneamente sia in $x = 0, y = 0$, che in $x = a, y = a$; ma questo secondo punto non sta sulla curva, mentre il primo ci sta. Le derivate seconde sono $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -3a$, $f''_{yy} = 6y$ onde l'equazione che determina y' diviene nell'origine $0 + y' + 0 \cdot y'^2 = 0$ che ha una radice nulla ed un'altra infinita: gli assi sono le tangenti nell'origine.

Se le derivate parziali di $f(x, y)$ sono nulle in punto M della curva fino all'ordine $n - 1$, i coefficienti angolari (valori di $y'(x)$) delle n tangenti in M sono le n radici in t dell'equazione $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{\partial^r f}{\partial x^r \partial y^{n-r}} t^{n-r} = 0$. Se $\frac{\partial^n f}{\partial y^n} = 0$ in M alcune di queste radici sono infinite. Il punto M dicesi **punto multiplo d'ordine n** o **punto n -plo**; in particolare è isolato se tutte le n radici sono immaginarie. L'ordine di molteplicità è indipendente dall'orientamento degli assi.

Punti salienti della curva $y = y(x)$ sono i punti in cui $y'(x)$ ha una discontinuità; **punti d'arresto** i punti in cui un ramo di curva s'arresta, senza proseguire oltre; ad. es. l'origine per la curva $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

10. — **Asintoti.** *a)* Se al crescere indefinito di x la differenza fra le ordinate della curva $y = y(x)$ e della retta $y = mx + h$ tende allo zero, si dice che la retta è un **asintoto** della curva data. I valori di m e h sono dati da

$$\lim_{x=\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = m; \quad \lim_{x=\pm\infty} (y - mx) = h.$$

Se la tangente in un punto M tende a una posizione limite quando M s'allontana all'infinito, questa è un asintoto.

Es. Per la curva $y = x \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ si ha $m = \lim_{x=\pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \pm 1$; $h = \lim_{x=\pm\infty} x \left\{ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \mp 1 \right\} = \mp \lim_{x=\pm\infty} \frac{2xe^{\pm x}}{e^x + e^{-x}} = 0$ onde gli asintoti sono le bisettrici degli angoli degli assi.

Gli asintoti paralleli all'asse y si hanno nei punti di infinito di $y(x)$; una retta $x = a$ parallela all'asse x , è asintoto se $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = a$.

b) **Asintoti delle curve algebriche.** Se $F(x, y) = 0$ è l'equaz. di una curva algebrica di ordine n , e $\varphi_n(x, y)$ è la somma dei termini di F di grado n , si troveranno le n radici in $y:x$ dell'equaz. $\varphi_n(x, y) : x^n = 0$, cioè $\varphi_n\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0$, le quali saranno i coefficienti angolari degli asintoti. Se $\eta_i : \xi_i$ è una di queste radici la equazione dell'asintoto corrispondente è $x \frac{\partial \varphi_n(\xi_i \eta_i)}{\partial \xi_i} + y \frac{\partial \varphi_n(\xi_i \eta_i)}{\partial \eta_i} + \varphi_{n-1}(\xi_i \eta_i) = 0$ essendo φ_{n-1} la somma dei termini di F di grado $n - 1$.

Se $\varphi_n(x, y)$ contiene x^s a fattore comune, $\varphi_n\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0$ diviene di grado $n - s$ in $y:x$, onde si hanno $n - s$ radici finite, a cui bisogna aggiungere le s infinite corrispondenti ai valori $x = 0$.

Es. Per la **cissoide** (pag. 43) $y^2(a - x) - x^3 = 0$, $\varphi_n(x, y) = x(x^2 + y^2)$ onde le radici in $y:x$ sono l'una infinita a cui corrisponde l'asintoto $x = a$, e le altre 2 immaginarie.

11. — Contatto fra curve piane.

Contatto del 1° ordine presentano due curve $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ in $x = x_0$ se $f(x_0) = \varphi(x_0)$, $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$; **contatto del secondo ordine** presentano le curve se oltre le precedenti uguaglianze vale la terza $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$, senza essere $f'''(x_0) = \varphi'''(x_0)$. **Contatto dell'ordine k** presentano in $x = x_0$ le due curve se $f(x_0) = \varphi(x_0)$; $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$; $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$ $f^{(k)}(x_0) = \varphi^{(k)}(x_0)$ mentre è $f^{(k+1)}(x_0) \neq \varphi^{(k+1)}(x_0)$. Per analogia si dice che le due curve hanno contatto d'ordine 0 se è solo $f(x_0) = \varphi(x_0)$. La distanza tra due punti di uguale ascissa $x_0 + h$ sulle due curve hanno fra loro una distanza che è infinitesima di ordine $k + 1$ rispetto ad h .

Due curve aventi in M un contatto d'ordine k si attraversano o no in M a seconda che k pari o dispari.

Se una curva dipendente da un certo numero di parametri ha $k + 1$ punti in comune con una curva L e si fanno variare i parametri in guisa che codesti punti tendano a riunirsi in un solo punto M , la curva limite ha, in generale, in M un contatto d'ordine k con L .

Se le due curve sono date mediante equaz. parametriche $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ la prima, $x = \varphi_1(u)$, $y = \varphi_2(u)$ la seconda e per $t = t_1$, $u = u_1$ è $f_1(t_1) = \varphi_1(u_1)$, $f_2(t_1) = \varphi_2(u_1)$, cioè le curve hanno un punto in comune, si riconoscerà se v'ha contatto e di quale ordine, calcolando le derivate successive di y rapporto ad x tanto per l'una quanto per l'altra curva, come è indicato alla pag. 229, le prime per $t = t_1$, le seconde per $u = u_1$ e si vedrà se i loro valori coincideranno e fino a quale ordine delle derivate.

Se le curve sono date mediante le equaz. $F(x, y) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$ le quali in $x = a$, $y = b$ sono soddisfatte entrambe, colla regola di derivazione delle funz. implicite si calcoleranno le derivate delle due funzioni y di x definite dalle due equaz. e si vedrà se hanno valori uguali e fino a quale ordine in $x = a$, $y = b$. Più semplicemente, dedotte le derivate rapporto ad x della funz. y definita da $F = 0$ e calcolate in $x = a$, $y = b$ si vedrà se queste rendono identicamente soddisfatte le equaz. differenziali che da $\Phi = 0$ si ottengono per la determinazione delle derivate rapporto ad x della funz. y definita da $\Phi = 0$.

Osculazione. Sia $y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ l'equaz. di una famiglia di curve ad $n + 1$ parametri (pag. 25). Per determinare una curva della famiglia che ha con una data curva $y = \varphi(x)$ in $x = x_0$ un contatto di ordine k si debbono determinare i parametri in guisa che siano verificate le $k + 1$ equazioni $\varphi(x_0) = f(x_0)$, $\varphi'(x_0) = f'(x_0)$, $\dots$, $\varphi^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$. Ciò sarà in generale possibile se k non è maggiore di n ; se $k < n$ esistono infinite curve che hanno il contatto k , se

$k = n$ generalmente ne esiste una sola la quale dicesi **osculatrice** alla $y = \varphi(x)$, avendo in $x = x_0$ il massimo contatto possibile.

Come caso particolare potrebbe accadere che determinata la curva osculatrice, in $x = x_0$ coincidano le derivate di $f(x)$ e $\varphi(x)$ anche per ordini $> n$; si dice allora che la $y = f(x)$ è **iperosculatrice** in $x = x_0$. La retta osculatrice di $y = \varphi(x)$ è la tangente; ma se in $x = x_0$ la $y = \varphi(x)$ ha un flesso, la tangente diventa iperosculatrice avendo un contatto del 2° ordine, giacchè $\varphi''(x_0) = 0$ e la derivata 2ª di una funzione di 1° grado è nulla.

Circolo osculatore alla curva $y = y(x)$ è il circolo che ha il contatto d'ordine 2; le coordinate del centro sono $\alpha = x -$

$$- \frac{1 + y'^2}{y''} y; \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \text{ il raggio è } \varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Se la curva è data mediante le equazioni parametriche $x = x(t), y =$

$$= y(t) \text{ è } \alpha = x - \frac{ds^2 dy}{dx d^2 y - dy d^2 x}; \beta = y + \frac{ds^2 dx}{dx d^2 y - dy d^2 x}$$

$$\varrho = \frac{ds^3}{dx d^2 y - dy d^2 x} \text{ ove } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Se la curva ha le equaz. parametriche $x = x(s), y = y(s)$,

$$(s \text{ arco della curva}), \varrho = 1 : \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)^2}; \text{ se la curva ha l'equaz. } f(x, y) = 0, \text{ è } \varrho = - \{ (f'_{xx})^2 + (f'_{yy})^2 \}^{3/2} : \{ (f'_{xy})^2 f''_{xx} - 2 f''_{xy} f'_{xx} f'_{yy} + (f'_{yy})^2 f''_{yy} \}.$$

Se la curva ha un'equaz. in coordinate polari $r = r(\omega)$ è

$$\varrho = \left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega} \right)^2 \right\}^{3/2} : \left\{ r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\omega} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\omega^2} \right\}$$

Se le coordinate polari r ed ω sono date in funzione di un parametro t , $\varrho = (dr^2 + r^2 d\omega^2)^{3/2} : \{ r^2 d\omega^3 + 2 dr^2 d\omega + r dr d^2 \omega - r d^2 r d\omega \}$

12. — **Curvatura assoluta** di un arco MM' di curva dicesi l'angolo delle due tangenti agli estremi. **Curvatura media** di un arco MM' di curva dicesi il rapporto $\Delta\tau : \Delta s$ fra l'angolo $\Delta\tau$

che le due tangenti agli estremi formano fra loro, e la lunghezza Δs dell'arco $\widehat{MM'}$.

Curvatura del punto M dicesi il limite del rapporto $\Delta\tau:\Delta s$ dianzi definito, al tendere di M' a M . Esso è misurato, per la curva $y=y(x)$ nel punto di ascissa x , da $\frac{y''(x)}{\{1+y'(x)^2\}^{3/2}}$: è cioè l'inverso del raggio ϱ del circolo osculatore.

Raggio e centro di curvatura diconsi il raggio ed il centro del cerchio osculatore.

L'espressione della curvatura per le varie forme di rappresentazione delle curve si ha prendendo il reciproco delle diverse espressioni ottenute per ϱ nel § precedente.

Se $y''=0$, la curvatura è nulla, quindi infinito il raggio di curvatura; nei punti di flesso la curvatura è nulla: se in ogni punto la curvatura è nulla, la curva è una retta: infatti integrando $y''=0$ si ha $y=ax+b$.

Nelle **coniche** il raggio di curvatura è dato dal quadrato del parametro (Cap. VI, § 4) diviso pel cubo della lunghezza della normale.

Nella **catenaria** (pag. 44) è $\varrho=y^2:a$; nella **cicloide** (pag. 41) $\varrho=4a \sin(t/2)$; nella catenaria per avere il centro di curvatura basta prolungare la normale al disopra della curva di tanto quanto è la lunghezza della normale; nella cicloide basta prolungare la normale al di sotto dell'asse x di quanto essa è lunga. Nella **spirale logaritmica** (pag. 44) è $\varrho=r\sqrt{1+k^2}$ cioè proporzionale al raggio vettore. Nella **lemniscata di Bernoulli** (pag. 43) è $\varrho=2a^2:3r$, cioè inversamente proporzionale al raggio vettore. Per la **catenaria di ugual resistenza** (pag. 44) si ha $\varrho=a:\cos(x:a)$.

13. — **Evoluta o sviluppata** di una curva è il luogo dei centri di curvatura. Se la curva è data da $y=y(x)$, le equazioni parametriche della evoluta sono $\alpha=x-\frac{1+y'^2}{y''}y'$; $\beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$, riguardando x come parametro; se la curva

è data mediante $x = x(t)$, $y = y(t)$ le equazioni parametriche in t dell'evoluta sono $\alpha = x(t) - \frac{[x'(t)^2 + y'(t)^2] y'(t)}{x'(t) y''(t) - x''(t) y'(t)}$; $\beta = y(t) - \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t) y''(t) - x''(t) y'(t)}$ e se il parametro è l'arco s sono

$$\alpha = x(s) - \frac{y'(s)}{x'(s) y''(s) - x''(s) y'(s)};$$

$$\beta = y(s) + \frac{x'(s)}{x'(s) y''(s) - x''(s) y'(s)}$$

Eliminando il parametro x o t o s si ha l'equazione cartesiana dell'evoluta.

La normale alla curva in un punto è tangente all'evoluta: l'evoluta è l'inviluppo (cfr. § 14) delle normali all'evolvente. La lunghezza di un arco σ di evoluta è uguale alla differenza dei raggi di curvatura dell'evolvente che hanno gli ulteriori estremi negli estremi dell'arco σ .

Evolvente o sviluppante di una curva è quella curva che ha questa per evoluta. Se si immagina avvolto un filo sopra una curva piana e poi, tenendo fisso un capo, si svolge il filo, mantenendolo teso, nel piano della curva, ciascun suo punto descrive una sviluppante della curva data.

Chiamando α e β le coordinate dei punti di una curva e σ l'arco di essa a partire da un punto fisso e dicendo x, y le coordinate dei punti dell'*evolvente* della curva, le equazioni dell'evolvente sono $x = \alpha + (c - \sigma) \frac{d\alpha}{d\sigma}$, $y = \beta + (c - \sigma) \frac{d\beta}{d\sigma}$ (c parametro arbitrario). Esistono di una curva infinite evolventi.

L'evoluta dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ è l'asteroide allungato $(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$.

L'evoluta dell'asteroide $x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3}$ è l'asteroide $(\alpha + \beta)^{2/3} + (\alpha - \beta)^{2/3} = 2 r^{2/3}$ la cui equazione diviene $\alpha^{2/3} + \beta^{2/3} = 2 r^{2/3}$ se si fanno ruotare agli assi di $\pi/4$.

L'evoluta della cicloide generata da un circolo di raggio r è la cicloide stessa a cui si è fatta subire una traslazione,

parallela alla retta su cui rotola il circolo di ampiezza πr ed una traslazione normale alla precedente di ampiezza $2r$ da banda opposta a quella in cui ha rotolato il circolo.

L'evolvente della catenaria $\beta = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{a}{y}} + e^{-\frac{a}{y}} \right)$ che ha origine nel vertice della catenaria è la **trattrice** di equazione $x + \sqrt{a^2 - y^2} = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$.

Evolvente del cerchio di raggio r è una delle curve $x \cos \frac{c - \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r} + y \sin \frac{c - \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r} = r$, con c costante arbitraria.

14. — **Inviluppi di curve piane.** Sia $f(x, y, c) = 0$ l'equaz. di una famiglia di curve, (pag. 25); la f sia continua ed abbia la derivata rapporto a c continua. **Punti che una curva** $f(x, y, \bar{c}) = 0$ **ha in comune coll'infinitamente vicina** diconsi le posizioni limite dei punti di intersezione della $f(x, y, \bar{c}) = 0$ con $f(x, y, \bar{c} + h) = 0$ al tendere a zero di h ; le loro coordinate soddisfano al sistema $f(x, y, \bar{c}) = 0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial c} \right)_{c=\bar{c}} = 0$.

Inviluppo delle curve $f(x, y, c) = 0$ è il luogo di tali punti quando si faccia assumere al parametro c tutti i valori di cui è suscettibile. Le curve della famiglia si dicono inviluppate dalla curva inviluppo.

Equazioni dell'inviluppo. Se dal sistema delle equaz. (1) $f(x, y, c) = 0$, $\frac{\partial f(x, y, c)}{\partial c} = 0$ si possono ricavare x e y in funzione di c , $x = x(c)$, $y = y(c)$, queste sono le equaz. parametriche dell'inviluppo; se si può eliminare c tra le 2 equaz. (1) si ottiene l'equaz. $F(x, y) = 0$ cartesiana dell'inviluppo.

Se la $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$; è risolubile per c , si tragga $c = c(x, y)$ e si ponga nella prima delle (1), la quale diventando $f(x, y, c(x, y)) = 0$, dà l'equaz. dell'inviluppo. Preso un punto (x_0, y_0) sull'inviluppo, la curva della famiglia che passa per (x_0, y_0) è la $f(x, y, c(x_0, y_0)) = 0$.

Se $f(x, y, c)$ ha le derivate rapporto ad x e ad y , ogni curva della famiglia è tangente alla curva involuppo.

L'involuppo delle normali ad una linea è la sua evoluta.

Esempi. a) L'involuppo di una retta che dagli assi ha staccato un segmento costante k è l'asteroide $x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$. b) L'involuppo delle ellissi concentriche e coassiali, i cui assi sommano costantemente $2k$ è l'asteroide $x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$. c) L'involuppo delle rette che staccano sugli assi 2 segmenti u, v pei quali si ha $uv = (a - u)(b - v)$ essendo a e b due segmenti costanti, è la parabola $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$. d) L'involuppo delle ellissi concentriche e coassiali per le quali $a^2 + b^2 = k^2$, k costante, è il quadrato avente le diagonali sugli assi di lunghezza $2k$. e) L'involuppo delle ellissi concentriche e coassiali ed aventi uguale area πk , involuppano le due iperboli equilatera $xy = k:2$, $xy = -k:2$. f) Le parabole coassiali aventi il vertice distante da un punto fisso dell'asse della metà del parametro della parabola involuppano le bisettrici degli angoli degli assi.

CAPITOLO XLVI.

Applicazione del Calcolo alle linee storte

1. — **Rappresentazione analitica delle curve storte**, vedi Cap. III, § 5. Tre equaz. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ rappresentano una linea piana se il wronskiano delle derivate $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ è nullo (Cap. XXXVI, § 9); altrimenti la linea è storta. Perchè $y = y(x)$, $z = z(x)$ rappresenti una curva piana dev'essere $y''z''' - z''y''' = 0$.

Rettificazione delle linee storte. Lunghezza di un arco di linea storta è il limite, se esiste, della lunghezza di una poli-

gonale inscritta, al tendere a zero del massimo lato. Se la linea ha le equaz. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ e gli estremi dell'arco corrispondono ai valori t_0, t_1 di t , la lunghezza dell'arco è $s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt$ ed il differenziale dell'arco è $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Se le equaz. della linea sono $y = y(x)$, $z = z(x)$ la lunghezza dall'arco i cui estremi corrispondono ai valori x_0, x_1 di x è $s =$

$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx$ ed il differenziale $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ove dx è l'incremento arbitrario di x e dy, dz i differenziali di $y(x), z(x)$. Se r, ϑ, φ sono le coordinate polari (pag. 15) e $r = r(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ sono le equaz. parametriche della curva, il differenziale dell'arco è

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \cdot dt.$$

Il rapporto fra l'arco MM' e la corda MM' in curve rettificabili tende ad 1 al tendere di M' ad M .

Rettificazioni di alcune curve. Per l'**elica circolare** (pag. 75) è $ds = (r : \cos \varphi) dt$, onde l'arco che comincia nel punto $(r, 0, 0)$ è $s = tr : \cos \varphi$; per la **curva di Viviani** (pag. 76) è $ds = r \sqrt{1 + \cos^2 t} \cdot dt$ e la lunghezza completa è data da

$$4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} \cdot dt = 4r \sqrt{2} E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \text{alla lunghezza}$$

di un'ellisse di semiassi $r, r\sqrt{2}$; per l'**elica cilindro-conica** (pag. 75) l'arco s a cominciare dal punto corrispondente a $t = 0$

$$\begin{aligned} (\text{vertice del cono}) \text{ è } s &= \frac{c}{\cos \gamma} \int_0^t \sqrt{1 + t^2 \sin^2 \gamma} dt = \\ &= \frac{c}{2 \cos \gamma} \left[t \sqrt{1 + t^2 \sin^2 \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma} \log (t \sin \gamma + \sqrt{1 + t^2 \sin^2 \gamma}) \right]; \end{aligned}$$

per la **lossodromica** (pag. 76) riferendoci alle coordin. polari, l'arco corrispondente ai valori ϑ_0, ϑ della colatitudine è $s = a \sqrt{1 + k^2} (\vartheta - \vartheta_0) : k = a (\vartheta - \vartheta_0) : \cos \alpha$, α essendo l'angolo costante secondo cui la lossodromica incontra i meridiani della sfera passanti pei 2 punti $(0, 0, a), (0, 0, -a)$.

2. — **Tangente** ad una linea storta in un punto M è la posizione limite della secante MM' quando l'ulteriore punto di incontro M' tende ad M . Se la curva ha le equaz. parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ le equaz. della tangente in $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$, $z_1 = z(t_1)$ sono $\frac{x - x_1}{x'(t_1)} = \frac{y - y_1}{y'(t_1)} = \frac{z - z_1}{z'(t_1)}$; se le equaz. della curva sono $y = y(x)$, $z = z(x)$, quella della tangente nel punto $x_1, y_1 = y(x_1), z_1 = z(x_1)$ sono $\frac{x - x_1}{1} = \frac{y - y_1}{y'(x_1)} = \frac{z - z_1}{z'(x_1)}$; in entrambi i casi le equaz. della tangente in (x_1, y_1, z_1) si possono scrivere $\frac{x - x_1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_1}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_1}{\frac{dz}{dt}}$ moltiplicando i denominatori nel 1° caso per dt e nel 2° per dx . Se le equaz. della curva sono $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ le equaz. della tangente in (x_1, y_1, z_1) sono $(x - x_1)f'_x + (y - y_1)f'_y + (z - z_1)f'_z = 0$, $(x - x_1)\varphi'_x + (y - y_1)\varphi'_y + (z - z_1)\varphi'_z = 0$ od anche (1) $(x - x_1) : \left| \begin{smallmatrix} f'_y & f'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{smallmatrix} \right| = (y - y_1) : \left| \begin{smallmatrix} f'_z & f'_x \\ \varphi'_z & \varphi'_x \end{smallmatrix} \right| = (z - z_1) : \left| \begin{smallmatrix} f'_x & f'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{smallmatrix} \right|$, le derivate calcolate in (x_1, y_1, z_1) .

Coseni direttori della tangente sono $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\beta = \frac{dy}{ds}$, $\gamma = \frac{dz}{ds}$ essendo ds il differenziale dell'arco. Se le equaz. della curva sono $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$, chiamando ordinatamente con H_1, H_2, H_3 i 3 determinanti della (1) e posto $H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$, si ha $\alpha = H_1 : H$, $\beta = H_2 : H$, $\gamma = H_3 : H$. Se due curve si incontrano in un punto, l'angolo da loro formato (cioè delle tangenti in quel punto) ha per coseno $\frac{dx_1}{ds_1} \frac{dx_2}{ds_2} + \frac{dy_1}{ds_1} \frac{dy_2}{ds_2} + \frac{dz_1}{ds_1} \frac{dz_2}{ds_2}$ l'indice 1 riferendosi ad una curva, l'indice 2 all'altra.

3. — **Piano normale** è il piano $\perp$ alla tangente nel punto di contatto. Se la linea ha le equaz. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

l'equaz. del piano normale in $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$, $z_1 = z(t_1)$ è $(x - x_1) x'(t_1) + (y - y_1) y'(t_1) + (z - z_1) z'(t_1) = 0$; se le equaz. della linea sono $y = y(x)$, $z = z(x)$ l'equaz. del piano normale è $(x - x_1) + (y - y_1) y'(x_1) + (z - z_1) z'(x_1)$ (basta supporre nel caso precedente $t = x$): se le equaz. della linea sono $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$, l'equaz. del piano normale è (x_1, y_1, z_1) è

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix} = 0$$

le derivate parziali colcolate in (x_1, y_1, z_1) .

4. — **Piano tangente** ad una linea è ogni piano per la

tangente: ogni equazione $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x'(t_1) & y'(t_1) & z'(t_1) \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$

supposti a, b, c non proporzionali a x', y', z' rappresenta un piano tangente in (x_1, y_1, z_1) . Se si prende un punto $x(t_1 + h)$, $y(t_1 + h)$, $z(t_1 + h)$, la distanza di questo dal piano tangente nel punto $x(t_1)$, $y(t_1)$, $z(t_1)$ è infinitesima, generalmente, del 2° ordine rispetto ad h . È del 3° se il piano è **osculatore**.

Piano osculatore in M è il piano che è la posizione limite di un piano tangente quando l'ulteriore sua intersezione con la linea tende ad M ; od anche si può definire la posizione limite di un piano per tre punti M, M', M'' della linea all'avvicinarsi indefinito di M', M'' ad M . L'equaz. del piano osculatore è

$$\begin{vmatrix} x - x(t_1) & y - y(t_1) & z - z(t_1) \\ x'(t_1) & y'(t_1) & z'(t_1) \\ x''(t_1) & y''(t_1) & z''(t_1) \end{vmatrix} = 0 \text{ oppure } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ 1 & y'(x_1) & z'(x_1) \\ 0 & y''(x_1) & z''(x_1) \end{vmatrix} = 0$$

se la linea è rappresentata dalle equaz. parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ oppure dalle cartesiane $y = y(x)$, $z = z(x)$. Le due equaz. si scrivono anche sostituendo alle derivate prime e seconde i differenziali primi e secondi rispettivamente.

5. — **Binormale** è la retta del piano normale che è $\perp$ al piano osculatore nel punto di contatto. Le sue equaz. sono

$$\frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_1}{\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}$$

Indicando con L, M, N i determinanti che sono a denominatore (reciproci degli elementi della prima linea nel determinante che è 1° membro dell'equaz. del piano osculatore) e posto

$Q = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$, i coseni direttori della binormale sono

$$\lambda = L : Q, \quad \mu = M : Q, \quad \nu = N : Q, \quad \text{od anche } \lambda = \varrho \left[d \left(\frac{dy}{ds} \right) dz - \right.$$

$$\left. - d \left(\frac{dz}{ds} \right) dy \right] : ds^2, \quad \mu = \varrho \left[d \left(\frac{dz}{ds} \right) dx - d \left(\frac{dx}{ds} \right) dz \right] : ds^2,$$

$$\nu = \varrho \left[d \left(\frac{dx}{ds} \right) dy - d \left(\frac{dy}{ds} \right) dx \right] : ds^2 \text{ ponendo}$$

$\varrho = ds : \sqrt{\left[d \left(\frac{dx}{ds} \right) \right]^2 + \left[d \left(\frac{dy}{ds} \right) \right]^2 + \left[d \left(\frac{dz}{ds} \right) \right]^2}$ (ϱ = raggio di curvatura; vedi § 7); e se il parametro è l'arco s si ha

$$\lambda = \varrho \left(\frac{d^2y}{ds^2} \frac{dz}{ds} - \frac{d^2z}{ds^2} \frac{dy}{ds} \right), \quad \mu = \varrho \left(\frac{d^2z}{ds^2} \frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{ds^2} \frac{dz}{ds} \right), \quad \nu = \varrho \left(\frac{d^2x}{ds^2} \frac{dy}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2} \frac{dx}{ds} \right)$$

avendo posto $\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}$.

6. — **Normale principale** è l'intersezione del piano osculatore col piano normale. Le sue equaz. sono $\frac{x - x_1}{N dy - M dz} =$

$$= \frac{y - y_1}{L dz - N dx} = \frac{z - z_1}{M dx - L dy}, \text{ oppure sostituendo ai deno-}$$

$$\text{minatori quantità proporzionali } \frac{x - x_1}{d \left(\frac{dx}{ds} \right)} = \frac{y - y_1}{d \left(\frac{dy}{ds} \right)} = \frac{z - z_1}{d \left(\frac{dz}{ds} \right)}$$

od anche $\frac{x - x_1}{x''(s)} = \frac{y - y_1}{y''(s)} = \frac{z - z_1}{z''(s)}$, se il parametro è la

lunghezza dell'arco s . I coseni direttori della normale princi-

pale sono $\xi = \varrho \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}$, $\eta = \varrho \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}$, $\zeta = \varrho \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}$ ove ϱ ha il significato detto sopra; oppure $\xi = \varrho \frac{d^2 x}{ds^2}$, $\eta = \varrho \frac{d^2 y}{ds^2}$, $\zeta = \varrho \frac{d^2 z}{ds^2}$, se il parametro è s .

Piano rettificante è il piano della tangente e della binormale, e perciò $\perp$ alla normale principale; la sua equazione è $(x - x_1) d\left(\frac{dy}{ds}\right) + (y - y_1) d\left(\frac{dx}{ds}\right) + (z - z_1) d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$ oppure $(x - x_1) \frac{d^2 x}{ds^2} + (y - y_1) \frac{d^2 y}{ds^2} + (z - z_1) \frac{d^2 z}{ds^2} = 0$, se s è il parametro.

7. — **Indicatrice sferica delle tangenti.** Se dal centro delle coordinate si mandano le rette $\parallel$ alle tangenti nei punti della linea L , esse formano un cono che interseca sopra una sfera col centro nell'origine e di raggio 1 una linea che è detta **indicatrice sferica delle tangenti**; indicando con X_t, Y_t, Z_t le coordinate dei punti dell'indicatrice, le sue equazioni parametriche sono $X_t = \alpha = \frac{dx}{ds}$, $Y_t = \beta = \frac{dy}{ds}$, $Z_t = \gamma = \frac{dz}{ds}$ e il differenziale del suo arco

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2} = \sqrt{\left\{d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right\}^2 + \left\{d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right\}^2 + \left\{d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right\}^2}$$

La tangente alla indicatrice sferica delle tangenti è $\parallel$ alla normale principale.

Curvatura media di flessione di un arco MM' di lunghezza Δs è il rapporto $\frac{\Delta \tau}{\Delta s}$, indicando con $\Delta \tau$ l'angolo delle tangenti agli estremi di MM' .

Curvatura di flessione (o semplicemente **flessione**) in M è il limite del rapporto precedente quando M' tende ad M . È misurata dal rapporto fra il differenziale dell'arco di indica-

trice sferica delle tangenti e il differenziale dell'arco della curva.

La sua espressione $\frac{d\sigma}{ds}$ è

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{\left\{d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right\}^2 + \left\{d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right\}^2 + \left\{d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right\}^2}}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2}$$

o se il parametro è la lunghezza s dell'arco di curva

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Per la curvatura si ha anche l'espressione:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{(dy d^2z - dz d^2y)^2 - (dz d^2x - dx d^2z)^2 - (dx d^2y - dy d^2x)^2}}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{3/2}}$$

Solo per le rette la flessione è nulla in tutti i punti.

Raggio di curvatura (o di **flessione**) dicesi l'inverso della flessione, cioè ϱ ; esso è il raggio del cerchio osculatore (§ 11).

8. — **Indicatrice sferica delle binormali.** Se dal centro delle coordinate si mandano delle rette $\parallel$ alle binormali ai punti della curva L , si ha un cono che interseca la sfera di raggio 1 e col centro nell'origine secondo una linea che è la **indicatrice sferica delle binormali**. Le coordinate di un punto P dell'indicatrice sono i coseni direttori λ, μ, ν della binormale $\parallel$ al raggio che dall'origine va al punto P : indicando con X_b, Y_b, Z_b le coordinate generiche di un punto di codesta indicatrice, le sue equaz. sono $X_b = \lambda = L:Q$, $Y_b = \mu = M:Q$, $Z_b = \nu = N:Q$ (cfr. § 6). L'arco di indicatrice sferica della bi-

normale è $d\omega = \sqrt{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2} = \sqrt{\left[d\left(\frac{L}{Q}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{M}{Q}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{N}{Q}\right)\right]^2}$

La tangente in un punto P della indicatrice delle binormali è $\parallel$ alla tangente alla indicatrice delle tangenti e alla normale principale nei punti corrispondenti.

Curvatura media di torsione di un arco MM' di lunghezza Δs , è il rapporto $\Delta\varphi:\Delta s$, indicando con $\Delta\varphi$ l'angolo delle binormali agli estremi dell'arco stesso.

Curvatura di torsione (o semplicemente **torsione**) in M è il limite del rapporto precedente quando M' tende ad M . È misurata dal rapporto fra il differenziale dell'arco $d\omega$ di indicatrice sferica delle binormali e il differenziale dell'arco ds della curva. La sua espressione $\frac{d\omega}{ds}$ è

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{\sqrt{\left\{d\left(\frac{L}{Q}\right)\right\}^2 + \left\{d\left(\frac{M}{Q}\right)\right\}^2 + \left\{d\left(\frac{N}{D}\right)\right\}^2}}{ds} = \\ &= \frac{(dy d^2z - dz d^2y) d^3x + (dz d^2x - dx d^2z) d^3y + (dx d^2y - dy d^2x) d^3z}{(dy d^2z - dz d^2y)^2 + (dz d^2x - dx d^2z)^2 + (dx d^2y - dy d^2x)^2} = \\ &= \left| \frac{dx}{d^3x} \frac{dy}{d^3y} \frac{dz}{d^3z} \right| : \left[\left| \frac{dy}{d^2y} \frac{dz}{d^2z} \right|^2 + \left| \frac{dz}{d^2z} \frac{dx}{d^2x} \right|^2 + \left| \frac{dx}{d^2x} \frac{dy}{d^2y} \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

Se le equaz. della curva sono $y = y(x)$, $z = z(x)$ si riduce a $(y'' z''' - z'' y''') : \{ (y' z'' - z' y'')^2 + z''^2 + y''^2 \}$.

Solo le *linee piane* hanno in tutti i punti la torsione nulla.

Raggio di torsione dicesi il reciproco della curvatura di torsione, cioè T .

9. — **L'elica circolare** (pag. 75) ha la flessione $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \varphi}{r}$

e la torsione $\frac{1}{T} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}$ cioè entrambe costanti: viceversa se una curva ha i raggi di flessione e di torsione costanti ed uguali ad a e b è un'elica circolare posta su un cilindro il cui raggio è $a b^2 : (a^2 + b^2)$. Il rapporto delle due curvature è indipendente dal raggio del cilindro.

Elica cilindrica è ogni curva tracciata su un cilindro che incontra le generatrici di questo sotto angolo costante; le due curvature hanno un rapporto costante, proprietà che è caratteristica per le eliche cilindriche. È una **geodetica** del cilindro (Cap. XLVII, § 10, b).

Per l'**elica cilindroconica** (pag. 75) i 2 raggi di curvatura sono direttamente proporzionali all'arco contato a partire dal vertice del cono.

10. — **Formule di Frenet** (o di Serret). Indicando con α, β, γ , i coseni direttori della tangente, con λ, μ, ν quelle della binormale, con ξ, η, ζ quelli della normale principale, si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\varrho} \\ \frac{d\beta}{ds} = \frac{\eta}{\varrho} \\ \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\zeta}{\varrho} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\xi}{T} \\ \frac{d\mu}{ds} = \frac{\eta}{T} \\ \frac{d\nu}{ds} = \frac{\zeta}{T} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{ds} = -\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\lambda}{T} \\ \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\beta}{\varrho} - \frac{\mu}{T} \\ \frac{d\zeta}{ds} = -\frac{\gamma}{\varrho} - \frac{\nu}{T} \end{array} \right.$$

Formola di Lancret. L'angolo $d\psi$ di due normali principali infinitamente vicine è $d\psi = ds \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{T^2}}$.

Derivate successive delle coordinate rispetto ad s . Preso per parametro s , le derivate delle coordinate rispetto ad s sono:

$$\frac{dx}{ds} = \alpha; \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\xi}{\varrho}; \quad \frac{d^3x}{ds^3} = \xi \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\varrho} \right) - \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{T} \right) \frac{1}{\varrho} \dots$$

e formule analoghe per y e z cambiando α in β e γ , ξ in η e ζ , λ in μ e ν .

11. — **Cerchio osculatore** in M ad una linea è la posizione limite di un cerchio che passa per M e per 2 altri punti M', M'' della linea, quando questi tendono ad M . Il suo centro sta sulla normale principale, il suo raggio è il raggio di flessione ϱ . Le coordinate x_1, y_1, z_1 del suo centro sono $x_1 = x + \varrho \xi$, $y_1 = y + \varrho \eta$, $z_1 = z + \varrho \zeta$ (ξ, η, ζ coseni direttori della normale principale) od anche prendendo s per parametro

$$x_1 = x + \frac{d^2x}{dx^2 + dy^2 + dz^2}, y_1 = y + \frac{d^2y}{dx^2 + dy^2 + dz^2}, z_1 = z + \frac{d^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Linea dei centri di curvatura ha le equaz. parametriche precedenti; chiamando σ l'arco di questa linea, si ha $d\sigma^2 = d\varrho^2 + \frac{\varrho^2}{T^2} ds^2$. Detto ϑ l'angolo della tangente alla linea dei

centri di curvatura colla normale principale alla data linea, $\cos \vartheta = \frac{d\varrho}{d\sigma}$.

Singularità. I punti per cui le espressioni $dx d^2y - dy d^2x$, $dy d^2z - dz d^2y$, $dz d^2x - dx d^2z$ sono nulle si dicono **punti a**

tangenti stazionarie; i punti per cui $\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$ si di-

cono **punti a piani osculatori stazionari**. Se in tutti i punti di una curva si suppone stazionario il piano osculatore la curva è piana; infatti fra $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ passa (Cap. XXXVI, § 9) una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti $Ax' + By' + Cz' = 0$ da cui integrando $Ax + By + Cz + D = 0$ ciò che mostra l'asserto.

Se una curva ha in tutti i punti la tangente stazionaria è una retta.

12. — **Sfera osculatrice** ad una curva in M (che non sia punto a piano osculatore stazionario) è la posizione limite di una sfera per M e per altri 3 punti M' , M'' , M''' della linea al tendere indefinito di M' , M'' , M''' ad M . Le coordinate del centro sono

$x_o = x + \xi \varrho - \lambda T \frac{d\varrho}{ds}$, $y_o = y + \eta \varrho - \mu T \frac{d\varrho}{ds}$, $z_o = z + \zeta \varrho - \nu T \frac{d\varrho}{ds}$ (significati di ξ , η , ζ , λ , μ , ν , ϱ , T definiti sopra) ed il

raggio $R = \sqrt{\varrho^2 + \left(T \frac{d\varrho}{ds}\right)^2}$. L'intersezione della sfera osculatrice col piano osculatore è il cerchio osculatore.

Solo nelle linee per cui la flessione è costante (**cercoli storti**) il cerchio del centro osculatore coincide col centro della sfera osculatrice.

Applicazioni del Calcolo alle superficie

1. — **Piano tangente e retta normale.** Piano tangente ad una superficie in un punto M è il piano contenente tutte le tangenti alle linee tracciate sulla superficie e passanti per M . La equaz. del piano tangente in (x_1, y_1, z_1) , alla superficie $f(x, y, z) = 0$ è $(x - x_1)f'_x + (y - y_1)f'_y + (z - z_1)f'_z = 0$, le derivate parziali essendo calcolate in (x_1, y_1, z_1) . Se l'equaz. della superficie è $z = z(x, y)$, l'equaz. del piano tangente è $z - z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_1) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_1)$ o, colle notazioni di Monge, $z - z_1 = p(x - x_1) + q(y - y_1)$.

Normale alla superficie dicesi la retta $\perp$ al piano tangente pel punto di contatto. Le sue equaz. sono $\frac{x - x_1}{f'_x} = \frac{y - y_1}{f'_y} = \frac{z - z_1}{f'_z}$ se $f(x, y, z)$ è l'equaz. della superficie, oppure $\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{-1}$ se l'equaz. è $z = z(x, y)$.

I coseni direttori della normale se l'equaz. della superficie è $f(x, y, z) = 0$, sono $\lambda = f'_x : \pm \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}$, $\mu = f'_y : \pm \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}$, $\nu = f'_z : \pm \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}$ oppure se l'equazione della superficie è $z = z(x, y)$ i coseni sono

$$\begin{aligned}\lambda &= p : \pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \mu = q : \pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \\ \nu &= -1 : \pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}.\end{aligned}$$

Se la superficie è data mediante le 3 equaz. parametriche $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, i coseni direttori sono dati da

$$\lambda = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}; \mu = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$\nu = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}$$

ove $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v},$$

talchè la equaz. del piano tangente in (x_1, y_1, z_1) è

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

e quelle della normale nello stesso punto

$$\frac{x - x_1}{\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}} = \frac{y - y_1}{\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}} = \frac{z - z_1}{\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}}$$

le derivate essendo calcolate per la coppia di valori u e v per cui $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$.

2. — **Punti singolari.** In ciò che precede è implicitamente ammesso che non siano contemporaneamente nulle F'_x , F'_y , F'_z o non sia $EG - F^2 = 0$, se si ricorre alla rappresentazione parametrica. Quando invece questo avvenga in un punto M , si dice questo un **punto singolare**.

Le tangenti in M anzichè disporsi su un piano possono appartenere ad un cono di vertice M ; si dice M un **punto conico**.

I punti singolari possono succedersi con continuità sopra

linee che diconsi **linee singolari**; quando per una linea passa m volte la superficie si dice che la linea è multipla dell'ordine m : ad es. se da un punto si proietta una linea dotata di un punto doppio, la retta che proietta il punto doppio è **retta doppia** per il cono proiettante. E si possono avere **punti multipli isolati**: ad es. facendo ruotare una curva dotata di un punto multiplo P intorno ad una retta per P ; questi diviene punto multiplo isolato. L'indole delle singolarità si riconosce facendo sezioni piane pel punto e per gli immediatamente vicini.

3. — **Inviluppi di superfici ad un parametro.** Un'equaz. $f(x, y, z, a) = 0$, dove a è un parametro variabile in un determinato intervallo, rappresenta una famiglia di superficie ad un parametro: ad ogni valore di a resta fissata una superficie.

Caratteristica della superficie $f(x, y, z, \bar{a}) = 0$ è la posizione limite della curva d'intersezione della $f(x, y, z, \bar{a}) = 0$ con $f(x, y, z, \bar{a} + h) = 0$ al tendere di h allo zero. Il luogo delle caratteristiche di tutte le superfici della famiglia dicesi **inviluppo** delle superfici stesse, le quali diconsi inviluppate.

Equazioni dell'inviluppo. Si fa sistema delle due equaz.

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0;$$

se fra esse si elimina il pa-

rametro a , l'equaz. risultante $F(x, y, z) = 0$ è l'equaz. dell'inviluppo, supposti non contemporaneamente nulli i minori della

matrice che ha per prima linea $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ e per 2^a linea $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a},$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial a}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial a}$. Se si risolve per a la $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ ottenendo $a =$

$= a(x, y, z)$ e si pone questa nella prima, la equaz. risultante $f(x, y, z, a(x, y, z)) = 0$ è l'equaz. dell'inviluppo.

Ogni superficie della famiglia è tangente alla superficie inviluppo lungo la propria caratteristica (hanno cioè in ogni punto della caratteristica lo stesso piano tangente).

Spigolo di regresso. Sopra la superficie $f(x, y, z, \bar{a}) = 0$ sia C la caratteristica; essa sarà incontrata dalla superficie

$f(x, y, z, \bar{a} + h) = 0$ in uno o più punti che possono tendere a posizioni limiti determinate al tendere di h a zero. Il luogo di tali punti per tutte le superfici della famiglia costituisce una linea detta **spigolo di regresso**. Si ottiene l'equaz. dello spigolo di regresso, facendo sistema di $f(x, y, z, a) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0$: se si possono trarre x, y, z in funzione di a , saranno $x = x(a)$, $y = y(a)$, $z = z(a)$ le equaz. parametriche dello spigolo di regresso. Altrimenti eliminando il parametro a fra le 3 equaz. si ricavano 2 equaz. $F(x, y, z) = 0$ e $\Phi(x, y, z) = 0$ che sono le equaz. cartesiane dello spigolo di regresso. Le caratteristiche sono tangenti allo spigolo di regresso.

4. — **Superfici sviluppabili** diconsi le superfici che sono involuppo di un piano dipendente da un unico parametro a . L'equaz. del piano sarà della forma $A(a)x + B(a)y + C(a)z + D(a) = 0$; si ottiene l'equaz. della superficie sviluppabile facendo sistema dell'equaz. precedente con $A'(a)x + B'(a)y + C'(a)z + D'(a) = 0$ ed eliminando a .

Le caratteristiche dei piani sono rette che diconsi **generatrici** della superficie rigata sviluppabile.

Per ogni valore di a , la coppia di equaz. precedenti rappresenta la generatrice che appartiene al piano individuato dal valore di a .

Se alle 2 equaz. precedenti si associa la terza $A''(a)x + B''(a)y + C''(a)z + D''(a) = 0$ e si risolve il sistema per x, y, z si hanno le equaz. parametriche dello spigolo di regresso. Lo spigolo di regresso può ridursi ad un punto, nel qual caso la superficie involupabile è un cono.

Lo spigolo di regresso manca se
$$\begin{vmatrix} A(a) & B(a) & C(a) \\ A'(a) & B'(a) & C'(a) \\ A''(a) & B''(a) & C''(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Se $A(a) : A'(a) = B(a) : B'(a) = C(a) : C'(a)$ i piani rimangono || a una stessa giacitura. Se non sono verificate le due uguaglianze precedenti, l'annullarsi del determinante (wronskiano

(pag. 229) delle 3 funzioni $A(a), B(a), C(a)$ significa che esistono tre numeri l, m, n , per cui $l A(a) + m B(a) + n C(a) = 0$ il che vuol dire che il piano rimane || alla direzione individuata dai 3 numeri l, m, n (pag. 13); i piani inviluppano un cilindro.

Le generatrici di una superficie sviluppabile sono tangenti allo spigolo di regresso.

Equazione alle derivate parziali delle superfici sviluppabili. Ogni superficie sviluppabile ha un'equaz. $z = z(x, y)$

in cui z soddisfa all'equaz. alle derivate parziali $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 -$

$-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ od (usando dalle notazioni di Monge $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s$) $s^2 - rt = 0$; viceversa ogni soluzione $z =$

$z(x, y)$ di quest'equaz. rappresenta una superficie sviluppabile.

5. — Esempi di superficie sviluppabili. a) Inviluppo dei piani osculatori ad una linea gobba $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, è una superficie sviluppabile: la sua equaz. si ottiene eliminando t fra le 2 equaz. $(X - x(t))\lambda + (Y - y(t))\mu + (Z - z(t))\nu = 0$, $(X - x(t))\xi + (Y - y(t))\eta + (Z - z(t))\zeta = 0$ (λ, μ, ν coseni direttori della binormale, ξ, η, ζ della normale principale). Lo spigolo di regresso è la curva stessa.

Evolute ed evolventi. Sulla superficie sviluppabile di dianzi esiste una semplice infinità di linee di equaz. $X = x(t) + (c - s)\alpha$, $Y = y(t) + (c - s)\beta$, $Z = z(t) + (c - s)\gamma$ (α, β, γ coseni direttori della tangente alla linea data ed s l'arco di questa, c una costante arbitraria) che incontrano normalmente le tangenti alla data linea. Codeste curve diconsi **evolventi** della data e quest'ultima **evoluta** di quelle.

Data una linea $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, la semplice infinità delle sue evolute è data da $X = x + \rho \xi + \rho \operatorname{tg}(\tau + c)\lambda$, $Y = y + \rho \eta + \rho \operatorname{tg}(\tau + c)\mu$, $Z = z + \rho \zeta + \rho \operatorname{tg}(\tau + c)\nu$ ove ρ è il raggio di flessione (Cap. XLVI § 7), $\tau = \int_0^s \frac{ds}{T}$, T il raggio di

torsione, $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ vedi sopra. L'angolo che la tangente all'evoluta forma colla normale principale all'evolvente è $\tau + c$.

b) **Involuppo dei piani rettificanti** è una sviluppabile che dicesi **sviluppabile rettificante**: la sua equaz. si ottiene eliminando t fra le 2 equaz. $(X - x(t)) \xi + (Y - y(t)) \eta + (Z - z(t)) \zeta = 0$, $(X - x(t)) \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{T} \right) + (Y - y(t)) \left(\frac{\beta}{\varrho} + \frac{\mu}{T} \right) + (Z - z(t)) \left(\frac{\gamma}{\varrho} + \frac{\nu}{T} \right) = 0$ (α, β, γ coseni direttori della tangente, ϱ e T raggi di flessione e torsione, $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ vedi sopra). Per ogni valore di t si ha la caratteristica del piano rettificante che dicesi **retta rettificante**. Della sviluppabile rettificante la data curva è geodetica (§ 10 b).

Per un'elica cilindrica la sviluppabile rettificante è il cilindro sul quale sta l'elica.

c) **Involuppo dei piani normali** ad una linea storta è una superficie sviluppabile che dicesi **sviluppabile polare**: la sua equaz. si ottiene eliminando t fra le 2 equaz. $(X - x(t)) \alpha + (Y - y(t)) \beta + (Z - z(t)) \gamma = 0$, $(X - x(t)) \xi + (Y - y(t)) \eta + (Z - z(t)) \zeta = 0$. Per ogni t si ha una generatrice della sviluppabile che è $\perp$ al piano osculatore nel centro del circolo osculatore nel punto corrispondente al valore di t : questa retta dicesi **asse del circolo osculatore** o **retta polare**. Lo spigolo di regresso è il luogo dei centri delle sfere osculatrici (Cap. XLVI, § 12).

6. — **Involuppi di superficie a due parametri**. L'equaz. $f(x, y, z, a, b) = 0$, ove a e b sono 2 parametri che variano in determinati intervalli, rappresenta una famiglia di superficie a 2 parametri; ogni superficie è individuata da una coppia di valori per a e b .

Si prendano le 2 superficie $f(x, y, z, \bar{a}, \bar{b}) = 0$ e $f(x, y, z, \bar{a} + h, \bar{b} + k) = 0$; esse avranno in generale in comune una linea la quale, al tendere di h e k a zero, tende, generalmente, a un gruppo discreto di punti sulla prima superficie. Il luogo di

codesti punti per tutte le superficie della famiglia si dice l'**inviluppo** delle superficie: le superficie della famiglia diconsi **inviluppate**.

L'equaz. dell'inviluppo si ottiene eliminando a e b fra le tre equaz. $f(x, y, z, a, b) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$, supposto che non siano contemporaneamente nulli i minori delle due matrici

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial a} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial b} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial b} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial b} \end{array} \right\}$$

Si ottengono le equaz. parametriche della superficie inviluppo (a e b i parametri) risolvendo per x, y, z il sistema precedente ottenendosi $x = x(a, b)$, $y = y(a, b)$, $z = z(a, b)$. La superficie inviluppo è tangente ad ogni inviluppata.

7. — **Coordinate curvilinee sulle superficie.** Quando una superficie è rappresentata da equaz. parametriche $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, se si fissa un valore v_1 di v resta individuata una linea $x = x(u, v_1)$, $y = y(u, v_1)$, $z = z(u, v_1)$ che sta sulla superficie e che dicesi **una linea $v = \text{costante}$** o più brevemente **una linea v** .

Le funzioni x, y, z essendo supposte continue rispetto ad u, v , al variare di v_1 le curve v coprono la superficie. Col fissare un valore u_1 di u si hanno le **linee u** , $x = x(u_1, v)$, $y = y(u_1, v)$, $z = z(u_1, v)$. Poichè si individua un punto P della superficie dando due valori u_1, v_1 dei parametri, P resta individuato come intersezione delle due linee $u = u_1$, $v = v_1$; i valori u_1, v_1 si dicono **coordinate curvilinee** di P e le linee u e v si dicono **linee coordinate**. Si dice che si eseguisce una trasformazione di coordinate curvilinee quando si ponga $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$. Se la trasformazione è definita da $u = u(\alpha)$, $v = v(\beta)$ le linee u coincidono colle α e le v colle β .

Quando le coordinate u e v di un punto P si legano mediante un'equaz. $\varphi(u, v) = 0$, P descrive una linea sulla superficie: $\varphi(u, v) = 0$ si dice l'**equazione della linea**.

Differenziale ds dell'arco (o elemento lineare) della curva
 $\varphi(u, v) = 0$ è dato da $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ ove si è
 posto $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} +$
 $+\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$, $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$ e du, dv sono legati
 dalla relazione $\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = 0$. La forma $E du^2 +$
 $+ 2F du dv + G dv^2$, escludendo i punti singolari per cui $EG -$
 $- F^2 = 0$, è definita (pag. 188), cioè $EG - F^2 > 0$. Denotando
 con ds_u, ds_v gli archi elementari delle linee u, v ci ha $ds_v =$
 $= \sqrt{G} dv, ds_u = \sqrt{E} du$. I coseni direttori delle tangenti alle
 linee u sono $\cos(ux) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}$; $\cos(uy) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u}$, $\cos(uz) =$
 $= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u}$ e quelli delle tangenti alle linee v sono $\cos(vx) =$
 $= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}$, $\cos(vy) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}$, $\cos(vz) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v}$ e l'angolo
 ω , compreso fra 0 e π , di due linee u, v passanti per uno stesso
 punto è dato da $\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$, $\sin \omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$. Condizione

perchè le linee coordinate u, v siano ortogonali è $F = 0$, nel
 qual caso l'elemento lineare è dato da $ds^2 = E du^2 + G dv^2$.

8. — Curvatura delle linee tracciate sulle superfici.

Sulla superficie $z = z(x, y)$ sia tracciata una linea avente
 in un punto M la tangente che fa con gli assi x e y gli angoli
 α e β , e la normale principale che fa l'angolo ϑ con la nor-
 male alla superficie in M . Il raggio di curvatura della linea
 in M è $\varrho = \frac{\cos \vartheta \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta}$ ove p, q, r, s, t
 sono le notazioni di Monge per le derivate parziali prime e
 seconde di $z = z(x, y)$. Il piano osculatore in M alla linea sega
 la superficie secondo una curva che in M ha la stessa curvatura.
 Basta perciò limitare lo studio della curvatura delle sezioni
 piane.

Sezioni normali per M diconsi le sezioni della superficie con piani contenenti la normale in M ; **oblique** diconsi le sezioni piane per M che non sono normali; una sezione obliqua e normale si dicono **corrispondenti** se hanno la stessa tangente.

Teor. di Meusnier. Il raggio di curvatura di una sezione obliqua è uguale a quello della sezione normale corrispondente pel coseno dell'angolo dei due piani; in altre parole: il centro di curvatura di una sezione obliqua si ottiene proiettando ortogonalmente il centro di curvatura della sezione normale corrispondente.

La curvatura di una sezione normale la cui tangente in M fa con gli assi x e y gli angoli α e β è

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r \cos^2 \alpha + 2 s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

e se si prende una terna di assi di cui l'asse z coincida con la normale alla superficie e il piano $z = 0$ con il piano tangente in M , la stessa curvatura è misurata da

$$1 : \rho = r \cos^2 \alpha + 2 s \cos \alpha \sin \alpha + t \sin^2 \alpha$$

α essendo l'angolo che la tangente forma coll'asse x .

Indicatrice di Dupin. Se a partire da M sopra ogni tangente alle infinite sezioni normali fatte coi piani passanti per la normale in M alla superficie, si porta un segmento uguale alla radice quadrata del valore assoluto dei raggi di curvatura della sezione corrispondente, il luogo dei secondi estremi è la conica $r x^2 + 2 s x y + t y^2 = \pm 1$ che prende il nome di **indicatrice di Dupin**. Se non è $r t - s^2 = 0$ (nel qual caso il punto dicesi parabolico (§ 9)) la conica è a centro. La curvatura delle sezioni normali relative ad uno stesso punto M della superficie varia in ragione inversa del quadrato del corrispondente diametro dell'indicatrice di Dupin. È nulla per le sezioni fatte per gli asintoti della indicatrice (rette osculatrici; § 9). È massima e minima per le sezioni corrispondenti agli assi dell'indicatrice.

Sezioni principali diconsi le due precedenti che hanno la curvatura massima o minima rispetto a tutte le altre sezioni normali relative allo stesso punto M . L'inclinazione delle sezioni principali sull'asse x è data da $\operatorname{tg} 2 \alpha = 2 s : (r - t)$; la formula diventa illusoria nei punti in cui $s = 0$, $t = r$, nel qual caso l'indicatrice diviene un circolo e le sezioni normali hanno tutte la stessa curvatura.

Ombelichi o punti sterici si dicono i punti eccezionali precedenti. In essi $r : (1 + p^2) = s : p q = t : (1 + q^2)$. La sfera ha tutti i suoi punti ombelichi. Sono ombelichi i punti di una superficie di rotazione appartenenti all'asse di rotazione se in essi i meridiani hanno curvatura determinata. Nell'ellissoide si hanno 4 ombelichi che sono gli estremi dei diametri coniugati alle due serie di sezioni circolari (pag. 97).

Curvature principali diconsi le curvature delle sezioni principali; denotiamole con $\frac{1}{\varrho_1}$, $\frac{1}{\varrho_2}$.

Teor. di Eulero. Se φ è l'angolo che la tangente a una sezione normale fa con la tangente alla sezione principale di curvatura $\frac{1}{\varrho_1}$, la sua curvatura è data da $\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_2}$. Sezioni ugualmente inclinate rispetto alle principali hanno ugual curvatura. Due sezioni normali ad angolo retto hanno curvatura la cui somma fa quanto le due curvature principali.

La somma delle due curvature $H = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ e il prodotto

$K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ sono date per la superficie $z = z(x, y)$ da

$$H = \frac{(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}; K = (rt - s^2) : (1 + p^2 + q^2)$$

e in coordinate curvilinee $H = [2 F D' - E D'' - G D] : [E G - F^2]$

$K = (D D'' - D'^2) : (E G - F^2)$, ove E, F, G sono definiti al § 7

D, D', D'' sono i prodotti di $1 : \sqrt{E G - F^2}$ pei 3 determinanti

che hanno come 2^a e 3^a linea comune $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$;

$\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ e come 1^a linea ordinatamente

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}; \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}; \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Curvatura media (o di *Sophie Germain*) della superficie in un punto M dicesi la media aritmetica delle due curvature principali $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right)$. È la media aritmetica delle curvature di tutte le sezioni normali relative ad M .

Superficie ad area minima diconsi le superficie a curvatura media nulla; ogni contorno chiuso, tracciato sopra una simile superficie, ne stacca un'area minore di quella che lo stesso contorno stacca da ogni altra superficie.

Il **catenoide** (superficie di rotazione della catenaria intorno alla direttrice) è l'unica superficie minima di rotazione.

L'**elicoide a piano direttore** (luogo delle normali principali dell'elica circolare) è l'unica superficie minima rigata.

Curvatura totale della superficie in un punto, secondo Gauss, è il prodotto delle due curvature principali $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} =$

$$= \frac{r t - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}. \text{ Se la superficie è data mediante l'equaz.}$$

$f(x, y, z) = 0$, la curvatura totale è espressa da

$$- \begin{vmatrix} 0 & f'_x & f'_y & f'_z \\ f'_x & f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f'_y & f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f'_z & f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} : (f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z)^2$$

In coordinate curvilinee la curvatura totale è data dall'espressione K sopra indicata.

Superfici a curvatura costante sono quelle in cui la curvatura totale è costante: hanno la proprietà che sopra esse (ed esse sole) è possibile trasportare una figura qualunque da un posto ad un altro senza alternarne la forma. La **sfera** è una superficie a curvatura costante positiva $1 : a^2$, se a è il raggio;

la **pseudosfera** (superficie di rotazione della trattrice (pag. 44) intorno all'asintoto) è a curvatura costante negativa $-1:k^2$, se k è il segmento di tangente fra il punto di contatto e l'asintoto.

Superfici applicabili. Quando fra i punti di due superfici S, S' si può stabilire una corrispondenza tale che gli elementi lineari corrispondenti (pag. 336) risultino uguali, le due superfici si dicono **applicabili** l'una sull'altra, nel senso che l'una con semplice flessione si può distenderla senza rottura nè duplicatura sull'altra. Nei punti corrispondenti di due superfici applicabili la curvatura totale è uguale (**Teor. di Gauss**). Le superfici applicabili sul piano sono quelle a curvatura totale nulla, $r^2 - s t = 0$, cioè le **svilupparli**.

$$\text{Curvatura di Casorati: } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} \right).$$

9. — **Rette osculatrici di una superficie in un punto.** Per una tangente qualunque ad una superficie in un punto M ordinario si mandi un piano che contenga la normale alla superficie; esso determina una *sezione normale* della superficie. Se M è un punto di codesta sezione, infinitamente vicino ad M e dx, dy sono gli accrescimenti infinitesimi delle coordinate x, y nel passaggio da M a M' , la distanza di M' dalla tangente alla sezione considerata (cioè al piano tangente) è, all'infuori di infinitesimi d'ordine superiore, $h = [r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2] : \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ ove p, q, r, s, t (derivate parziali prime e seconde di z secondo le notazioni di Monge) sono calcolate in M ; la sezione normale e la sua tangente hanno un contatto generalmente del primo ordine. Ma se il numeratore di h è nullo, la distanza in parola diviene infinitesima di 3° ordine; il contatto fra la sezione e la sua tangente diviene almeno del 2° ordine. Codeste rette si dicono **rette osculatrici**: i loro coseni direttori α, β, γ soddisfano le 2 equaz. $\gamma = p\alpha + q\beta; r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0$. Le rette osculatrici sono reali distinte, reali coincidenti, immaginarie a seconda che $s^2 - r t$ è $> 0, = 0, < 0$.

Iperbolico, parabolico od ellittico dicesi un punto della superficie secondo che in esso $s^2 - r t$ è $> 0, = 0, < 0$. Le superfici sviluppabili hanno tutti i loro punti parabolici; le generatrici sono le rette osculatrici. Quando un punto M è ellittico i punti della superficie nelle sue immediate vicinanze stanno tutti da una stessa banda del piano tangente; se è iperbolico la superficie è in M attraversata dal piano tangente. La superficie avrà divise le regioni di punti ellittici dalla regione di punti iperbolici da una linea di punti parabolici (che può anche essere immaginaria) intersezione di $z = z(x, y)$ con la superficie $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$.

In un punto ellittico M i 2 raggi di curvatura ϱ_1, ϱ_2 sono dello stesso segno; se sulla normale alla superficie in M è $C_1 M = \varrho_1, C_2 M = \varrho_2$, i centri di curvatura delle sezioni normali per M sono compresi nel segmento $C_1 C_2$. In un punto iperbolico M i 2 raggi di curvatura ϱ_1, ϱ_2 sono di segno contrario; se C_1, C_2 sono i corrispondenti centri di curvatura, i centri di curvatura delle sezioni normali per M cadono fuori del segmento $C_1 C_2$.

10. — Linee notevoli sopra una superficie. *a) Asintotiche* diconsi le linee tracciate sopra una superficie le quali hanno in ciascun punto per tangenti le rette osculatrici della superficie. Il piano osculatore delle asintotiche coincide col piano tangente alla superficie.

L'equaz. differenziale delle linee asintotiche sopra una superficie $z = z(x, y)$ è $r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0$ ed in coordinate curvilinee è $D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = 0$ ove D, D', D'' hanno il significato introdotto alla pag. 338. La torsione delle asintotiche è la radice quadrata della curvatura totale cambiata di segno (**Teor. di Enneper**).

Asintotiche delle superficie di rotazione. Se $z = f(R)$ con $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ è l'equaz. della superficie di rotazione, l'equaz. differenziale delle asintotiche è $\left(\frac{d\vartheta}{dR} \right)^2 + \frac{f''(R)}{R f'(R)} = 0$.

Asintotiche dell'elicoide a piano direttore sono le generatrici e le eliche che incontrano normalmente le generatrici.

b) **Geodetiche** diconsi le linee tracciate sopra una superficie le quali hanno come normale principale la normale alla superficie. Esprimendo le coordinate delle geodetiche di una superficie $f(x, y, z) = 0$ in funzione dell'arco della linea stessa, esse debbono soddisfare le equazioni differenziali del 2° ordine: $\frac{d^2 x}{ds^2} : \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d^2 y}{ds^2} : \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d^2 z}{ds^2} : \frac{\partial f}{\partial z}$, oltre che verificare l'equazione $f(x, y, z) = 0$.

Le geodetiche sono le linee che segnano il più breve cammino fra due punti (sufficientemente prossimi) sulla superficie.

Teor. di Clairaut. Nelle superfici di rotazione è costante per ciascun punto P delle geodetiche il prodotto del raggio del parallelo per P per il seno dell'**azimut** (angolo che la geodetica forma col meridiano per P).

Formule di Weingarten. Posti gli assi cartesiani in guisa che l'asse z coincida con la normale nel punto iniziale della geodetica, gli assi x, y sul piano tangente nelle direzioni delle sezioni principali, detto ϑ l'angolo che la geodetica nel punto iniziale M fa con l'asse x (tangente alla sezione di curvatura $1 : \varrho_1$), le equazioni della geodetica (sviluppi in serie delle coordinate) sono $x = \left(s - \frac{s^3}{6 \varrho \varrho_1} + \dots \right) \cos \vartheta$, $y = \left(s - \frac{s^3}{6 \varrho \varrho_2} + \dots \right) \sin \vartheta$, $z = \frac{s^2}{2 \varrho} + \dots$, ove ϱ è il raggio di curvatura della sezione normale per la tangente alla geodetica in M , s l'arco.

c) **Linee di curvatura.** Sono le linee che in ciascun punto hanno per tangente la tangente ad una sezione principale. Per ogni punto della superficie passano 2 linee di curvatura che si incontrano ortogonalmente. Le linee di curvatura della

nea $z = z(x, y)$ hanno per equazione differenziale $0 = \{ p q r - (1 + p^2) s \} dx^2 + \{ (1 + q^2) r - (1 + p^2) t \} dx dy + \{ (1 + q^2) s - p q t \} dy^2$.

Per gli **ombelichi** l'equaz. è identicamente soddisfatta; per essi passa un'infinità di linee di curvatura. Il luogo delle normali alla superficie lungo ogni linea di curvatura (e solo lungo codeste linee) è una superficie sviluppabile. Lo spigolo di regresso di questa sviluppabile è la linea dei centri di curvatura principali, chiamandosi **centro di curvatura principale** in M , la posizione limite del punto che la normale in M ha in comune con la normale in un punto M' che tende ad M lungo una linea di curvatura per M .

Sulle **superficie di rotazione** le linee di curvatura sono i **meridiani** ed i **paralleli**; sopra ogni sviluppabile, le generatrici sono linee di curvatura. Sull'involuppo di sfere dipendenti da un unico parametro, le caratteristiche (§ 3) sono linee di curvatura.

11. — **Volume racchiuso da superficie.** Volume racchiuso da una superficie S , priva di punti o di linee multiple (pag. 331) è il limite dei volumi racchiusi dalle superficie poliedriche $\mathfrak{S}$ inscritte in S al tendere allo zero della massima faccia di $\mathfrak{S}$, in guisa che a zero vada la massima corda tracciabile nei poligoni di $\mathfrak{S}$.

Se S è una superficie incontrata da ogni parallela all'asse z in un punto solo e che si proietta parallelam. a z sul piano xy in un campo C , il volume racchiuso dalla S dal piano xy e dalla superficie cilindrica che ha come direttrice il contorno di C e come generatrici le parallele a z , è il limite dei volumi racchiusi da una superficie poliedrica inscritta in S , dal piano xy e dai piani che proiettano ortogonalmente sul piano xy il contorno della superficie poliedrica, al tendere a zero della massima faccia della superficie poliedrica stessa.

Calcolo dei volumi. Data una superficie S che riferita ad un sistema ortogonale di assi ha per equaz. $z = f(x, y)$, posta da una stessa banda del piano xy , proiettantesi ortogonalmente sul piano stesso nel campo C , l'integrale $\iint_C f(x, y) dx dy$ (Cap. XL, § 1) rappresenta il volume racchiuso dalla superficie S , dal piano xy e dalla superficie cilindrica che ha per

direttrice il contorno di C e le generatrici $\parallel$ all'asse z . Se $f(x, y)$ cambia segno, l'integrale detto rappresenta la differenza fra i volumi delle porzioni di spazio dianzi definito che si trovano da bande opposte del piano xy . Se si fa uso delle *coordinate cilindriche* (pag. 16) il volume di dianzi è $\int \int_C f(\varrho, \omega) \varrho d\varrho d\omega$ se $z = f(\varrho, \omega)$ è l'equaz. della superficie.

Una porzione di spazio può essere limitata da una superficie S la quale può spezzarsi, mediante una linea L , in due parti ciascuna delle quali incontrata dalle rette $\parallel$ all'asse z in un punto solo: codeste due parti saranno rappresentabili da due equazioni $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ entrambe proiettantesi sul piano xy in un campo C , il cui contorno è la proiezione di L . Allora se per ogni punto di C è $z_2 \geq z_1$, il volume racchiuso da S è dato da $\int \int_C \{z_2(x, y) - z_1(x, y)\} dx dy$. Talora una porzione di spazio è limitata da 2 pezzi di superficie appartenenti rispettiv. alle superficie $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ e da un cilindro con generatrici $\parallel$ all'asse z su cui si appoggiano i contorni dei 2 pezzi detti di superficie. Se C è il campo del piano xy avente per contorno la direttrice del detto cilindro, il volume della porzione di spazio è ancora $\int \int_C \{z_2(x, y) - z_1(x, y)\} dx dy$.

Quando la porzione di spazio di cui si vuole il volume è limitata da una superficie incontrata dalle parallele a z in più di 2 punti, si spezza (coll'aggiunta opportuna di superfici ausiliarie) in parti ognuna delle quali sia dei tipi dianzi descritti; oppure se la porzione di spazio è limitata da due superficie l'una interna all'altra se ne calcolerà il volume come differenza fra i 2 volumi racchiusi dalle due superficie.

Se Ω è la porzione di spazio di cui si vuole il volume, questo è dato da $\iiint_{\Omega} dx dy dz$ ed in coordin. polari (pagina 268) da $\iiint_{\Omega} \varrho^2 \sin \vartheta d\varrho d\vartheta d\varphi$.

In tutto ciò che precede si suppongono gli assi cartesiani ortogonali; se sono obliqui, le formule che danno i volumi devono moltiplicarsi per il seno del loro triedro (pag. 13). Il volume racchiuso da un pezzo S di superficie $z = z(x, y)$ e dal cono

che ne proietta il contorno dall'origine (supposto che ogni raggio uscente dall'origine incontri in un sol punto la superficie) è dato da $\frac{1}{3} \iint [z(x, y) - \frac{\partial z}{\partial x} x - \frac{\partial z}{\partial y} y] dx dy$ l'integrazione estesa al campo in cui la superficie si proietta sul piano xy . Se la superficie ha le equaz. parametriche $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ il volume di dianzi è $\frac{1}{3} \iint \Phi(u, v) du dv$ ove

$$\Phi(u, v) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{e l'integrazione è estesa al campo}$$

dei valori di u, v in corrispondenza ai quali si hanno i punti di S . Se la superficie è chiusa l'integrale rappresenta il volume racchiuso dalla superficie.

Se le sezioni di un solido con piani $\perp$ a z sono figure di cui si conosce l'area $\sigma(z)$ in funzione della distanza z del piano segante dal piano xy , la porzione di solido compresa fra le sezioni coi piani $z = z_1$, $z = z_2$ si calcola coll'integrale semplice $\int_{z_1}^{z_2} \sigma(z) dz$.

12. — **Solidi di rotazione.** Se il solido è generato dalla rotazione intorno all'asse z della linea L del piano zy di equaz. $y = f(z)$, le sezioni $\perp$ a z sono cerchi di area $\pi f(z)^2$, onde il volume del solido limitato ai piani $z = z_1$, $z = z_2$ è $\pi \int_{z_1}^{z_2} f(z)^2 dz$; il volume del solido limitato dalla superficie di rotazione, da 2 piani per l'asse z formanti fra loro l'angolo ϑ (in radianti) e dai piani $z = z_1$, $z = z_2$ è $\frac{\vartheta}{2} \int_{z_1}^{z_2} f(z)^2 dz$. Una linea chiusa L_1 del piano zy ruoti intorno a z ; sia L_1 tutta da una banda dell'asse z e scomponibile in 2 archi, ciascuno incontrato in un solo punto dalle $\parallel$ a y , di equaz. $y = y_1(z)$, $y = y_2(z)$ (con $|y_2| \geq |y_1|$). Il solido limitato dalla superficie generata dalla rotazione di L_1 ha per sezioni coi piani $z = z'$ le corone circolari di area $\pi(y_2(z')^2 - y_1(z')^2)$ onde il volume del solido è

$\pi \int_{z_1}^{z_2} \{ y_2(z)^2 - y_1(z)^2 \} dz$, se z_1 e z_2 sono i valori minimo e massimo di z su L_1 .

Nel piano yz sia data la linea $y = y(t)$, $z = z(t)$ che ruota intorno a z ; il volume racchiuso dalla superficie di rotazione e dei piani $z = z_1$, $z = z_2$ è $\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 z'(t) dt$ se t_1, t_2 sono i due valori di t per cui $z_1 = z(t_1)$, $z_2 = z(t_2)$.

Se l'equaz. della superficie di rotazione, in coordinate cilindriche (pag. 16) è $z = f(\varrho)$, il volume compreso fra la superficie, i cilindri per i paralleli di raggi ϱ_1, ϱ_2 ed il piano xy è $2\pi \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} f(\varrho) \varrho d\varrho$.

Teorema di Guldino. Un'area piana, di misura A , ruoti intorno ad un asse del suo piano che non l'incontra (o tutt'al più fa parte del suo contorno o lo tange); essa genera un solido di rotazione il cui volume si ottiene moltiplicando l'area A per la lunghezza della circonferenza generata dal **baricentro** dell'area stessa: onde se il baricentro dista dall'asse di δ , il volume è $2\pi \delta A$.

13. — **Calcolo di alcuni volumi.** L'ottava parte dell'**ellissoide** di semiassi a, b, c (pag. 89) che sta nel 1° ottante ha il volume

$$\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}} dy \int_0^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dz = c \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}} dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{\pi abc}{6}, \text{ onde il volume dell'intero ellissoide è } \frac{4}{3} \pi abc. \text{ Pel}$$

calcolo del 2° integrale si pone $y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin t$.

Per la **sfera**, basta fare $a = b = c$ per avere il volume totale $\frac{4}{3} \pi a^3$. Per avere il volume dell'**ellissoide** di dianzi com-

preso fra i piani $z = z_1, z = z_2$ si osservi che la sezione con il piano $z = \bar{z}$ è l'ellisse $\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{\bar{z}^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{\bar{z}^2}{c^2}\right)} = 1$ di

semiassi $a \sqrt{1 - \frac{\bar{z}^2}{c^2}}$, $b \sqrt{1 - \frac{\bar{z}^2}{c^2}}$ e di area $\pi a b \left(1 - \frac{\bar{z}^2}{c^2}\right)$ quindi il richiesto volume è dato da $\pi a b \int_{z_1}^{z_2} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz =$
 $= \frac{\pi a b (z_2 - z_1)}{3 c^2} \{3 c^2 - (z_2^2 + z_1 z_2 + z_1^2)\}$. Facendo $z_1 = -c$, $z_2 = c$, si ha il volume totale.

Per calcolare il volume dell'**asteroide solido** (pag. 75) si osserverà che la sezione col piano $z = z'$ è l'asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}} - z'^{\frac{2}{3}}$ la cui area (pag. 303) è $\frac{3}{8} \pi \left(r^{\frac{2}{3}} - z'^{\frac{2}{3}}\right)^3$ e quindi il volume è $\frac{3}{4} \pi \int_0^r \left(r^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{2}{3}}\right)^3 dz = \frac{4}{35} \pi r^3$.

Il volume racchiuso dall'**iperboloide ad una falda** (pag. 90) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e dai due piani $z = 0$, $z = z_1$, è $\pi a b \int_0^{z_1} \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{\pi a b z_1}{3 c^2} (3 c^2 + z_1^2)$. In particolare il volume compreso fra i piani $z = 0$, $z = c$ eguaglia quello dell'ellissoide che abbia gli stessi *assi*. Il volume racchiuso dal **paraboloide ellittico** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ e dal piano $z = z_1$ ($z_1 > 0$) è $2 \pi a b \int_0^{z_1} z dz = \pi a b z_1^2$.

Il volume racchiuso da **due cilindri di raggio r** i cui assi sono normali (gli assi y e z) è $8 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = \frac{16}{3} r^3$. Se i cilindri hanno raggi diversi e precisamente $a, k a$, cioè hanno le equazioni $x^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = k^2 a^2$ il volume è $8 \int_0^{ka} \sqrt{a^2 - x^2} \int_0^{\sqrt{k^2 a^2 - x^2}} dy = 8 \int_0^{ka} \sqrt{(a^2 - x^2)(k^2 a^2 - x^2)} dx$ che con la sostituzione $x = k a \sin \varphi$ si trasforma in $8 k^2 a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{8}{3} a^3 \{ (1 + k^2) E(k) - (1 - k^2) F(k) \}$, ove $E(k)$, $F(k)$ sono gli integrali ellittici completi definiti a pag. 297.

Il volume del **toro** (pag. 74) è $2\pi a \cdot \pi r^2$ se r è il raggio di una sezione normale, a il raggio del circolo descritto dal centro del circolo che ruota (vedi teor. di Guldino al § precedente).

Volume del solido di Viviani, cioè del volume che il cilindro $x^2 + y^2 = ax$ stacca dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Usando delle coordinate cilindriche (pag. 16) l'equazione della sfera è $\varrho^2 + z^2 = a^2$, quella del cilindro $\varrho = a \cos \vartheta$

$$\text{onde il volume richiesto è } 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{a \cos \vartheta} \sqrt{a^2 - \varrho^2} \varrho d\varrho = \\ = \frac{4a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \vartheta) d\vartheta = \frac{2}{3} \pi a^3 - \frac{8}{9} a^3$$

Volume del catenoide, generato dalla rotazione della catenaria (pag. 44) intorno all'asse z , compreso fra il circolo di gola ($z=0$) e il piano $z=z_1$ è $\frac{a^2 \pi}{4} \int_0^{z_1} \left(e^{\frac{2z}{a}} + e^{-\frac{2z}{a}} + 2 \right) dz =$

$$= \frac{\pi a^3}{8} \left(e^{\frac{2z_1}{a}} - e^{-\frac{2z_1}{a}} \right) + \frac{a^2 \pi z_1}{2}.$$

Facendo ruotare l'**asteroide** $(y-a)^{2/3} + z^{2/3} = r^{2/3}$ ($a > r$) intorno all'asse z si ha, pel teor. di Guldino (pag. 346), che il volume del solido generato è $2\pi a \cdot \frac{3}{8} \pi r^2$. Facendo ruotare intorno all'asse z l'**asteroide** $y^{2/3} + z^{2/3} = r^{2/3}$ il volume del solido generato è $2\pi \int_0^r (r^{2/3} - z^{2/3})^3 dz = \frac{32\pi r^3}{105}.$

Il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse z della **lemniscata** $(z^2 + y^2)^2 = 2a^2(z^2 - y^2)$ è

$$2\pi \int_0^{a\sqrt{1/2}} \left\{ a\sqrt{a^2 + 4z^2} - a^2 - z^2 \right\} dz = \pi a^3 \left[\log(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3} \right].$$

Facendo ruotare la **cicloide** $z = r(\vartheta - \sin \vartheta)$, $y = r(1 - \cos \vartheta)$ intorno all'asse z , il volume racchiuso dalla rotazione dell'arco compreso fra due cuspidi successive è $\pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \vartheta)^3 d\vartheta = 5\pi^2 r^3$. Facendo ruotare il detto arco di cicloide intorno alla tangente nel vertice, il volume racchiuso dalla superficie di rotazione e dai piani normali all'asse per le due cuspidi è dato da

$$2 \pi r^3 \int_0^\pi (1 + \cos \vartheta)^2 (1 - \cos \vartheta) d\vartheta = 2 \pi r^3 \int_0^\pi (\sin^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta = \pi^2 r^3.$$

14. — **Area di una superficie.** Dato un pezzo S di superficie $z = z(x, y)$ che si proietta sul piano xy in un campo C , si divida questo in parti ω_s e si conducano le superfici cilindriche aventi per direttrici i contorni delle ω_s e per generatrici delle rette parallele a z : queste superficie divideranno S in parti σ_s . In un punto qualsivoglia di σ_s si mandi il piano tangente e si consideri quella parte τ_s di piano tangente che si proietta in ω_s . Il limite della somma di tutti i τ_s , al tendere a zero della massima corda inscritta in ω_s , dicesi **area** di S : essa à calcolata dall'integrale

$$A = \int_C \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (\text{che si usa scrivere } \int_C \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, \text{ usando delle notazioni di Monge } p = z'_x, q = z'_y), \text{ esteso a } C. \text{ Si dimostra che il valore di } A \text{ è indipendente dall'orientamento degli assi.}$$

Se le equaz. della superficie sono $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, ed i parametri u, v variano nel campo K , l'area è $\iint \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$, l'integrazione estesa a K e ove

$$A = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad B = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \\ C = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Se si usano le coordinate cilindriche (pag. 16) e l'equaz. della superficie è $z = f(\varrho \cos \omega, \varrho \sin \omega)$, l'area è data da

$$A = \int_C \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^2 + \varrho^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right)^2} d\varrho d\omega. \text{ Se la superficie ha l'equaz.}$$

$\varrho = f(\vartheta, \varphi)$ in coordinate polari

$$A = \int_{C_1} \sqrt{\left[f(\vartheta, \varphi)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right)^2\right] \sin^2 \vartheta + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2} f(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi$$

l'integrazione doppia estesa al campo C_1 di variabilità per ϑ e φ .

15. — **Area delle superficie di rotazione.** La curva L del piano zy di equaz. $y = \varphi(z)$ ruotando intorno a z genera una

superficie la cui parte limitata dai piani $z = z_1, z = z_2$ è misurata da $A = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) \sqrt{1 + \varphi'(z)^2} dz$ e si vuole la parte limitata fra due meridiani che formano fra loro l'angolo ϑ (in radianti) e gli stessi paralleli, da $\vartheta \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) \sqrt{1 + \varphi'(z)^2} dz$. Se la curva L del piano zy ha l'equaz. polare $\varrho = \varrho(\omega)$ (l'asse di rotazione essendo l'asse polare) l'area è

$A = 2\pi \int_{\omega_1}^{\omega_2} \varrho(\omega) \sin \omega \sqrt{\varrho(\omega)^2 + \varrho'(\omega)^2} d\omega$, se ω_1, ω_2 sono le anomalie degli estremi di L . Se la curva L ha le equaz. parametriche $y = y(t), z = z(t)$, si ha $A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$ essendo t_1, t_2 i valori per cui $z(t_1) = z_1, z(t_2) = z_2$. Se la superficie di rotazione ha l'equaz. in coordinate cilindriche $z = f(\varrho)$ l'area compresa fra 2 meridiani $\omega = \omega_1, \omega = \omega_2$ e 2 paralleli $\varrho = \varrho_1, \varrho = \varrho_2$, è $(\omega_2 - \omega_1) \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \sqrt{1 + f'(\varrho)^2} \cdot \varrho d\varrho$.

Teor. di Guldino. Se una linea piana L di lunghezza l ruota intorno ad un asse del suo piano (rispetto al quale essa sta tutta da una banda) genera una superficie di rotazione la cui area è data dal prodotto di l per la lunghezza del cerchio descritto dal barincentro di L .

16. — **Calcolo dell'area di alcune superficie.** Per la sfera di raggio r , l'area della zona compresa fra i piani $z = z_1, z = z_2$ è dato da $\iint \frac{dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$, l'integrazione estesa alla corona circolare di raggi $\sqrt{r^2 - z_1^2}, \sqrt{r^2 - z_2^2}$, od anche, considerando la zona come la superficie generata dalla rotazione dell'arco conveniente di cerchio, da $2\pi r \int_{z_1}^{z_2} dz = 2\pi r (z_2 - z_1)$. L'area totale della sfera è $4\pi r^2$.

L'area racchiusa dalla **curva di Viviani** (pag. 76) sulla

$$\begin{aligned} \text{sfera di raggio } r &= 4r \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{x(r-x)}} \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = 4r \int_0^r \arcsen \sqrt{\frac{x}{r+x}} dx = \\ &= 4r^2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsen \vartheta \frac{2\vartheta d\vartheta}{(\vartheta^2 - 1)^2} = 4r^2 \left[\frac{1}{1 - \vartheta^2} \arcsen \vartheta - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1 - \vartheta} - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + \vartheta} - 1} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2(\pi - 2)r^2. \end{aligned}$$

Questa formula risolve il problema proposto dal *Viviani* nel 1692, di aprire 4 finestre uguali in una volta emisferica in guisa che la parte rimanente sia perfettamente quadrabile.

L'area dell'**ellissoide** è data da $A = 8 \int \sqrt{\frac{1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} - \frac{\eta^2 y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy$

l'integrazione estesa alla quarta parte dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ che sta nel 1° quadrante, ε l'eccentricità della sezione col piano $y = 0$, η quella della sezione col piano $x = 0$. Se si pone

$x = a \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - \varepsilon^2}} \cos \vartheta$, $y = b \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - \eta^2}} \sin \vartheta$ l'integrale diviene

$$A = 2\pi ab \left\{ \int_1^\infty \frac{(1 - \varepsilon^2) t^2 dt}{(t^2 - \varepsilon^2) \sqrt{(t^2 - \varepsilon^2)(t^2 - \eta^2)}} + \int_1^\infty \frac{(1 - \eta^2) t^2 dt}{(t^2 - \eta^2) \sqrt{(t^2 - \varepsilon^2)(t^2 - \eta^2)}} \right\}$$

Se poniamo $\varepsilon = \sin a$, $\eta = k \sin a$, con che $a = \arccos \frac{c}{a}$,

$k = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$ e facciamo la sostituzione $t = \sin a : \sin \varphi$,

$$\begin{aligned} \text{abbiamo } A &= \frac{2\pi ab}{\sin a} \left\{ \cos^2 a \int_0^a \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - k^2 \sin^2 a) \int_0^a \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right\} = \\ &= \frac{2\pi ab}{\sin a} \left\{ \cos^2 a F(k, a) + \sin^2 a E(k, a) + \sin a \cos a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 a} \right\} \end{aligned}$$

(ove $F(k, a)$, $E(k, a)$ sono gli integrali ellittici definiti al Capitolo XLIV, § 9) finalmente si ha la **formula di Legendre**

$$\begin{aligned} A &= 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left\{ c^2 F\left(\frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \arccos \frac{c}{a}\right) + \right. \\ &\quad \left. + (a^2 - c^2) E\left(\frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \arccos \frac{c}{a}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Un valore approssimato del 2° membro è $4\pi \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}$.

L'area dell'ellissoide di rotazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b$ (sferoide schiacciato) è dato da

$A = \frac{4\pi a}{b^2} \int_0^b \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)z^2} dz$ e con la sostituzione

$$z = b^2 t : \sqrt{a^2 - b^2}, \quad A = \frac{4\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^{\frac{1}{b} \sqrt{a^2 - b^2}} \sqrt{1 + t^2} dt = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \text{ Se } a < b \text{ (sferoide allungato)}$$

$A = \frac{4\pi a}{b^2} \int_0^b \sqrt{b^4 - (b^2 - a^2)z^2} dz$ e ponendo $z = b^2 t : \sqrt{b^2 - a^2}$

$$A = \frac{4\pi a b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \int_0^{\frac{1}{b} \sqrt{b^2 - a^2}} \sqrt{1 - t^2} dt = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$$

L'area del **toro** generato dalla rotazione di un circolo di raggio r il cui centro dista di $a \geq r$ dall'asse di rotazione è $2\pi r \cdot 2\pi a$, in seguito al teor. di Guldino.

Facendo ruotare l'arco minore di detto circolo che sta da una banda dell'asse di rotazione quando $a < r$, si ha

$$A = r \int_{-\sqrt{r^2 - a^2}}^{\sqrt{r^2 - a^2}} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right) dz = 4\pi r \left\{ \sqrt{r^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{r} \right\}; \text{ e se si fa ruotare l'arco maggiore}$$

$$A = 4\pi r \left\{ a\pi + r\sqrt{r^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{r} \right\}.$$

Facendo ruotare l'asteroide $y^{2/3} + z^{2/3} + r^{2/3}$ intorno a z , la superficie di rotazione ha l'area $A = 4\pi r^{1/3} \int_0^r z^{-1/3} (r^{2/3} - z^{2/3})^{2/3} dz = \frac{12}{5} \pi r^2$. Facendo ruotare lo stesso asteroide intorno ad una parallela all'asse z per una cuspide posta sull'asse y , $A = 2\pi r \cdot 6r$ (dedotta dal teor. di Guldino). Se si fa ruotare lo stesso asteroide intorno alla retta che unisce due cuspidi successive si ha $A = 6\pi r \sqrt{2}$.

Facendo ruotare la **cardioide** $\varrho = 2a(1 + \cos \omega)$ (pag. 42) intorno all'asse polare (di simmetria)

$$A = 8a^2 \pi \int_0^\pi (1 + \cos \omega) \sin \omega \sqrt{2(1 + \cos \omega)} d\omega = \frac{128}{5} \pi a^2.$$

Facendo ruotare la **cicloide** (pag. 41) di equaz. parametriche $z = r(\vartheta - \sin \vartheta)$, $y = r(1 - \cos \vartheta)$ intorno all'asse z , l'arco compreso fra due cuspidi successive genera una superficie di rotazione di area $2\pi r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \vartheta) \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)} d\vartheta =$
 $= 16\pi r^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{\vartheta}{2} \frac{d\vartheta}{2} = \frac{64}{3} \pi r^2.$

Facendo ruotare l'arco stesso di cicloide intorno alla tangente nel vertice, $A = 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \vartheta) \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)} d\vartheta = \frac{32}{3} \pi r^2.$

Facendo ruotare lo stesso arco intorno alla normale nel vertice, $A = 2\pi r^2 \int_0^\pi (\pi - \vartheta + \sin \vartheta) \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)} d\vartheta = 8\left(\pi - \frac{4}{3}\right) \pi r^2.$

L'area del **catenoide** generato dalla rotazione intorno a z (*direttrice*) della catenaria $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}} \right)$ e compreso fra i piani $z = 0$ e $z = z_1$ è $\frac{\pi a}{2} \int_0^{z_1} \left(e^{\frac{2z}{a}} + e^{-\frac{2z}{a}} + 2 \right) dz =$
 $= \frac{a}{2} \left(e^{\frac{2z_1}{a}} - e^{-\frac{2z_1}{a}} + 2z_1 \right).$

CAPITOLO XLVIII.

Equazioni differenziali

1. — **Espressioni differenziali a più variabili indipendenti.** Perchè $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ sia il differenziale totale di una funzione $\varphi(x, y)$ o, come si dice, un **differenziale esatto** è necessario e sufficiente che $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Se così è,

$\varphi(x, y) = \int M dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy + c$ (c , costante arbitraria) od anche $\varphi(x, y) = \int_a^x M(x, y) dx + \int N(a, y) dy + c$.

Perchè $M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz$ sia il differenziale totale di una funzione $\varphi(x, y, z)$ ossia un **differenziale esatto**, è necessario e sufficiente che

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Se così è $\varphi(x, y, z) = \int M dz + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] dy +$
 $+ \int \left[P - \frac{\partial}{\partial z} \int M dx - \frac{\partial}{\partial z} \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy \right] dz + c,$
 od anche $\varphi(x, y, z) = \int_a^x M(x, y, z) dx + \int_b^y N(a, y, z) dy +$
 $+ \int P(a, b, z) dz + c.$

Affinchè l'espressione differenziale $M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \dots + M_n dx_n$ ove le M_i sono funzioni continue colle derivate prime delle n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$ in un certo campo, sia un differenziale esatto, è necessario e sufficiente che siano verificate

$$\text{le } n(n-1):2 \text{ equaz. } \frac{\partial M_i}{\partial x_{i+h}} = \frac{\partial M_{i+h}}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2 \dots n, h = 1, 2 \dots n-i).$$

La funzione $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che ha la data espressione come differenziale totale, è $\int_{a_1}^{x_1} M_1(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 +$
 $+ \int_{a_2}^{x_2} M_2(a_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 + \int_{a_3}^{x_3} M_3(a_1, a_2, x_3, \dots, x_n) dx_3 +$
 $+ \dots + \int_{a_{n-1}}^{x_{n-1}} M_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x_{n-1}, x_n) dx_{n-1} +$
 $+ \int M_n(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n) dx_n + c.$

2. — **Equazione differenziale** è una equazione fra una funzione incognita, la variabile indipendente e le derivate successive della funzione.

Ordine di un'equaz. differenziale è l'indice più alto di derivazione che vi compare.

Integrare un'equazione significa determinare tutte le funzioni che la soddisfano.

3. — **Equazione differenziale del primo ordine** dicesi un'equaz. $f(x, y, y') = 0$ fra la funz. incognita y , la variabile indipendente x e la derivata prima di y . Se si trova una funz. $y = y(x, c)$ con c costante arbitraria, la quale soddisfa all'equaz. proposta o, in altre parole, se eliminando c fra $y = y(x, c)$ e $y' = \frac{\partial y(x, c)}{\partial x}$, si ricade in $f(x, y, y') = 0$, si dice che $y = y(x, c)$ è l'**integrale generale** dell'equaz. data. Per ogni valore della costante c si ha un **integrale particolare**. Si dice anche che si è trovato l'integrale generale quando si è giunti alla conoscenza di una equazione $F(x, y, c) = 0$ atta a definire y in funz. di x e c , che soddisfa, qualunque sia c , all'equazione $f(x, y, y') = 0$ o, in altre parole, se eliminando c fra $F(x, y, c) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ si ricade in $f(x, y, y') = 0$.

Teor. di esistenza dell'integrale. Se $f(x, y, y') = 0$ è un'equazione differenziale del 1° ordine, dove f è simbolo di funzione continua in un campo C (a tre dimensioni x, y, y'), con derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ finite e continue e di più $\frac{\partial f}{\partial y'}$ sempre di un segno, se infine esiste una terna di valori x_0, y_0, y'_0 per cui $f(x_0, y_0, y'_0) = 0$, sempre esiste, in un determinato intorno di x_0 , una funzione continua $y(x)$, avente derivata continua $y'(x)$, la quale soddisfa all'equaz. e per $x = x_1$ diviene $y(x_1) = y_1$, essendo x_1, y_1 valori prefissati arbitrariamente entro C ; e questa funzione è unica.

In particolare l'esistenza dell'integrale dell'equaz. $y' = f(x, y)$ si dimostra sotto l'ipotesi della sola continuità di f rispetto ad x e y in un campo C e si dimostra l'unicità dell'integrale che in $x = x_0$ prende il valore y_0 , essendo x_0, y_0 una coppia di prefissati valori in C , ammettendo verificata la **condizione di Lipschitz** $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < k |y_1 - y_2|$, con k numero finito fisso e y_1, y_2 due valori qualunque di y in C .

Essendo x_0, y_0 un punto di un conveniente campo (il campo

C del teor. precedente) ponendo per c un opportuno valore si trova dall'integrale generale quell'integrale particolare y che in $x = x_0$ ha il valore y_0 .

Geometricamente, l'integrale generale rappresenta una famiglia semplicemente infinita di curve che diconsi le **curve integrali**; ogni curva si individua ponendo un particolare valore per la costante arbitraria. La proprietà precedente si enuncia dicendo che per ogni punto del campo C passa una ed una sola curva integrale.

Notiamo che la ricerca delle curve che hanno una determinata proprietà rispetto alla tangente o alla normale, dipende, in generale, dall'integrazione di un'equaz. differenziale del 1° ordine. Avendo presente la definizione di velocità in un moto rettilineo (Cap. LV, § 2) si vede che la determinazione dei moti rettilinei in cui la velocità abbia una determinata relazione con lo spazio percorso e col tempo porta, in generale, all'integrazione di un'equaz. differenziale di 1° ordine; esiste, in generale, un solo moto che fa trovare il punto in una assegnata posizione in un tempo prefissato.

Integrale singolare dicesi ogni funzione che soddisfa l'equazione ma non deducibile dall'integrale generale ponendo per la costante arbitraria un particolare valore: potrà esistere l'integrale singolare quando non sono verificate le condizioni del teorema di esistenza su riferito. Se eliminando c fra $F(x, y, c) = 0$ (integrale generale) e $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$, si trova una equazione $\varphi(x, y) = 0$, le funzioni y di x definite da codesta equazione sono integrali singolari. L'involuppo delle curve dell'integrale generale è un integrale singolare (Cap. XLV, § 14).

Se la funzione $y = \mu(x)$ ottenuta eliminando y' fra $f(x, y, y') = 0$ e $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = 0$ è un'integrale dell'equazione $f(x, y, y') = 0$, è, in generale, un'integrale singolare.

Se μ è un fattore integrante (§ 4), $1 : \mu = 0$ dà un integrale singolare.

4. — **Equazione differenziale esatta.** Se un'equazione $y' = f(x, y)$ si può mettere sotto la forma $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ ove $M dx + N dy$ è un differenziale esatto (§ 1), l'equaz. dicesi **differenziale esatta**: l'integrale si ottiene eguagliando ad una costante arbitraria la funzione di cui $M dx + N dy$ è differenziale totale, trovata al § 1.

Fattore integrante. Se nell'equaz. $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ il 1° membro non è un differenziale esatto, una funzione $\mu(x, y)$ tale che $\mu(M dx + N dy)$ sia un differenziale esatto dicesi **fattore integrante**. Se $u(x, y) = c$ è integrale dell'equaz., il prodotto di μ per $\varphi(u)$, φ simbolo di funzione arbitraria, è un fattore integrante. Ogni fattore integrante soddisfa all'equazione alle derivate parziali del 1° ordine $\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial y}$.

Mediante più fattori integranti $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_n$ il primo membro diviene differenziale esatto di più funzioni $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y) \dots \varphi_n(x, y)$, ciascuna delle quali fornisce un integrale generale dell'equaz. proposta: ma, queste funzioni non sono indipendenti (Cap. XLI, § 3); ognuna di queste funzioni si può esprimere in funzione dell'altra, cioè $\varphi_n = F(\varphi_k)$, ossia tutte le equaz. $\varphi_n(x, y) = c_n$ definiscono una stessa funzione y di x soddisfacente l'equazione proposta.

5. — **Equazioni a variabili separate o riducibili a tali.**

a) Se nell'equaz. $M dx + N dy = 0$, M è funzione della sola x e N della sola y dicesi che le variabili sono **separate**. L'integrale è $\int M(x) dx + \int N(y) dy = c$.

Se $M = \varrho_1(x) \sigma_1(y)$, $N = \varrho_2(x) \sigma_2(y)$ l'equazione si rende alle variabili separate dividendo per $\varrho_2(x) \sigma_1(y)$; l'integrale è $\int \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} dx + \int \frac{\sigma_2(y)}{\sigma_1(y)} dy = c$.

b) **Equazione omogenea** si dice l'equaz. $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ se M ed N sono funzioni omogenee e dello stesso grado (Cap. XXXVII, § 8) in x e y .

Se m è il grado di omogeneità, col dividere l'equaz. per x^m si

riduce a $M_1 \left(\frac{y}{x} \right) dx + N_1 \left(\frac{y}{x} \right) dy = 0$. Posto $y = z x$, ed $M_1(z) : N_1(z) = \vartheta(z)$ l'equaz. si riduce a $\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z + \vartheta(z)}$ che è a variabili separate; il suo integrale è $\log cx + \int \frac{dz}{z + \vartheta(z)} = 0$ od anche $cx = e^{\psi(z)}$ posto $\psi(z) = - \int \frac{dz}{\vartheta(z) + z}$.

b) Per l'equazione $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$, supposto $ab_1 - a_1b \neq 0$ si faccia il cambiamento di variabili $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$ prendendo α e β in modo da rendere il secondo membro quoziente di due funzioni lineari omogenee; se poi $ab_1 - a_1b = 0$ non essendo nessuno dei coefficienti nullo, notando che $a = \frac{b}{b_1} a_1$, $b = \frac{b}{b_1} b_1$ e ponendo $a_1x + b_1y = z$ si riduce a $dx - \frac{z + c_1}{bz + cb_1 + (z + c_1)a_1} dz = 0$ che è a variabili separate. Se $a = a_1 = 0$ l'equazione si riduce alle variabili separate $dx - \frac{b_1y + c_1}{by + c} dy = 0$. Se $a = b = 0$, posto $a_1x + b_1y = z$, si avrà $dx - \frac{z + c_1}{b_1c + a_1(z + c_1)} dz = 0$ a variabili separate.

6. — a) **Equazione lineare del 1° ordine** è l'equazione $y' + P(x)y + Q(x) = 0$. Moltiplicando pel fattore integrante $e^{\int P dx}$, l'equaz. diviene $d(y e^{-\int P dx}) + Q e^{-\int P dx} = 0$ che è una equaz. esatta, di cui l'integrale è $y = e^{-\int P dx} \{ - \int Q e^{\int P dx} dx + c \}$. Si integra l'equaz. anche col **metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie**. Se h è una costante arbitraria, $y = h e^{-\int P dx}$ è integrale generale dell'equaz. incompleta (od omogenea) $y' + P(x)y = 0$: si tratta di sostituire h con una funzione

$h(x)$ in guisa che $h(x) e^{-\int P dx}$ soddisfi l'equaz. completa (o non omogenea) proposta; si trova $h'(x) = -Q e^{\int P dx}$ onde $h(x) = -\int Q e^{\int P dx} dx + c$. Tre integrali y_1, y_2, y_3 di un'equaz. lineare soddisfano alla relazione $(y_1 - y_2) : (y_2 - y_3) = \text{costante}$.

b) Equazione di Bernouilli è quella del tipo $y' + P(x)y + Q(x)y^n = 0$, la quale, ponendo $z = y^{1-n} : (1-n)$, si riduce all'equazione lineare $z' + (1-n)Pz + Q = 0$.

c) Equazione di Riccati: $y' + L(x)y^2 + M(x)y + N(x) = 0$ si integra se si conosce un'integrale particolare y_1 , perchè ponendo $y = z + y_1$ si trasforma nella $z' + z(2y_1L + M) + Lz^2 = 0$ che è un'equaz. di Bernouilli (cfr. b).

Se L, M, N sono costanti, ed a è una radice in y dell'equaz. $L y^2 + M y + N = 0$, $y = a$ è un integrale particolare. Se $L = \varphi(x) a_1$, $M = \varphi(x) a_2$, $N = \varphi(x) a_3$ con a_1, a_2, a_3 costanti, ed a è radice in y dell'equaz. $a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0$, $y = a$ è integrale particolare. In entrambi i casi, senza ricorrere all'integrale particolare, l'equaz. si riduce alle variabili separate.

Quattro soluzioni particolari y_1, y_2, y_3, y_4 qualunque dell'equazione di Riccati hanno un birapporto (pag. 4) costante; cioè $\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \text{cost.}$ Se quindi sono noti 3 integrali particolari y_1, y_2, y_3 l'integrale generale y è definito da $(y_1 y_2 y_3 y) = c$.

Ponendo $y = \frac{dz}{dx} \frac{1}{Lz}$ l'equaz. di Riccati si trasforma nell'equaz. lineare di 2° ordine $z' + \left(M - \frac{L'}{L}\right)z + LNz = 0$.

7. — Equazioni non risolte per la derivata. *a)* Dell'equaz. $f(y') = 0$ l'integrale generale è dato da $f\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$, equaz. che rappresenta tanti fasci impropri di rette di coefficienti angolari uguali alle radici in t di $f(t) = 0$.

b) $x = \varphi(y')$. Posto $y' = p$, si differenzi l'equaz. e si sostituisca dx con $dy:p$; allora si ha $dy = p\varphi'(p)dp$ da

cui $y = \int p \varphi'(p) dp + c$ che insieme con l'equaz. proposta danno x e y in funzione del parametro p e di una costante. Se si può eseguire l'eliminazione di p , si ha l'integrale generale nel solito modo.

c) $y = \varphi(y)$: differenziando e sostituendo dy con $p dx$ si ha $dx = \frac{\varphi'(p)}{p} dp$ da cui $x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + c$ che insieme con la $y = \varphi(p)$ definiscono x e y in funzione del parametro p e della costante c .

d) **Equazione di Lagrange** (o di **Monge**, o di **D'Alembert**, o di **Clairaut generalizzata**) $y = \varphi(y')x + \psi(y')$ con $\varphi(y') \neq y'$; posto $y' = p$ si differenzi la data equaz. e sostituisca dy con $p dx$; si avrà $\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x - \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} = 0$ che è lineare in x epperò

$$x = e^{\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp} \left\{ \int \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp} dp + c \right\}$$

che con la $y = \varphi(p)x + \psi(p)$ definiscono x e y in funzione del parametro p e della costante c .

e) **Equazione di Clairaut** è l'equaz. precedente in cui $\varphi(y') = y'$, cioè $y = x y' + \psi(y')$. L'integrale generale è $y = cx + \psi(c)$. L'integrale singolare è dato da $x = -\psi'(p)$, $y = px + \psi(p)$. L'integrale generale rappresenta una famiglia di rette, il cui involuppo (pag. 318) è la curva rappresentata dall'integrale singolare.

8. — **Metodo di integrazione per approssimazioni successive.** Sia data un'equaz. $y' = \varphi(x, y)$ ove φ soddisfa alla **condizione di Lipschitz** $|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| < k |y_1 - y_2|$ nel campo $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$, ove è continua. Se M è il massimo di $|\varphi(x, y)|$ nel detto rettangolo si considera x nell'intorno $|x - x_0| \leq \varrho$ ove $\varrho \leq$ al più piccolo dei 3 numeri a , $1:k$, $b:M$. Vogliamo determinare la soluzione (che certo esiste, § 2) che per $x = x_0$ diviene y_0 . Si pone nel 2°

membro dell'equaz. y_0 in luogo di y e si integra l'equazione $y_1' = \varphi(x, y_0)$ che dà $y_1 = \int_{x_0}^x \varphi(x, y_0) dx + y_0$; poi si integra l'equaz. $y_2' = \varphi(x, y_1)$ che dà $y_2 = \int_{x_0}^x \varphi(x, y_1) dx + y_0$ e così procedendo $y_n = \int_{x_0}^x \varphi(x, y_{n-1}) dx + y_0$. Il $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ è l'integrale voluto.

9. — **Integrazione per serie.** Data l'equaz. $y' = f(x, y)$, supponiamo formalmente sviluppata la funzione incognita y in serie di Taylor nell'intorno di un punto x_0 , cioè $y = y_0 + (x - x_0) y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2} y_0'' + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y_0''' + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} y_0^{(n)} + \dots$ ove con $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}, \dots$ intendiamo

il valore di $y, y', \dots, y^{(n)}, \dots$ in x_0 . Dalla equaz. si deduce $y_0' = f(x_0, y_0)$, poi derivandola e ponendo x_0, y_0, y_0' in posto di x, y, y' si ha $y_0'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_{x_0, y_0, y_0'}$ e così successivamente

$$y_0''' = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' \right]_{x_0, y_0, y_0', y_0''}, \dots$$

Si trovano così i successivi coefficienti dello sviluppo in serie di potenze di $x - x_0$. Se la serie che ne risulta è convergente in un intorno di x_0 qualunque sia y_0 , si ha l'integrale generale dell'equaz. proposta sviluppato in serie nell'intorno detto di x_0 , essendo y_0 la costante arbitraria.

10. — **Equazioni di ordine superiore al 1°.** Sia $\varphi(x, c_1, c_2)$ una funzione di x , contenente 2 costanti c_1, c_2 arbitrarie, avente derivate prima e seconda: se si eliminano c_1, c_2 fra le equazioni $y = \varphi(x, c_1, c_2), y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, y'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ si ottiene un'equaz. (1)

$f(x, y, y', y'') = 0$, **differenziale del 2° ordine.** La funzione $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ è tale che soddisfa identicamente la (1) qualunque siano le costanti c_1, c_2 ; essa dicesi **integrale generale** della $f(x, y, y', y'') = 0$. Si dice anche che si è pervenuti all'integrale generale della (1) quando si è ottenuta un'equazione $F(x, y, c_1, c_2) = 0$ tale che eliminando c_1 e c_2 fra essa e le equaz.

che si deducono derivando successivamente rispetto ad x , cioè

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0$$

si ricada in $f(x, y, y', y'') = 0$.

Se $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ è l'integrale generale della (1), col prendere opportunamente i valori delle costanti c_1, c_2 si può far sì che y e la sua derivata y' prendano in $x = x_1$ i valori y_1 e y'_1 , essendo x_1, y_1, y'_1 prefissati valori in un conveniente campo. Geometricamente l'integrale generale rappresenta una doppia infinità di curve che diconsi le **curve integrali**; la proprietà sopra accennata si enuncia dicendo che delle curve integrali, in un conveniente campo, ne passa una per ogni punto ed ha ivi una tangente prefissata (cioè di coefficiente angolare y' prefissato).

Notiamo che la ricerca di curve che abbiano date proprietà rispetto alla tangente, normale e curvatura (pag. 316) porta, generalmente, alla integrazione di un'equaz. differenziale del 2° ordine.

Integrale particolare è ogni funzione che si ottiene dall'integrale generale mettendo 2 numeri in luogo di c_1, c_2 .

Integrali primi. Se s'elimina c_1 fra $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ e $y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ si ha una relazione $\psi(x, y, y', c_2) = 0$ fra x, y, y', c_2 , atta a definire una funzione che soddisfa, insieme con la sua derivata prima la (1), qualunque sia c_2 , od in altre parole, se si elimina c_2 fra $\psi = 0$ e l'equaz. $\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial y'} y'' = 0$ da questa dedotta per derivazione rispetto ad x , si ricade nella (1). Si dice che $\psi(x, y, y', c_2) = 0$ è un **integrale generale primo**. Due sono gli integrali primi generali, potendosi manifestamente eliminare c_2 in luogo di c_1 . Se si conoscono i 2 integrali generali primi, eliminando fra essi y' si trova l'integrale generale.

Integrale particolare primo si dice ogni funzione dedotta

dall'integrale generale primo mettendo un particolare numero in luogo della costante arbitraria che esso contiene.

11. — **Equazioni differenziali di ordine n .** Sia $\varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ una funzione di x contenente n costanti arbitrarie $c_1, c_2, \dots, c_n$, avente le derivate dei primi n ordini; se si eliminano $c_1, c_2, \dots, c_n$ fra le equazioni $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, $y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $y'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\dots$, $y^{(n)} = \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$, si ottiene un'equaz. fra x , variabile indipendente, y ,

funzione di x , e le sue n derivate $y', y'', \dots, y^{(n)}$, cioè (1) $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, **equazione differenziale di n ordine.**

La funzione $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ è tale che soddisfa identicamente la (1) qualunque siano le costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$; essa dicesi **integrale generale** della $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$. Si dice anche che si è pervenuti all'integrale generale della (1) quando si è ottenuta un'equazione $F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ tale che si ricade nella (1) eliminando $c_1, c_2, \dots, c_n$ fra essa e le n equaz. che da queste si deducono per derivazione successiva rispetto ad x ,

$$\begin{aligned} \text{cioè } \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' &= F_1(x, y, y', c_1, c_2, \dots, c_n) = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial F_1}{\partial y} y' + \frac{\partial F_1}{\partial y'} y'' = F_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, \dots, c_n) = 0, \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} &= \end{aligned}$$

$= F_n(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$. Se $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ è l'integrale generale della (1), col prendere opportunamente i valori delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ si può far sì che y e le sue derivate $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ prendano in $x = x_1$ i valori $y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$ essendo $(x_1, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)})$ n prefissati valori scelti in un conveniente campo. Per la dimostrazione dell'esistenza dell'integrale generale, vedi Cap. XLIX, § 1.

Integrale particolare è ogni funzione che si ottiene dall'integrale generale mettendo per $c_1, c_2, \dots, c_n$ particolari numeri.

Integrali i -esimi. Se fra le $n - i + 1$ equaz. $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, $y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $y'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\dots$, $y^{(n-i)} = \frac{\partial^{n-i} \varphi}{\partial x^{n-i}}$ si eliminano le

costanti $c_1, c_2, \dots, c_{n-i}$ si ottiene una equazione differenziale (di ordine $n-i$) $\varphi(x, y, y', y'' \dots y^{(n-i)}, c_{n-i+1}, c_{n-i+2}, \dots, c_n) = 0$ fra la variabile indipendente, la funzione y , le sue prime $n-i$ derivate e le rimanenti i costanti. Se si deduce y in funzione dei rimanenti argomenti essa soddisfa insieme con le prime i derivate alla (1), qualunque siano le costanti $c_{n-i+1}, c_{n-i+2}, \dots, c_n$. Esistono $\binom{n}{i}$ integrali generali i -esimi, essendo $\binom{n}{i}$ i gruppi di $n-i$ costanti da potersi eliminare. In particolare esistono n integrali primi generali $\psi_h(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, c_h) = 0$ ($h=1, 2, \dots, n$). Noti che essi siano, l'integrale generale si ottiene eliminando $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$.

Integrali particolari i -esimi si dicono gli integrali che si deducono da un integrale generale i -esimo ponendo particolari numeri in luogo delle i costanti arbitrarie che esso contiene.

Integrali singolari vedi Cap. XLIX, § 2, b).

12. — **Equazioni lineari omogenee** diconsi le equaz. della forma $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ ove $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sono funzioni di x , o, in particolare, costanti. Si dicono anche **equaz. lineari incomplete** riservandosi il nome di **complete** a quelle che hanno a secondo membro una data funzione della variabile indipendente x .

Se y_1 è un integrale particolare lo è pure $c_1 y_1$ con c_1 costante arbitraria; se y_1, y_2 sono due integrali particolari lo è pure $c_1 y_1 + c_2 y_2$, con c_1, c_2 costanti arbitrarie; più in generale se $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono n integrali particolari lo è pure $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$. Questa funzione che contiene n costanti arbitrarie $c_1, c_2, \dots, c_n$ sarà l'**integrale generale** se le costanti stesse si possono determinare in modo che per $x = x_0$ la y e le $n-1$ derivate $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ acquistino i valori $y_0, y_0', y_0'' \dots y_0^{(n-1)}$ essendo $(x_0, y_0, y_0', y_0'' \dots y_0^{(n-1)})$ un sistema di n valori arbitrariamente prefissati in un conveniente campo. Ciò avviene se il **wronskiano delle n funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$** (Cap. XXXVI, § 9) è disuguale dallo zero. Sotto questa ipo-

tesi $y_1, y_2, \dots, y_n$ diconsi costituire un **sistema di integrali fondamentali** (o **distinti**); onde l'integrale generale di un'equaz. lineare omogenea di n° ordine è la somma dei prodotti degli integrali fondamentali per n costanti arbitrarie, o, come si dice anche, la combinazione lineare degli integrali fondamentali a coefficienti costanti arbitrari.

La conoscenza di un integrale particolare fa abbassare l'ordine dell'equazione di una unità. Sia y_1 un integrale particolare dell'equaz. (1) $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$; posto $y = y_1 z$ si ottiene (1') $z(a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1) + z'(a_0 y^{(n-1)} + (n-1) a_1 y_1^{(n-2)} + \dots + 2 a_{n-2} y_1' + a_{n-1} y_1) + \frac{z''}{2} (n(n-1) a_0 y_1^{(n-2)} + (n-1)(n-2) a_1 y_1^{(n-3)} + \dots + a_{n-2} y_1) + \dots + \frac{z^{(n-1)}}{n-1!} (n! a_0 y_1' + (n-1)! a_1 y_1) + \frac{z^{(n)}}{n!} n! a_0 y_1$ (**formula di D'Alembert**); ma il coefficiente di z

è nullo perchè y_1 è integrale particolare di (1) onde rimane un'equaz. di ordine $n-1$ in z' ; integrata questa e trovata $z' = \vartheta(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ sarà $y = y_1 \int \vartheta(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) dx + c_n$.

Se si conoscono 2 integrali particolari y_1, y_2 , linearmente indipendenti di (1), sarà $\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)$ una soluzione particolare dell'equaz. (2) di ordine $n-1$ in z' la quale pertanto si riduce all'ordine $n-2$. Più in generale, la conoscenza di $m < n$ integrali particolari di (1) linearmente indipendenti, può abbassare l'ordine dell'equaz. all'ordine $n-m$.

Si dimostra che *esiste* sempre un sistema di integrali fondamentali. Non possono esservi più di n integrali linearmente indipendenti, cioè se $y_0, y_1, \dots, y_n$ sono $n+1$ integrali particolari l'uno di essi si può esprimere linearmente per gli altri.

Formula di Liouville. Se nella (1) si sostituiscono successivamente n integrali fondamentali e si eliminano $a_2, a_3, \dots, a_n$ si ha, con calcolo semplicissimo, $a_0 \frac{dW}{dx} + a_1 W = 0$ ove W in-

dica il wronskiano degli n integrali; quest'equaz. si rende alle variabili separate e il suo integrale è $W = c e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$, **formula di Liouville** che esprime il wronskiano mediante i soli primi due coefficienti dell'equaz.

Teor. di Sturm per l'equaz. lineare omogenea del 2° ordine: se y_1, y_2 sono due integrali particolari di $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, fra due radici consecutive di y_1 v'ha una radice di y_2 ed analogamente fra due radici consecutive di y_2 ve n'ha una di y_1 .

13. — **Equazione lineare omogenea a coefficienti costanti** dicesi l'equazione (1) quando $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono costanti; si potrà sempre supporre $a_0 = 1$. Il primo membro dell'equazione (2) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ indichiamolo con $F(y)$ e consideriamo F come un'operazione eseguita su y .

Se F è una di queste operazioni e G è un'altra operazione si dice che si eseguisce il prodotto GF quando su y si opera con F e sul risultato si opera con G ; così se $F(y) = y' - \alpha y$, $G(y) = y' - \beta y$; $GF(y) = G(F(y)) = \frac{d}{dx}(y' - \alpha y) - \beta(y' - \alpha y) = y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y$. L'operazione F gode della proprietà distributiva $F(y + z) = F(y) + F(z)$; $F(cy) = cF(y)$; della commutativa $GF = FG$; se $F(y_1) = 0$ è $G(F(y_1)) = F(G(y_1)) = 0$; $FG(y_1) = 0$; quindi se y_1 è integrale di F , è integrale di FG , e $G(y_1)$ è pure integrale di F ; se y_1 è integrale di FG o è integrale di G o di F oppure $F(y_1)$ è integrale di G e $G(y_1)$ è integrale di F .

Si dice **equazione caratteristica** della (2) l'equazione (3) $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ (ottenuta dalla (2) sostituendo alla derivata i -esima di y la potenza i -esima di una variabile λ). Ora $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \dots (\lambda - \alpha_n)$ se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono le radici dell'equaz. caratteristica; ne consegue che ponendo $F_r(y) = y' - \alpha_r y$ si deduce (Cap. XXV, pag. 177) $F(y) = F_1 F_2 \dots F_n(y)$ ed allora

gli n integrali delle $F_r(y) = 0$ ($r = 1, 2, \dots, n$) sono n integrali di $F(y)$. Ma integrale di $F_r(y) = 0$ cioè di $y' - a_r y = 0$, è $y = e^{a_r x}$.

Se le radici dell'equaz. caratteristica sono distinte, gli n integrali $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}$ sono linearmente indipendenti, onde l'integrale generale di (2) è $y = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \dots + c_n e^{a_n x}$.

Se le radici dell'equaz. caratteristica non sono tutte semplici, la decomposizione del suo primo membro contiene per una radice r -pla a_i il fattore $(x - a_i)^r$ e quindi la decomposizione di F nel prodotto di operazioni di ordine inferiore contiene corrispondentemente il termine $F_i^r = F_i \cdot F_i \cdot \dots \cdot F_i(y) = y^{(r)} - r a_i y^{(r-1)} + \binom{r}{2} a_i^2 y^{(r-2)} + \dots + (-1)^r a_i^r y$, di cui sono integrali linearmente indipendenti $e^{a_i x}, x e^{a_i x}, x^2 e^{a_i x}, \dots, x^{r-1} e^{a_i x}$. Ora si dimostra che questi, insieme cogli integrali degli altri fattori di F , sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono un sistema di integrali fondamentali, appoggiandosi alle considerazioni seguenti: se $F = 0$, $G = 0$ sono a coefficienti costanti non hanno soluzioni comuni se non hanno radici comuni le loro equaz. caratteristiche. Ogni soluzione di $F G = 0$, se $F = 0$, $G = 0$ non hanno radici comuni è della forma $\omega + \omega'$ ove ω è soluzione di $F = 0$ e ω' di $G = 0$.

Si perviene agli stessi risultati anche nel seguente modo. Ponendo $y = e^{\lambda x}$, il 1° membro di (2) diviene $e^{\lambda x} F(\lambda)$ ove $F(\lambda)$ è il 1° membro dell'equaz. caratteristica, epperò ogni volta sia a una radice di $F(\lambda) = 0$ è $e^{a x}$ integrale di (2). Se si pone $y = x e^{\lambda x}$ il 1° membro di (2) diviene $e^{\lambda x} (F'(\lambda) + x F(\lambda))$ epperò se a è radice doppia (pag. 177) di $F(\lambda) = 0$, essendo $F(a) = F'(a) = 0$, è $x e^{a x}$ integrale di (2); più in generale ponendo $y = x^r e^{\lambda x}$ il 1° numero di (2) diviene $e^{\lambda x} [F^{(r)}(\lambda) + \binom{r}{1} x F^{(r-1)}(\lambda) + \binom{r}{2} x^2 F^{(r-2)}(\lambda) + \dots + \binom{r}{r-1} x^{r-1} F'(\lambda) + x^r F(\lambda)]$ da cui si vede che se a è radice multipla d'ordine m (essendo $F(\lambda) = F'(\lambda) = \dots = F^{(m-1)}(\lambda) = 0$) sono integrali $e^{a x}, x e^{a x}, x^2 e^{a x}, \dots, x^{m-1} e^{a x}$: si può poi mostrare diretta-

mente che il wronskiano di queste funzioni e quelle relative alle $n - m$ rimanenti radici di $F(\lambda) = 0$ è diverso da zero.

Notiamo per ultimo che se l'equaz. caratteristica ha le due radici complesse coniugate $a + i b$, $a - i b$, alla somma $c_1 e^{(a + i b)x} + c_2 e^{(a - i b)x}$ si può sostituire $e^{ax} (h_1 \cos bx + h_2 \sin bx)$ posto $2c_1 = h_1 - i h_2$; $2c_2 = h_1 + i h_2$ (formula di Eulero).

Speciali tipi di equazioni lineari. a) L'equaz. $a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$ ove le a_i sono costanti si trasforma in lineare a coefficienti costanti se si pone $x = e^z$. Trovato l'integrale generale dell'equaz. in cui z è la variabile indipendente, si porrà $z = \log x$ e si avrà l'integrale dell'equaz. proposta; cosicchè alla radice semplice a dell'equaz. caratteristica corrisponderà l'integrale particolare x^a e alla radice a multipla d'ordine r gli r integrali x^a , $x^a \log x$, $x^a (\log x)^2, \dots, x^a (\log x)^{r-1}$.

b) L'equaz. $a_0 (p x + q)^n y^{(n)} + a_1 (p x + q)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (p x + q) y' + a_n y = 0$ si riduce alla forma precedente col porre $p x + q = u$.

14. — Equazioni lineari complete diconsi quelle del tipo $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = X$ ove $a_0, a_1, \dots, a_n, X$ sono funzioni di x o, in particolare, costanti. Per l'integrazione indichiamo il metodo delle **variazioni delle costanti arbitrarie** (di Lagrange). Sia $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ la soluzione dell'equazione omogenea ottenuta rimpiazzando X con lo zero; si considerino le $c_1, c_2, \dots, c_n$ non costanti ma funzioni di x ; si determinano le c_h in modo che le loro derivate soddisfino alle n equazioni $c_1' y_1^{(i)} + c_2' y_2^{(i)} + \dots + c_n' y_n^{(i)} = 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-2$), $c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} + c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} = X : a_0$. Dedotte le c_h da questo sistema e posto $c_h = \varphi_h(x)$ sarà $c_h = \int \varphi_h(x) dx + k_h$ ed allora l'integrale generale della proposta equaz. è $y = y_1 \int \varphi_1(x) dx + y_2 \int \varphi_2(x) dx + \dots + y_n \int \varphi_n(x) dx + k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n$ con $k_1, k_2, \dots, k_n$ costanti arbitrarie.

Se $\omega(x)$ è un integrale particolare dell'equaz. completa, $\eta(x)$ l'integrale generale dell'incompleta, $\omega(x) + \eta(x)$ è l'integrale generale della completa. Quest'osservazione si può sfruttare utilmente se $a_0, \dots, a_n$ sono costanti e X una funzione razionale intera, giacchè si trova subito una funz. razionale intera che è integrale particolare.

15. — **Alcuni tipi di equaz. non lineari.** a) L'equazione

$$f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \text{ ponendo } y' = u, \text{ con che } y'' = \frac{d u}{d y} u, \quad y''' =$$

$$= \left(\frac{d u}{d y} \right)^2 u + \frac{d^2 u}{d y^2} u^2, \dots \text{ si trasforma in un'equaz. dell'ordine}$$

$$n - 1, \varphi \left(y, u, \frac{d u}{d y}, \frac{d^2 u}{d y^2}, \dots, \frac{d^{n-1} u}{d y^{n-1}} \right) = 0; \text{ se } u = \psi(y, c_1, c_2, \dots,$$

c_{n-1}) è l'integrale generale, sarà l'integrale generale della

$$\text{proposta equazione } x = \int \frac{d y}{\psi(y, c_1, \dots, c_{n-1})} + c_n.$$

b) L'equaz. $f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, ponendo $y' = u$, diviene $f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) = 0$ che è dell'ordine $n - 1$. Se $u = \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ è l'integr. generale, l'integr. generale della proposta equaz. è $x = \int f(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) dx + c_n$.

c) L'equaz. del tipo $f(x, y^{(r)}, y^{(r+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ si abbassa all'ordine $n - r$ ponendo $y^{(r)} = u$, $f(x, u, u', \dots, u^{(n-r)}) = 0$. Integrata questa si deve integrare l'equaz. $y^{(r)} = u$ che è del tipo f).

d) L'equaz. $f(y' y'' \dots y^{(n)}) = 0$ ponendo $y' = u$ diviene dell'ordine $n - 1$, $f(u, u', u'' \dots u^{(n-1)}) = 0$ e colla sostituzione indicata in a) si riduce all'ordine $n - 2$.

e) **Equazioni omogenee.** a) Dicesi omogenea l'equazione $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ se è omogenea rispetto ad $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ (pag. 237). Posto $y = e^t$ con che $y' = e^t t'$, $y'' = e^t (t'' + t'^2)$, ... l'equaz., previa la divisione per e^t elevato alla potenza uguale al grado di omogeneità, diventa $\psi(x, t', t'', \dots, t^{(n)}) = 0$ (tipo b) il cui ordine può abbassarsi di un'unità. β) Dicesi pure **omogenea** un'equaz. $f(x, y, y' y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ se ponendo λx in luogo di x ,

$\lambda^m y$ in posto di y , $\lambda^{m-1} y'$ in posto di y' , ... $\lambda^{m-r} y^{(r)}$ in posto $y^{(r)}$ ecc., la f si riproduce all'infuori di una potenza p -esima di λ . La ricerca se esista un tale m e quale sia, si fa per tentativi (ad es. dell'equaz. $x^3 y'' - (y - xy')^2 = 0$, $m = 1$). Allora si pone $x = e^t$, $y = e^{mt} z$ e si prende t per variabile indipendente, z per variabile dipendente. Si trova $y' = e^{(m-1)t} (z' + mz)$; $y'' = e^{(m-2)t} (z'' + (2m-1)z' + m(m-1)z) \dots$ in generale $y^{(r)} = e^{(m-r)t} \mu_r$ con μ_r funz. lineare omogenea a coefficienti costanti in $z, z', \dots, z^{(r)}$. Sostituendo e dividendo per e^{mt} , l'equaz. diventa $f(1, z, \mu_1, \dots, \mu_n) = 0$ che è del tipo a).

f) L'equaz. $y'' = f(y)$ si integra con 2 quadrature. Moltiplicando per $2 y' dx$ a sinistra e per $2 dy$ a destra, si ha $d(y'^2) = 2 f(y) dy$ da cui $y'^2 = \int 2 f(y) dy + c_1$, $y' = \sqrt{2 \int f(y) dy + c_1}$, $x + c_2 = \int [2 \int f(y) dy + c_1]^{-\frac{1}{2}} dy$.

g) L'equaz. $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ ha per integrale generale

$$y = \int_0^x \frac{f(t) (x-t)^{n-1} dt}{n-1!} + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n.$$

h) L'equaz. $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$ posto $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = p$ diviene

$$\frac{dp}{dx} = f(p) \text{ da cui } x = \int \frac{dx}{f(p)} + c_1; \text{ se da questa si ricava } p$$

in funzione di x , $p = \psi(x, c_1)$, si deve integrare l'equazione $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \psi(x, c_1)$ che è del tipo g). Se no, $d y^{(n-2)} = p \frac{dp}{f(p)}$

$$\text{e quindi } y^{(n-2)} = \int p \frac{dp}{f(p)} + c_2 \text{ e così } y^{n-3} = \int \frac{dp}{f(p)} \int p \frac{dp}{f(p)} +$$

$$+ c_2 x + c_3, \dots y = \int \frac{dp}{f(p)} \int \frac{dp}{f(p)} \dots \int p \frac{dp}{f(p)} + c_2 x^{n-2} +$$

$$+ c_3 x^{n-3} + \dots c_{n-1} x + c_n \text{ (gli integrali in numero di } n-1 \text{).}$$

Quest'ultima, insieme con $x = \int \frac{dp}{f(p)} + c_1$, costituisce l'integrale generale.

i) L'equaz. $\frac{d^n y}{d x^n} = f \left(\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} \right)$ posto $\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} = p$ di-

viene $\frac{d^2 p}{d x^2} = f(p)$ che è del tipo f). Se dall'integrale di questa si deduce p in funzione di x , $p = \psi(x, c_1, c_2)$, si deve integrare l'equaz. $\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} = \psi(x, c_1, c_2)$ che è del tipo g). Se

no, da $\frac{d^2 p}{d x^2} = f(p)$ si deduce (vedi g)) $dx = \frac{dp}{\varphi(p)}$, posto

$\varphi(p) = \sqrt{2 \int f(p) dp + c_1}$, da cui $y = \int \frac{dp}{\varphi(p)} \int \frac{dp}{\varphi(p)} \dots$
 $\dots \int p \frac{dp}{\varphi(p)} + c_3 x^{n-3} + c_4 x^{n-4} + \dots + c_{n-1} x + c_n$ (gli inte-
 grali in numero di $n-2$).

16. — **Integrazione per serie.** Sia data l'equaz. di ordine n , $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$. Imaginiamo sviluppato l'integrale incognito y nell'intorno del punto x_0 mediante la formula di Taylor $y = y_0 + (x - x_0) y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2} y''_0 + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y'''_0 +$
 $+ \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} y_0^{(n)} + \dots$

Dall'equaz. derivando successivamente rispetto ad x possiamo esprimere tutte le derivate dall' n -esima in poi in funzione di $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Se allora si vuole che per $x = x_0$, $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ debbano divenire $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ arbitrariamente fissati, si trovano i coefficienti dello sviluppo di Taylor dall' $(n+1)$ -esimo in poi, nei quali compaiono le n costanti arbitrarie $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$. Se in un intorno di x_0 ed in un campo determinato ad n dimensioni contenente il punto $(y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ la serie è convergente si ha l'integrale generale della proposta equaz., sviluppato in serie. Se per $x = x_0, y = y_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ la equaz. proposta e quelle che si deducono per derivazione rispetto ad x danno luogo ad incompatibilità, a levare le quali bisogna cambiare i valori fissati arbitrariamente, allora lo sviluppo in serie, anche quando converga, non può che considerarsi un integrale particolare.

Sistemi di equazioni differenziali

1. — **Sistemi di equaz. differenziali del 1° ordine.** Siano date n funzioni (1) $y_i = F_i(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) della variabile x contenenti n costanti arbitrarie $c_1, c_2, \dots, c_n$; deriviamole rapporto ad x e fra le (1) e le n equaz. $y_i' = \frac{\partial F_i}{\partial x}$ eliminiamo le n costanti $c_1, \dots, c_n$; avremo n equaz. della forma (2) $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) che costituiscono un **sistema di n equaz. differenziali del 1° ordine**. Le (1) soddisfano identicamente le (2) qualunque siano le costanti $c_1, \dots, c_n$: esse costituiscono il **sistema integrale generale** del sistema (2). Ogni sistema di funzione dedotto dalle (1) ponendo particolari numeri in luogo di $c_1, \dots, c_n$ dicesi **sistema integrale particolare**. Si dice che si è giunti al sistema integrale generale delle (2) anche quando si sono ottenute n equaz. $\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) tali che eliminando le c_i fra le derivate $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} y_2' + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} y_n' = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) si ricada nel sistema (2).

Si dice che il sistema di n equaz. differenziali del 1° ordine è ridotto a **forma normale** quando esso è risoluto per le derivate y_i' , cioè è della forma $y_i' = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ed il sistema integrale generale è ridotto a **forma normale** quando è risoluto per le costanti, cioè è della forma $c_i = \psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Teor. d'esistenza del sistema integrale. Se le $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ sono continue in un campo C ad $n + 1$ dimensioni contenente

un punto $(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{n,0})$ esiste sempre pel sistema d'equaz. $y'_i = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) un sistema di n funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$ che in $x = x_0$ prendono i valori $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{n,0}$. Se le φ_i soddisfano alla condizione di Lipschitz $|\varphi_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - \varphi_i(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \dots, \bar{\bar{y}}_n)| < \sum_{h=1}^n k_h |\bar{y}_h - \bar{\bar{y}}_h|$ essendo $(\bar{y}_h, \bar{\bar{y}}_h)$ n coppie di valori scelti in C , il sistema precedente di soluzioni è unico.

La equaz. $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}$ può trasformarsi in un sistema di n equaz. del 1° ordine $f(x, y, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = p'_{n-1}$, $y' = p_1, p'_1 = p_2, \dots, p'_{n-2} = p_{n-1}$, quindi il teor. d'esistenza per l'equaz. proposta (Cap. XLVIII, § 10) coincide con quello relativo al sistema considerato.

La ricerca di curve storte che abbiano date proprietà rispetto alla tangente (dipendendo la direzione di questa da $y'(x), z'(x)$ se $y = y(x), z = z(x)$ sono le equaz. delle curve (pag. 30)), porta, generalmente, alla integrazione di un sistema di 2 equaz. differenziali del primo ordine. Il sistema integrale generale si compone di una famiglia di curve storte dipendenti da 2 parametri; in una regione opportunamente limitata di spazio per ogni punto passa una ed una sola curva del sistema.

Geometricamente il sistema integrale generale di un sistema di 2 equaz. differenziali del 2° ordine $f(x, y, z, y', z', y'', z'') = 0$, $\varphi(x, y, z, y', z', y'', z'') = 0$ è un sistema di curve storte dipendenti da 4 parametri, delle quali, per ogni punto di una regione convenientemente limitata di spazio, passa una od una sola curva ivi avente una determinata tangente.

2. — *a) Integrali singolari* sono integrali che non si ottengono dagli integrali del sistema integrale generale mettendo particolari valori per le costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Del sistema (3) $y'_i = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ sia (4) $y_i = F_i(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) il sistema integrale generale. Si considerino le c_i quali funz. di x , allora, derivando rapporto ad x le (4), si ha $\frac{d y_i}{d x} = \frac{\partial F_i}{\partial x} + \sum_{h=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial c_h} c'_h$ e queste debbono soddisfare le (3)

e poichè $\frac{\partial F_i}{\partial x} = \varphi_i(x, F_1, F_2, \dots, F_n)$, dovrà essere $\sum_{h=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial c_h} c_h' = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$); ora poichè le c_h' non sono tutte nulle se le c_h non sono costanti, deve essere $\frac{d(F_1, F_2, \dots, F_n)}{d(c_1, c_2, \dots, c_n)} = 0$ (pag. 238).

Risolta quest'equaz. per c_n , (5) $c_n = \lambda(x, c_1, \dots, c_{n-1})$, poniamo $F_i(x, c_1, \dots, c_{n-1}, \lambda(x, c_1, \dots, c_{n-1})) = \Omega_i(x, c_1, \dots, c_{n-1})$ ($i = 1, 2, \dots, n$), allora le $\sum_{h=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial c_h} c_h' = 0$ divengono $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \Omega_i}{\partial c_k} c_k' = \frac{\partial F_i}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_i}{\partial x}$ ($i = 1, 2, \dots, n$); se v'hanno $n - 1$ equaz. fra queste indipendenti costituiscono un sistema di $n - 1$ equaz. differenziali nelle c_k' , risoluto il quale e sostituito un sistema integrale in (5) poi in (4), queste ultime danno un **sistema di integrali singolari**.

b) Integrali singolari delle equaz. differenziali d'ordine superiore al 1°. Data l'equaz. (6) $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, sostituiamo il sistema equivalente di n equaz. (7) $y' = p_1, p_1' = p_2, p_2' = p_3, \dots, p_{n-2}' = p_{n-1}, p_{n-1}' = f(x, y, p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$; se $y = F(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ è l'integrale generale di (6), il sistema integrale generale di (7) è (8) $y = F(x, c_1, c_2, c_n), p_1 = \frac{dF}{dx}, p_2 = \frac{d^2 F}{dx^2}, \dots, p_{n-1} = \frac{d^{n-1} F}{dx^{n-1}}$. La ricerca degli integrali singolari di (6) è ricondotta a quella degli integrali singolari del sistema (7); epperò si procederà sul sistema integrale (8) come sul sistema (4) di dianzi.

Se di (6) si conosce un integrale generale primo, eliminando fra esso e la sua derivata rapporto all'unica costante che essa contiene, si ottiene un'equaz. d'ordine $n - 1$, il cui integrale generale è integrale singolare della (6).

3. — Metodo di D'Alembert per l'integrazione di un sistema di 2 equaz. lineari del 1° ordine. Esso ha la forma $y' = P y + Q z + R, z' = P_1 y + Q_1 z + R_1$ ove P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 sono funzioni di x o in particolare costanti. Si moltiplichino la 2ª equaz. per ϑ indeterminata funzione di x , e si sommi con la

prima; poi si elimini y ponendo $y = t - \vartheta z$: dopo ciò si avrà:
 $t' = z \{ \vartheta' - P_1 \vartheta^2 + (Q_1 - P) \vartheta + Q \} + (P + P_1 \vartheta) t + R_1 \vartheta + R.$

Si determinino due integrali particolari ϑ_1, ϑ_2 di $\vartheta' - P_1 \vartheta^2 + (Q_1 - P) \vartheta + Q = 0$, equazione tipo Riccati (pag. 359); allora rimane $t' = (P + P_1 \vartheta_1) t + R_1 \vartheta_1 + R$; $t' = (P + P_1 \vartheta_2) t + R_1 \vartheta_2 + R$, equaz. lineari del 1° ordine in t . Si determinino i due integrali generali $t = t_1(x_1, c_1)$, $t = t_2(x_1, c_2)$; dal sistema $y = t_1 - \vartheta_1 z$; $y = t_2 - \vartheta_2 z$, si ricavano le due funzioni y e z di x e delle costanti c_1, c_2 che costituiscono il sistema integrale dell'equaz. proposta.

Notiamo che se $P_1, Q_1 - P, Q$ sono costanti, l'equaz. di Riccati si può sempre integrare (pag. 359).

4. — **Combinazioni integrabili.** a) Quando un sistema di n equaz. differenziali è ridotto alla forma normale, denotando con $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$ le $n + 1$ variabili (n dipendenti ed una

indipendente) si può mettere sotto la forma $\frac{d z_1}{\vartheta_1(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})} = \frac{d z_2}{\vartheta_2(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})} = \dots = \frac{d z_{n+1}}{\vartheta_{n+1}(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})}$. Se si pos-

sono determinare 2 ($n + 1$) funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$

di $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ tali che $\sum_1^{n+1} \alpha_i d z_i$ e $\sum_1^{n+1} \beta_i d z_i$ siano differen-

ziali esatti rispettivamente di $P(z_1, \dots, z_{n+1})$, $Q(z_1, \dots, z_{n+1})$ e

che $\sum_1^{n+1} \alpha_i \vartheta_i, \sum_1^{n+1} \beta_i \vartheta_i$ o $H \sum_1^{n+1} \alpha_i \vartheta_i, H \sum_1^{n+1} \beta_i \vartheta_i$, ove H è fun-

zione di $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, si esprimano in funzione di P e Q cioè

$H \sum_1^{n+1} \alpha_i \vartheta_i = \mu(P, Q)$, $H \sum_1^{n+1} \beta_i \vartheta_i = \nu(P, Q)$, allora si trae

$\frac{d P}{\mu(P, Q)} = \frac{d Q}{\nu(P, Q)}$ equaz. differenziale del 1° ordine in 2 va-

riabili che si dice **combinazione integrabile** delle date equaz.

L'integrale generale di questa $\Psi(P, Q) = C_1$ fa parte del sistema

integrale generale del sistema proposto. In particolare se ϑ_r

e ϑ_s contengono solo z_r e z_s , $\frac{d z_r}{\vartheta_r(z_r, z_s)} = \frac{d z_s}{\vartheta_s(z_r, z_s)}$ è combina-

zione integrabile.

$$b) \text{ Integrazione del sistema } \frac{dz_1}{a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n+1}z_{n+1} + b_1} = \dots = \frac{dz_{n+1}}{a_{n+11}z_1 + a_{n+12}z_2 + \dots + b_{n+1}}$$

ove le a e b sono costanti. Se si determinano delle costanti $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ in modo che (1) $a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \dots + a_{n+1} a_{n+1i} = k a_i (i=1, 2, \dots, n+1)$ allora $\left(\sum_1^{n+1} a_i dz_i \right) : \left(k \sum_1^{n+1} a_i z_i + \sum_1^{n+1} a_i b_i \right)$ è il differenziale di $\frac{1}{k} \log \left(\sum_1^{n+1} a_i z_i + \sum_1^{n+1} a_i b_i \right) - c$. Il sistema (1) è possibile quando k è radice del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+11} & a_{n+12} & \dots & a_{n+1n+1} - k \end{vmatrix}$$

Se $k_1, k_2, \dots, k_r$ sono r radici reali, chiamato dt il valor comune degli $n+1$ rapporti costituenti il sistema proposto è $dt = \left(\sum_1^{n+1} a_{im} dz_i \right) : \left(k_m \sum_1^{n+1} a_{im} z_i + \sum_1^{n+1} a_{im} b_i \right)$ e quindi $\frac{1}{k_m} \log \left(\sum_1^{n+1} a_{im} z_i + \sum_1^{n+1} a_{im} b_i \right) = t + c_m (m=1, 2, \dots, r)$ ed eliminando t e ponendo $e^{c_m - c_r} = h_m, \left(\sum_1^{n+1} a_{im} z_i + \sum_1^{n+1} a_{im} b_i \right)^{k_m} : \left(\sum_1^{n+1} a_{im} z_i + \sum_1^{n+1} a_{ir} b_i \right)^{k_r} = h_m (m=1, 2, \dots, r-1)$ sono $r-1$ equaz. che fanno parte del sistema integrale generale. Se tutte $n+1$ le radici k sono reali si ottiene così il sistema integrale generale.

5. — Sistemi di equaz. differenziali d'ordine qualunque.

Siano $f(x, y, y', \dots, y^{(p)}, z, z', \dots, z^{(q)}) = 0, \varphi(x, y, y', \dots, y^{(p)}, z, z', \dots, z^{(q)}) = 0$ due equaz. dell'ordine p rispetto ad y e dell'ordine q rispetto a z . Se si derivano q volte rispetto ad x si otterranno altre $2q$ equaz. contenenti le derivate fino all'ordine $p+q$ di y e fino all'ordine $2q$ di z . Se fra le $2q+2$ equaz. si eliminano $z, z', \dots, z^{(2q)}$, si avrà un'equaz. $\varphi(x, y, y' \dots y^{p+q}) = 0$ dell'or-

dine $p + q$ il cui integrale generale sarà $y = \psi(x, c_1, c_2, \dots c_{p+q})$ contenente $p + q$ costanti arbitrarie. Da $2q + 1$ delle dette equaz. si può ricavare z in funzione di $x, y, y' \dots y^{p+q}$ onde per sostituzione ad y di ψ e alle derivate di y delle derivate di ψ si ricava anche z in funzione di x e delle $p + q$ costanti $c_1, \dots c_{p+q}$, cioè $z = \chi(x, c_1, c_2, \dots c_{p+q})$. Le $y = \varphi, z = \chi$ costituiscono il **sistema integrale generale**.

Si può anche trasformare il dato sistema in un sistema di $p + q$ equaz. del 1° ordine: $f(x, y, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p, z, \nu_1, \nu_2, \dots \nu_q) = 0$
 $\varphi(x, y, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p, z, \nu_1, \nu_2, \dots \nu_q) = 0, \mu_1 = y', \mu'_1 = \mu_2 \dots$
 $\dots \mu'_{p-1} = \mu_p, \nu_1 = z', \nu'_1 = \nu_2, \dots \nu'_{q-1} = \nu_q$.

Nel caso che f e φ contengano linearmente y, z e le loro derivate, le equaz. si dicono lineari ed allora l'equaz. di ordine $p + q$ in y è pure lineare (pag. 368); in particolare se i coefficienti sono costanti, l'equaz. d'ordine $p + q$ è a coefficienti costanti (pag. 366).

6. — **Equazioni ai differenziali totali lineari e del 1° ordine**
 si chiamano le equazioni del tipo (1) $M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \dots + M_n dx_n = 0$ ove $M_1, M_2, \dots M_n$ sono funz. di $x_1, x_2, \dots x_n$. Se il 1° membro è un differenziale esatto (Cap. XLVIII, § 1) si determina con quadrature una funzione $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ di cui il 1° membro è differenziale e l'equaz. $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = c$ è l'**integrale generale**.

Se il differenziale di $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = c$ differisce dal 1° membro della proposta equaz. per un fattore λ non contenente i differenziali, $\varphi = c$ dicesi ancora l'integrale generale. In entrambi i casi l'equaz. ai differenziali totali data si dice **completamente integrabile**. Le condizioni perchè il 1° membro di (1) sia un differenziale esatto e la determinazione in questo caso dell'integrale generale è indicato al Cap. XLVIII, § 1. Condizioni necessarie e sufficienti acciò che esista una funzione λ tale che il 1° membro di (1) moltiplicata per λ diventi un differenziale esatto sono le $(n - 1)(n - 2) : 2$ seguenti, ove h, k

prendono tutti i valori $1, 2, \dots, n-1$, (2) $M_h \left[\frac{\partial M_k}{\partial x_n} - \frac{\partial M_n}{\partial x_k} \right] +$
 $+ M_k \left[\frac{\partial M_n}{\partial x_h} - \frac{\partial M_h}{\partial x_n} \right] + M_n \left[\frac{\partial M_h}{\partial x_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_h} \right] = 0$. Se la (1) si
 presenta sotto la forma $dx_n = M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \dots + M_{n-1} dx_{n-1}$
 le equaz. (2) divengono $\frac{\partial M_h}{\partial x_k} + \frac{\partial M_h}{\partial x_n} M_k = \frac{\partial M_k}{\partial x_h} + \frac{\partial M_k}{\partial x_n} M_h$.
 Data la (1) e supposte verificate le (2), si integri $M_{n-1} dx_{n-1} + M_n dx_n$
 cioè si cerchi una funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tale che $\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1} +$
 $+ \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$ o coincida con $M_{n-1} dx_{n-1} + M_n dx_n$ o ne diffe-
 risca per un fattore λ funzione delle x_i ma non contenente i
 differenziali. Se fosse $M_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n-2$), $f = c$ sa-
 rebbe l'integrale generale di (1): se ciò non è, posto $P_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda Q_i$
 la (1) diviene $Q_1 dx_1 + Q_2 dx_2 + \dots + Q_{n-2} dx_{n-2} + df = 0$
 che è ad $n-1$ termini e considerando f come nuova varia-
 bile, $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-2}$ contengono $x_1, \dots, x_{n-2}, f$ in modo da essere
 soddisfatte le condizioni di integrabilità. Con processo analogo
 si riduce l'equaz. a contenere $n-2$ termini e così via, fino a
 giungere ad un'equaz. a 2 termini in 2 variabili.

CAPITOLO L.

Equazioni alle derivate parziali

1. — **Equazioni lineari del 1° ordine.** Supponiamo di avere
 il sistema simultaneo delle equaz. differenziali (1) $\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} =$
 $\dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}$ ove $X_1, X_2, \dots, X_n, Z$ sono funzioni di $x_1, x_2, \dots, x_n, z$;
 e supponiamo sia $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) il sistema

integrale generale nella forma normale (Cap. XLIX, § 1). Differenziando una qualunque di queste equazioni si ha $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz = 0$ ma per le (1), (2) $X_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} + Z \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = 0$ od anche dividendo per $-\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}$ ed osservando che $-\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_h} : \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial x_h}$, derivata rapporto ad x_h della funzione z definita dall'equazione $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_i$, si ha (3) $X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z$, **equazione alle derivate parziali lineare**, giacché le derivate parziali entrano al 1° grado.

Data un'equaz. lineare (3), si dice che $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c$ è **integrale** di essa o anche più brevemente che φ è integrale, se la funz. z definita da $\varphi = c$ soddisfa identicamente la (3), o, ciò che fa lo stesso, se φ soddisfa alla (2). Ma alla (2) soddisfano tutti gli integrali del sistema generale in forma normale del sistema di equazioni differenziali simultaneo (1), il quale, data la (3), si costruisce immediatamente; esso dicesi **sistema ausiliario** dell'equaz. (3).

Se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ sono integrali della (3) e F è simbolo di funzione arbitraria $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)$ è ancora integrale della (3): se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono n integrali indipendenti (Cap. XLI, § 3) qualunque altro integrale di (3) è della forma $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. **Integrale generale** della (3) è una funzione arbitraria di n integrali indipendenti: tali sono gli n integrali del sistema integrale generale del sistema ausiliario (1); onde la regola: Data l'equaz. (3) si trova il sistema integrale generale nella forma normale del sistema ausiliario (1); se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono i primi membri, l'integrale generale di (3) è una funzione arbitraria di $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Riduzione del numero delle variabili. La conoscenza di r ($< n$) integrali indipendenti della (3) riduce l'equazione ad

un'equaz. pure lineare ad $n - r$ variabili. Siano $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ gli r integrali indipendenti; dalle equaz. $u_i = \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) ricaviamo $x_1, x_2, \dots, x_r$ in funzione di $u_1, u_2, \dots, u_r$, cioè $x_i = \vartheta_i(u_1, u_2, \dots, u_r)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), allora invece di cercare le funz. $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ soddisfacenti (2) si potranno trovare le funz. $\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r, x_{r+1}, \dots, x_n, z)$ $\equiv g(u_1, u_2, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n, z)$ soddisfacenti all'equaz. (2) trasformata ponendo in luogo delle x_i le $\vartheta_i(u_1, \dots, u_r)$, equaz. che diviene $\frac{\partial g}{\partial u_1} H_1 + \frac{\partial g}{\partial u_2} H_2 + \dots + \frac{\partial g}{\partial u_r} H_r + \frac{\partial g}{\partial x_{r+1}} \bar{X}_{r+1} + \frac{\partial g}{\partial x_{r+2}} \bar{X}_{r+2} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} \bar{X}_n + \frac{\partial g}{\partial z} \bar{Z} = 0$ ove H_i è il 1° membro della (2) quando per φ si pone l'integrale φ_i , e $\bar{X}_{r+1}, \dots, \bar{X}_n, \bar{Z}$ sono le $X_{r+1}, \dots, X_n, Z$ in cui in luogo di $x_1, x_2, \dots, x_r$ sono poste le $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r$. Ma H_i è nulla per l'ipotesi che φ_i è integrale di (3) e quindi si giunge all'equaz. $\frac{\partial g}{\partial x_{r+1}} \bar{X}_{r+1} + \frac{\partial g}{\partial x_{r+2}} \bar{X}_{r+2} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} \bar{X}_n + \frac{\partial g}{\partial z} \bar{Z} = 0$ che è ad $n - r$ variabili, dovendosi trattare le $u_1, u_2, \dots, u_r$ come costanti.

2. — Equazioni alle derivate parziali delle superficie cilindriche, coniche e di rotazione. a) **Superficie cilindriche** Se $z = z(x, y)$ deve rappresentare una superficie i cui piani tangenti sono paralleli ad una direzione fissa (α, β, γ) , dovrà la z soddisfare all'equaz. $\alpha p + \beta q = \gamma$ (Cap. I, § 11; Cap. XLVII, § 1). L'integrale generale di codesta equaz. lineare che si determina con la regola del § precedente, è $\psi(\beta x - \alpha y, \gamma x - \alpha z) = 0$ oppure $z = \frac{\gamma}{\alpha} x + \vartheta(\beta x - \alpha y)$ con ψ e ϑ funz. arbitrarie. Sono queste le equaz. generali delle **superficie cilindriche** con le generatrici di direzione $(\alpha \beta \gamma)$.

b) **Superficie coniche.** Se $z = z(x, y)$ deve rappresentare una superficie i cui piani tangenti passano tutti pel punto (a, b, c) , dovrà soddisfare all'equaz. $(x - a)p + (y - b)q = z - c$. Di essa l'integrale generale è $\psi\left(\frac{y-b}{x-a}, \frac{z-c}{x-a}\right) = 0$ od anche

$z = c + (x - a) \vartheta \left(\frac{y - b}{x - a} \right)$, con ψ e ϑ funzioni arbitrarie. Sono queste le equaz. generali delle **superficie coniche** col vertice in (a, b, c) .

c) **Superficie di rotazione.** Se $z = z(x, y)$ deve rappresentare una superficie la cui normale (Cap. XLVII, § 1), è incidente ad una retta per l'origine $x : a = y : \beta = z : \gamma$, dovrà soddisfare all'equaz. $p(\gamma y - \beta z) + q(a z - \gamma x) = \beta x - a y$. L'integrale generale di quest'equaz. è $\psi(ax + \beta y + \gamma z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ od anche $x^2 + y^2 + z^2 = \vartheta(ax + \beta y + \gamma z)$ con ψ e ϑ funzioni arbitrarie. Sono queste le equaz. generali delle **superfici di rotazione** intorno alla retta $x : a = y : \beta = z : \gamma$. In particolare se $\gamma = 1, a = \beta = 0$, cioè l'asse di rotazione è l'asse z , l'equaz. alle derivate parziali è $py - qx = 0$ ed il suo integrale generale è $\psi(z, x^2 + y^2) = 0$ oppure $z = \vartheta(x^2 + y^2)$.

3. — Equazioni generali a derivate parziali del 1° ordine.

a) Sia (1) $z = F(x, y, c_1, c_2)$ una funzione di x e y contenente 2 costanti arbitrarie c_1, c_2 . Usando delle notazioni di Monge ($p = z'_x, q = z'_y$) otteniamo, derivando rapporto ad x e $y, p = \frac{\partial F(x, y, c_1, c_2)}{\partial x}$,

$q = \frac{\partial F(x, y, c_1, c_2)}{\partial y}$ ed eliminando c_1, c_2 fra queste due equa-

zioni e la $z = F(x, y, c_1, c_2)$ si ottiene un'equaz. della forma (2)

$f(x, y, z, p, q) = 0$, **equazione alle derivate parziali del 1° ordine.**

La funzione (1) soddisfa identicamente la (2) qualunque siano c_1, c_2 : essa dicesi **integrale completo** della (2). Dando

alle c_1, c_2 o ad una di esse valori particolari si ha un **integrale particolare.**

Si dice anche che si è giunti all'integrale completo della (2) quando si è in possesso di un'equaz. $\Phi(x, y, z, c_1, c_2) = 0$

tale che eliminando fra questa e le 2 equaz. che si ottengono

per derivazioni rispetto ad x una volta e ad y un'altra, $\frac{\partial \Phi}{\partial x} +$

$+\frac{\partial \Phi}{\partial z} p = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q = 0$, si ricada in (2). Ma la (1) sod-

disfa all'equaz. (2) anche se c_1, c_2 sono funzioni di x e y pur-

chè soddisfino le due equazioni (3) $\frac{\partial F}{\partial c_1} \frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial c_2} \frac{\partial c_2}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial c_2} \frac{\partial c_2}{\partial y} = 0$. Ora in doppio modo si può soddisfare a queste condizioni: 1° col prendere c_1, c_2 tali che sia $\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial c_2} = 0$; 2° col prendere c_1, c_2 in guisa che s'annulli $\frac{d(c_1, c_2)}{d(x, y)}$ cioè $\frac{\partial c_1}{\partial x} \frac{\partial c_2}{\partial y} - \frac{\partial c_1}{\partial y} \frac{\partial c_2}{\partial x}$.

Nel 1° caso ponendo in (1) in luogo di c_1, c_2 le funzioni definite da $\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial c_2} = 0$, si ha l'**integrale singolare**; nel 2° caso deve fra c_1 e c_2 passare una qualunque relazione $c_2 = \varphi(c_1)$ ed allora le 2 equaz. (3) si riducono alla sola (4) $\frac{\partial F}{\partial c_1} + \frac{\partial F}{\partial c_2} \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} = 0$; la funzione $z = F(x, y, c_1, \varphi(c_1)) = 0$, ove c_1 è la funzione di x, y, z determinata da (4) e φ è simbolo di funzione arbitraria, è l'**integrale generale** dell'equazione $f(x, y, z, p, q) = 0$.

Ogni funzione z che soddisfi alle (2) appartiene o all'integrale completo, o all'integrale generale, o all'integrale singolare. L'integrale completo è geometricamente costituito da una famiglia doppiamente infinita di superficie; l'integrale generale si compone degli involuppi di tutte le famiglie semplicemente infinite di superficie contenute nell'integrale completo; l'integrale singolare è costituito dall'involuppo delle superficie dell'integrale completo.

Notiamo che nel campo geometrico si perviene ad equaz. alle derivate parziali del 1° ordine quando si cerchino superfici aventi date proprietà rispetto al piano tangente o alla normale, (Cap. XLVII, § 1; § 2 di questo Cap.).

b) Le definizioni precedenti si estendono al caso di n variabili indipendenti. Sia (5) $z = F(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_n)$ una funzione delle n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ contenente n costanti arbitrarie $c_1, c_2, \dots, c_n$. Denotando con p_i la $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, dalla (5), deri-

vando rispetto alle singole variabili, si ha $p_i = \frac{\partial F(x_1 \dots x_n, c_1 \dots c_n)}{\partial x_i}$

($i = 1, 2, \dots, n$); se fra queste n equaz. e la (5) si eliminano le n costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ si ha un'equazione della forma (6) $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$, **equazione alle derivate parziali del 1° ordine**. La funzione (5) soddisfa, qualunque siano $c_1, c_2, \dots, c_n$ identicamente la (6): essa dicesi **integrale completo** della (6). Dando alle c , o ad alcune di esse, valori particolari si ha un **integrale particolare**. Si dice anche che si è giunti all'integrale completo della (2) quando si è in possesso di una equaz. $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, z, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ tale che eliminando fra questa e le n equaz. che si ottengono derivando rispetto alle n variabili, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), si ricada in (6).

Ma la (5) soddisfa alla (6) anche se le $c_1, c_2, \dots, c_n$ anzichè costanti sono funzioni di $x_1, x_2, \dots, x_n$ purchè soddisfino alle n equaz. (7) $\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_h} = 0$ ($h = 1, 2, \dots, n$). Ora si soddisfa alle

(7) in doppio modo: 1° se si prendono le c_i definite da $\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$); 2° se si prendono le c_i in modo che si annulli $\frac{d(c_1 c_2 \dots c_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)}$. Nel 1° caso, ponendo in (5) le c_i definite da

$\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) si ha l'**integrale singolare**, funzione che

non si ottiene dall'integrale completo mettendo in luogo di $c_1, c_2, \dots, c_n$ delle costanti. Nel 2° caso esiste almeno una relazione fra le c_i (Cap. XLI, § 3). Supponiamo che queste relazioni siano k (≥ 1) (8) $c_{n-k+i} = \psi_i(c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$ ($i = 1, 2, \dots, k$)

Le (7) si trasformano facilmente nelle (9) $\frac{\partial F}{\partial c_i} + \frac{\partial F}{\partial c_{n-k+1}} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial c_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial c_n} \frac{\partial \psi_k}{\partial c_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-k$). Le (8) e (9) determinano,

in generale, le c quando sono fissate in modo arbitrario le ψ . L'integrale (5) che dipende da k funzioni arbitrarie di $n-k$ argomenti, dicesi **integrale generale**. Dato un integrale ottenuto da-

un integrale generale fissando in modo speciale la forma delle funzioni indeterminate che vi figurano, si trova sempre un integrale completo di cui l'integrale dato è un integrale particolare. Ogni integrale della (6) appartiene o all'integrale completo o al generale o al singolare.

4. — Metodo di Lagrange-Charpit per l'integrazione.

a) Sia (1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ $\left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \right)$

un'equaz. alle derivate parziali del 1° ordine non lineare. Se fossero noti $p_1, p_2, \dots, p_n$, l'integrazione dell'equaz. ai differenziali totali (2) $dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$ ci darebbe la funzione z incognita. Associamo alla (1) le $n - 1$ equaz. $G_i(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) in guisa che se da questo sistema di n equaz. si ricavano $p_1, p_2, \dots, p_n$ sia $dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$. A quest'uopo basta per G_i prendere $n - 1$ integrali di un'equaz. lineare il cui sistema ausiliario (§ 1) è

$$(3) \quad \frac{\frac{dz}{\sum_1^n p_h \frac{\partial f}{\partial p_h}}}{\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}}}{\frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\frac{dx_2}{\frac{\partial f}{\partial p_2}}}{\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial z}} = \dots = \frac{\frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}}}{\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial z}} =$$

È questo il metodo di *Lagrange-Charpit*.

b) **Equaz. del tipo** $f(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$: ha l'integrale completo $z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$, purchè fra le a passi la relazione $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$.

c) **Equaz. del tipo** $f(z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$: nel sistema (3) è $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ ($i = 1, 2 \dots n$) e quindi gli ultimi n membri danno gli $n - 1$ integrali $p_i = c_i p_n$ ($i = 1, 2 \dots n - 1$). Ricavando da $f(z, c_1 p_n, c_2 p_n, \dots, c_{n-1} p_n, p_n) = 0$, $p_n = \mu(z, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ l'equaz. (2) divisa per p_n diviene $dz : \mu(z, c_1, c_2, \dots, c_n) = c_1 dx_1 + c_2 dx_2 + \dots + c_{n-1} dx_{n-1} + dx_n$ di cui l'integrale è

$$\int \frac{dz}{\mu(z, c_1, \dots, c_n)} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{n-1} x_{n-1} + x_n + c_n.$$

d) **Equaz. del tipo:** $f_1(x_1, p_1) + f_2(x_2, p_2) + \dots + f_n(x_n, p_n) = 0$.

Poichè $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, dalle $n - 1$ equaz. del sistema (3) $\frac{dx_i}{-\frac{\partial f}{\partial p_i}} =$
 $= \frac{d p_i}{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$ ($i = 2, \dots, n$) si trae $f_i(x_i, p_i) = c_i$ e dall'equaz. propo-

sta $f_n(x_n, p_n) = -(c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1})$; supposto che da $f_i(x_i, p_i) = c_i$ si ricavi $p_i = \vartheta_i(x_i, c_i)$ ($i = 1, 2 \dots n - 1$), $p_n = \vartheta_n(x_n, -(c_1 + \dots + c_{n-1}))$, la (2) diviene $dz = \vartheta_1 dx_1 + \dots + \vartheta_n dx_n$, il cui integrale è $z + c_n =$
 $= \sum_{i=0}^{n-1} \int \vartheta_i(x_i, c_i) dx_i + \int \vartheta_n(x_n, -(c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1})) dx_n$.

e) **Equaz. di Clairaut a più variabili indipendenti**
 $z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n + \psi(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Dagli ultimi n membri del sistema (3) eguagliato ad un altro qualunque si ricava $p_i = c_i$ ($i = 1, \dots, n$), onde l'integrale completo è $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + \psi(c_1, c_2, \dots, c_n)$. L'integrale singolare si ha eliminando le c fra questa equaz. e le $x_i + \frac{\partial \psi}{\partial c_i} = 0$ ($i = 1, 2 \dots n$).

f) **Equaz. della forma** $\sum_{i=1}^n x_i f_i(p_1, p_2, \dots, p_n, z) - \sum_{h=1}^n p_h x_h +$
 $+ f_{n+1}(p_1, p_2, \dots, p_n, z) - \sum_{h=1}^n p_h x_h = 0$. Mediante la trasforma-
 zione (di Legendre) $u = z - \sum_{h=1}^n p_h x_h$, l'equazione diviene

$\sum_{i=1}^n f_i(p_1, p_2, \dots, p_n, u) - \frac{\partial u}{\partial p_i} + f_{n+1}(p_1, p_2, \dots, p_n, u) = 0$, giacchè
 $-\frac{\partial u}{\partial p_i} = x_i$, equaz. che è lineare in u se si prendono le p_i come

variabili indipendenti. L'integrale generale di questa (§ 1) sarà l'integrale generale della equaz. proposta, quando si associ alle

$u = z - \sum_{h=1}^n p_h x_h, \frac{\partial u}{\partial p_i} = x_i$ ($i = 1, 2 \dots n$).

La trasformazione di Legendre si può del resto applicare ad un'equaz. del 1° ordine qualunque $f(z, x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n) = 0$ che diventa $f(u - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial u}{\partial p_i}, - \frac{\partial u}{\partial p_1}, - \frac{\partial u}{\partial p_2}, \dots - \frac{\partial u}{\partial p_n}, p_1, p_2, \dots p_n) = 0$, la quale, in certi casi, può più facilmente essere integrata.

CAPITOLO LI.

Elementi del Calcolo delle variazioni

1. — Il problema fondamentale nel caso più semplice.

Esso può enunciarsi così: Dato un integrale definito (1) $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx$ ove f è una funzione nota e $y(x)$ una funzione indeterminata, cercare fra le funzioni $y(x)$ che in $x = x_1, x = x_2$ prendono i dati valori y_1, y_2 quella o quelle per le quali J diventa massimo o minimo. Geometricamente, si vuol determinare fra gli archi di curva che congiungono i due punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ quelli per cui J diviene massimo o minimo. Delle funzioni $y = y(x)$ si considerano generalmente solo quelle per cui x, y rimangono in un campo finito C , e le y hanno derivate prima e seconda continue. Di più si suppone che f sia continua rispetto ai 3 argomenti, i 2 primi contenuti in C e per qualunque valor finito di y' , e che f abbia pure continue le derivate parziali prime e seconde.

Si dice che $y = y(x)$ è una curva di **massimo** o **minimo relativo** od una **estremale** quando, assegnato σ piccolo ad arbitrio, per ogni curva $\bar{y}(x)$, soddisfacente alle condizioni a cui $y(x)$ è assoggettata, per cui sia $|\bar{y}(x) - y(x)| < \sigma$, il valore di J sia $<$ o rispettivamente $>$ di quello che ha per $y(x)$.

Il più grande fra i massimi relativi ed il più piccolo fra i minimi relativi sono il **massimo** e il **minimo assoluti**. Ponendo $\bar{y}(x) - y(x) = \delta y(x)$, si dice δy **variazione** della funz. y :

allora $\delta y' = \bar{y}' - y' = \frac{d}{dx} \delta y$ ossia $\delta dy = d \delta y$. Si prenda

$\delta y = \varepsilon \eta(x)$ con $\eta(x)$ funzione sottoposta alle condizioni a cui è sottoposta y e annullantesi in $x = x_1, x = x_2$, ε una costante arbitrariamente piccola; se vuolsi che $|\delta y| < \sigma$ in $x_1 \vdash x_2$ basta prendere $|\varepsilon| < \sigma_1 L$, se L è il massimo di $\eta(x)$ in $x_1 \vdash x_2$. La curva $y = y(x) + \varepsilon \eta(x)$ dicesi **curva variata** e l'integrale J diviene corrispondentemente $\bar{J} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx$. Supposte fissate y ed η , $\bar{J}$ diventa funz. continua di ε , $J(\varepsilon)$;

si ha $J(0) = J$ e $\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta')}{\partial (y + \varepsilon \eta)} \eta + \frac{\partial f(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta')}{\partial (y' + \varepsilon \eta')} \eta' \right] dx$ il cui 2° membro è continuo

in ε , onde $\lim_{\varepsilon=0} \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} \eta dx +$

$+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \eta' dx$. Integrando per parti (pag. 240)

$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \eta' dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx =$

$= - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx$ giacchè $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Allora

$\left(\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right\} \eta dx$.

Variazione prima dell'integrale J dicesi il prodotto

$\varepsilon \left(\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$ (primo termine dello sviluppo di Mac-Laurin di

$J(\varepsilon) - J(0)$).

Perchè alla $y(x)$ corrisponda per J un massimo od un mi-

nimo relativo è necessario che $J(\varepsilon)$ abbia in $\varepsilon = 0$ un massimo od un minimo, onde è necessario che sia $\left(\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0$.

Perchè questa relazione sussista è necessario e sufficiente sia $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$; cosicchè la funzione $y(x)$ cercata deve

soddisfare all'equazione di Eulero (2) $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0$. Se $y = \varphi(x, a, b)$ ne è l'integrale generale, a e b

si determinano dalle 2 relazioni $y_1 = \varphi(x_1, a, b)$, $y_2 = \varphi(x_2, a, b)$. Le condizioni indicate non sono sufficienti perchè J risulti massimo o minimo; tuttavia nella maggior parte dei problemi di Meccanica e Geometria, il metodo conduce alla soluzione.

Se f non contiene x , l'equaz. d'Eulero diviene $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0$ il cui primo membro moltiplicato per y' diviene

la derivata di $f - \frac{\partial f}{\partial y'} y'$, onde si ricava $f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' = \text{cost.}$

Se in f manca y l'equaz. d'Eulero diviene $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0$, cioè $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$, da cui $\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{cost.}$

Esempio. Linea passante per 2 punti (x_1, y_1) (x_2, y_2) che ruotando intorno ad x genera la superficie di area minima: qui è $J = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx$ e l'equaz. di Eulero $y \sqrt{1 + y'^2} = a$ (costante); integrando $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}} \right)$ equaz. della **catenaria**; la superficie è il **catenoide**; le costanti a e b si determinano dalla condizione che la catenaria passi per (x_1, y_1) , (x_2, y_2) .

2. — **Massimi e minimi condizionati** (o problemi isoperimetrici). Se si vogliono le curve $y = y(x)$ che rendono mas-

simo o minimo l'integrale $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$ fra quelle che rendono uguale a k l'integrale $K = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx$, si dice che si cercano i **minimi e i massimi condizionati di J** . Nella curva variata $y + \varepsilon \eta$, η non è più arbitraria giacchè ponendo $y + \varepsilon \eta$ in K in luogo di y , K deve conservare il valore k .

Posto $K(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx$, dev'essere $\left(\frac{dK(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0$

cioè $\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial y'} \right) = 0$ oltre $\left(\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0$. Si di-

mostra che per le funzioni soddisfacenti a queste 2 condizioni,

$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] : \left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right) \right]$ è costante, ossia detta λ

questa costante, si ottiene, in luogo della (2), la (3) $\frac{\partial f}{\partial y} -$

$-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \lambda \left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right) \right] = 0$. Orbene se si cercano

i massimi e i minimi dell'integrale $J + \lambda K$, l'equaz. di Eulero è la (3), perciò la ricerca dei massimi e minimi condizionali di J è ricondotta alla ricerca delle estremali dell'integrale $J + \lambda K$ con λ costante. Se $y = \varphi(x, \lambda, a, b)$ è l'integrale

generale della corrispondente equaz. d'Eulero, cioè $\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial y} -$

$-\frac{\partial^2(f + \lambda g)}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2(f + \lambda g)}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2(f + \lambda g)}{\partial y'^2} y'' = 0$, si de-

terminano a, b, λ in modo che $y_1 = \varphi(x_1, \lambda, a, b)$, $y_2 = \varphi(x_2, \lambda, a, b)$

$\int_{x_1}^{x_2} g(x, \varphi(x, \lambda, a, b), \frac{d\varphi(x, \lambda, a, b)}{dx}) dx = k$.

Esempio. Fra tutte le linee passanti per $(-c, 0)$, $(c, 0)$ ed aventi la lunghezza k determinare quella che con l'asse x chiude l'area massima. Qui è $J = \int_{-c}^c y dx$, $K = \int_{-c}^c \sqrt{1 + y'^2} dx$ onde $J + \lambda K = \int_{-c}^c \{y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}\} dx$. L'equaz. d'Eulero, poichè sotto l'integrale non compare esplicitamente x , è

$y + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = b$, di cui l'integrale generale è $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \lambda^2$.

Per determinare a, b, λ si hanno le relazioni $(-c - a)^2 + b^2 = \lambda^2$,
 $(c - a)^2 = \lambda^2$, $k = \lambda \int_{-c}^c \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}$ cioè $2 \lambda \arcsen \frac{c}{\lambda} = k$;
 allora $a = 0$, λ è dato dall'equaz. $c = \lambda \sen \frac{k}{2\lambda}$ e $b = \sqrt{\lambda^2 - c^2}$.

3. — Modificazioni ed estensioni del problema fondamentale. *a)* Si vogliano determinare i massimi o i minimi di un integrale $J = \int f(x, y, y') dx$, quando le curve $y = y(x)$ escano tutte da uno stesso punto (x_1, y_1) e hanno l'altro estremo sopra una curva $y = \psi(x)$. Trovata la funzione $y = y(x)$ che soddisfa alla solita equaz. di Eulero si determinano le costanti a, b che ivi compaiono e l'estremo x_2 dell'integrale J mediante le equaz.

$$y_1 = y(x_1), y(x_2) = \psi(x_2), \left(f + (\psi' - y') \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_{x=x_2} = 0.$$

b) Soluzioni discontinue. Per certi problemi non può escludersi che la estremale possa essere una funzione con derivata discontinua. Per ognuno degli archi con tangente ad andamento continuo, supposto finito il numero delle discontinuità, dev'essere verificata la equaz. d'Eulero, quindi per i diversi archi potranno variare i valori delle costanti a e b . Queste estremali composte di un numero finito di archi a tangente continua, si dicono **soluzioni discontinue**.

c) Caso di più funzioni incognite. Sia $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_2, \dots, y_r, y_1', y_2', \dots, y_r') dx$ l'integrale da rendere massimo o minimo, $y_1, y_2, \dots, y_r$ le funzioni incognite. In luogo dell'equaz. di Eulero si ha qui il sistema $\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0$ ($i = 1, 2 \dots r$). Se il sistema integrale generale è $y_i = \varphi_i(x, c_1, c_2, \dots, c_{2r})$ ($i = 1, 2 \dots r$) le $2r$ costanti si determinano dalle condizioni $y_{i,k} = \varphi_i(x_k, c_1, \dots, c_{2r})$ ($i = 1, 2 \dots r; k = 1, 2$) essendo y_{i1} il valore che y_i deve avere in x_1 e y_{i2} quello che deve avere in x_2 .

d) Caso degli integrali multipli. Sia $J = \iiint_C f(x, y, z, p, q) dx dy$ un integrale esteso ad un dato campo C ; si voglia determinare

fra le funzioni che assumono prestabiliti valori al contorno di C quella o quelle funzioni z che rendono minimo o massimo J .

La z deve soddisfare all'equaz. alle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial z} -$
 $-\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial q} = 0$. Trovato l'integrale generale di
 quest'equazione le condizioni al contorno determinano le funzioni incognite ivi contenute.

E L E M E N T I
DI CALCOLO VETTORIALE.

Definizioni e operazioni sui vettori

1. — **Definizioni.** Dati 2 punti A e B resta determinato in lunghezza e direzione il segmento AB ; se lo consideriamo anche nel verso da A a B , l'ente che ne risulta (caratterizzato da lunghezza, direzione e verso) dicesi **vettore** determinato dai punti A, B , da A verso B ; si denota con $B - A$, che si legge « B meno A ». La distanza di A da B si dice **lunghezza** del vettore, la direzione della retta AB , **direzione** del vettore, il verso da A a B , **verso** del vettore.

Se C e D sono due punti pei quali i segmenti AB e CD sono uguali in lunghezza e direzione e il verso da C a D coincide con quello da A a B si dice che i vettori $B - A$ e $D - C$ sono **uguali** e si scrive $B - A = D - C$. Si ricava immediatamente $B - D = A - C$, $C - A = D - B$, $C - D = A - B$. Se $B = A$ il vettore è **nullo**, $A - A = 0$.

Si usa spesso di indicare un vettore con una lettera; per distinguerla dalle lettere che servono ad indicare quantità numeriche, si adopera il carattere grassetto. Si scrive $\alpha = B - A$. Graficamente si può rappresentare un vettore con una freccia di cui la lunghezza, la retta che la contiene e la punta danno rispettivamente la lunghezza, la direzione ed il verso del vettore.

Modulo del vettore α è il numero reale positivo o nullo che misura la lunghezza di α rispetto ad una prefissata unità di misura; si indica con mod. α .

2. — **Somma del punto A col vettore α** è il punto B tale che si abbia $B - A = \alpha$; si indica con $B = A + \alpha$. Si ha $A + (B - A) = B$; se $B - A = D - C$ si trae $B = A + (D - C)$.

Somma del vettore a con il vettore b o risultante dei vettori a e b è il vettore $\{ (O + a) + b \} - O$ qualunque sia O : detta somma si indica con $a + b$. Se $A - O = a$, $B - O = b$, la diagonale del parallelogrammo $OACB$ costruito su $A - O$ e $B - O$, nel senso da O a C è $a + b$. Dati più vettori si porrà $a + b + c = (a + b) + c$; $a + b + c + d = (a + b + c) + d$, ecc. La somma dei vettori è commutativa ed associativa, cioè $a + b = b + a$; $(a + b) + c = a + (b + c)$. Per costruire la somma degli n vettori $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, preso un punto ad arbitrio O , si costruiscono i punti $A_1 = O + a_1$, $A_2 = A_1 + a_2, \dots, A_n = A_{n-1} + a_n$; il vettore $A_n - O$ è la somma voluta.

3. — **Prodotto del vettore a pel numero reale m** è il vettore di lunghezza $|m| \text{ mod. } a$ nella direzione di a , di verso uguale o contrario a quello di a a seconda che m è > 0 o < 0 ; si indica con $m a$. Si ha $m(a + b) = m a + m b$; $(m + n)a = m a + n a$; $m 0 = 0$; $0 a = 0$; se $m a = 0$ od $m = 0$, o $a = 0$. In luogo di $(-1)a$ si scrive $-a$.

Sottrazione fra vettori. Il vettore $a - b$ è il vettore che sommato con b dà a ; se $a = A - O$, $b = B - O$, $a - b = A - B$ (seconda diagonale del parallelogrammo costruito su $A - O$, $B - O$).

Parallelo ad una retta r o ad un vettore i dicesi il vettore a se la direzione di a è quella di r od i . Se a ed i sono paralleli, $a = x i$ ove $x = \pm (\text{mod } a : \text{mod } i)$, il segno $+$ o $-$ secondo che i versi di a e i coincidono o no.

Complanari diconsi 3 vettori a, i, j se le loro direzioni sono $\parallel$ ad uno stesso piano; se i ed j non sono $\parallel$, esiste una coppia *unica* di numeri reali x e y per cui $a = x i + y j$; i vettori $x i, y j$ si dicono **componenti** di a *rispetto alle direzioni i e j* .

Se i, j, k sono 3 vettori non complanari ed a un vettore qualunque, esiste un'unica terna di numeri reali x, y, z per cui $a = x i + y j + z k$.

I vettori $x\mathbf{i}, y\mathbf{j}, z\mathbf{k}$ diconsi **componenti** di $\mathbf{a}$ rispetto alle direzioni $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; i numeri x, y, z le proiezioni di $\mathbf{a}$ su 3 assi paralleli a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, proiezioni fatte parallelamente al piano degli altri 2 assi. In particolare, fissato un sistema cartesiano di assi di origine O , si prendano per $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tre vettori di modulo 1, nelle direzioni degli assi x, y, z di verso coincidente col verso positivo degli assi stessi; P essendo un punto di coordinate cartes. x, y, z , sarà $P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Angolo di due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ è l'angolo convesso o piatto formato da due semirette uscenti da un punto arbitrario O e passante pei punti $O + \mathbf{a}, O + \mathbf{b}$: la sua misura in radianti si indica con $\text{ang}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; ma se si prende una funzione trigonometrica dell'angolo si sopprime la parola *ang*; si scrive cioè $\text{sen}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ per $\text{sen ang}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Prodotto vettoriale (o esterno) di $\mathbf{a}$ per $\mathbf{b}$, che si indica con $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ (*) e si legge « $\mathbf{a}$ vettore $\mathbf{b}$ », è un vettore $\mathbf{u}$ tale che $\text{mod } \mathbf{u} = \text{mod } \mathbf{a} \cdot \text{mod } \mathbf{b} \cdot \text{sen}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (area del parallelogrammo costruito su 2 vettori uguali ad $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ uscenti da un punto qualunque), la sua direzione è $\perp$ ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (cioè al piano del parallelogrammo), il suo verso è quello che può prendere il pollice della mano sinistra quando si dispongono l'indice ed il medio rispettiv. nella direzione e verso di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (od anche: il verso di $\mathbf{u}$ deve coincidere con quello dai piedi alla testa di un osservatore posto lungo $\mathbf{u}$ il quale guardando un vettore uscente dal punto O in cui ha i piedi ed uguale ad $\mathbf{a}$ veda alla sua destra un vettore uscente dallo stesso punto ed uguale a $\mathbf{b}$).

Si ha $\mathbf{a} \wedge 0 = 0 \wedge \mathbf{a} = 0$; da $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ risulta o $\mathbf{a} = 0$, o $\mathbf{b} = 0$, o $\mathbf{a}$ parallelo a $\mathbf{b}$; $m(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (m\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (m\mathbf{b})$; $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$; $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$; $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$.

(*) Usiamo delle notazioni — quasi totalmente adottate in Italia — proposte da C. Burali-Forti e R. Marcolongo in « Elementi di calcolo vettoriale ecc. ». Bologna, Zanichelli, 1909. Il Gibbs usa il $\times$ e legge $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ « $\mathbf{a}$ croce $\mathbf{b}$ ».

Prodotto scalare (od interno) di a per b , che si indica con $a \times b$ (*) e si legge « a scalare b » è il prodotto dei moduli di a e di b per $\cos(a, b)$ ossia il prodotto della lunghezza di a per la proiezione di b su a (o il prodotto della lunghezza di b per la proiezione di a su b).

Si ha $a \times 0 = 0 \times a = 0$; da $a \times b = 0$ segue od $a = 0$, o $b = 0$, o la normalità di a e b : $m(a \times b) = (ma) \times b = a \times (mb)$; $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$; $a \times b = b \times a$. In luogo di $a \times a$ si scrive a^2 ; è $a^2 = (\text{mod } a)^2$. Se $\text{mod } a = 1$, $a \times b$ è la proiezione ortogonale (in grandezza e segno) della lunghezza di b sulla direzione a ; $(a \times b)a$ è la componente di b parallela ad a , $b - (a \times b)a$ è la componente normale ad a .

Relazioni fra prodotto scalare e vettoriale: $(a \wedge b) \wedge c = (a \times c)b - (b \times c)a$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \times c)b - (a \times b)c$; $(b \wedge c) \wedge a + (c \wedge a) \wedge b + (a \wedge b) \wedge c = 0$. Sono prive di significato le notazioni $(a \times b) \wedge c$, $a \wedge (b \times c)$ epperò si intenderà che $a \times b \wedge c$ rappresenti $a \times (b \wedge c)$ e che $a \wedge b \times c$ rappresenti $(a \wedge b) \times c$. Si ha ancora $a \times b \wedge c = a \wedge b \times c = -b \times a \wedge c = -a \times c \wedge b$; $(a \wedge b) \times (c \wedge d) = (a \times c)(b \times d) - (b \times c)(a \times d)$; $(a \wedge b)^2 = a^2 b^2 - (a \times b)^2$; $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = (a \times c \wedge d)b - (b \times c \wedge d)a = (d \times a \wedge b)c - (c \times a \wedge b)d$; se $b \times c = 0$, $(a \wedge b) \wedge c = (a \times c)b$; se $\text{mod } a = 1$, $(a \wedge b) \wedge a$ è la componente di b normale ad a (v. sopra).

Non è in generale $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, cioè il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa.

Se I, J, K sono 3 vettori di modulo 1, per cui $K = I \wedge J$, il sistema (I, J, K) dicesi **destrogiro** (o **destrorso**) **ortogonale**. Una terna di assi x, y, z è destrogiro ortogon. quando è destrogiro ortogon. il sistema di 3 vettori unitari, I, J, K nelle direzioni positive di x, y, z rispettiv. Si ha $I^2 = J^2 = K^2 = 1$,

(*) Il Gibbs scrive $a \cdot b$ e legge « a punto b ».

$$\mathbf{I} \times \mathbf{J} = \mathbf{J} \times \mathbf{K} = \mathbf{K} \times \mathbf{I} = 0; \quad \mathbf{I} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{K}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{I}, \\ \mathbf{K} = \mathbf{I} \wedge \mathbf{J}.$$

Se $\mathbf{u}$ è un vettore, $\mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{I}) \mathbf{I} + (\mathbf{u} \times \mathbf{J}) \mathbf{J} + (\mathbf{u} \times \mathbf{K}) \mathbf{K}$.

Se è $\mathbf{u}_i = x_i \mathbf{I} + y_i \mathbf{J} + z_i \mathbf{K}$ è mod $u_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$,
 $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$; $\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \mathbf{I} +$
 $+ (z_1 x_2 - z_2 x_1) \mathbf{J} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{K}$ che simbolicamente può

$$\text{rappresentarsi con } \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

sestuplo del volume del tetraedro che ha per 3 spigoli concorrenti in un punto 3 vettori uguali ai dati; $\cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) =$
 $= [x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2] : \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}$;
 $\cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{I}) = x_1 : \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, ecc.

Relazioni fra 2 sistemi destrogiri ortogonali. Se $\mathbf{I}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1$ è un altro sistema destrogiro ortogon.

$$\mathbf{I}_1 = a_1 \mathbf{I} + a_2 \mathbf{J} + a_3 \mathbf{K} \quad \mathbf{I} = a_1 \mathbf{I}_1 + b_1 \mathbf{J}_1 + c_1 \mathbf{K}_1$$

$$\mathbf{J}_1 = b_1 \mathbf{I} + b_2 \mathbf{J} + b_3 \mathbf{K} \quad \mathbf{J} = a_2 \mathbf{I}_1 + b_2 \mathbf{J}_1 + c_2 \mathbf{K}_1$$

$$\mathbf{K}_1 = c_1 \mathbf{I} + c_2 \mathbf{J} + c_3 \mathbf{K} \quad \mathbf{K} = a_3 \mathbf{I}_1 + b_3 \mathbf{J}_1 + c_3 \mathbf{K}_1$$

a_1, a_2, a_3 sono le proiezioni di $\mathbf{I}_1$ sopra $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ (ed anche i suoi coseni direttori); a_1, b_1, c_1 quelli di $\mathbf{I}$ (o suoi coseni direttori) rispetto a $\mathbf{I}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1$ ecc.

$$\text{È } \mathbf{I}_1 \times \mathbf{J}_1 \wedge \mathbf{K}_1 = \mathbf{I} \times \mathbf{J} \wedge \mathbf{K} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1. \quad (\text{Cfr.}$$

Cap. I, § 11).

4. -- **Vettori in un piano.** In questo paragrafo supponiamo i vettori appartenenti ad un medesimo piano α normale ad un vettore $\mathbf{u}$ unitario. Se $\mathbf{a}$ è un vettore, definiamo l'operatore i mediante $i \mathbf{a} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{a}$. Il vettore $i \mathbf{a}$ ha lo stesso modulo di $\mathbf{a}$, è $\perp$ ad $\mathbf{u}$ e ad $\mathbf{a}$ ed ha un verso tale che un osservatore coi piedi in O e testa in $O + \mathbf{u}$ guardando nella direzione e verso di $\mathbf{a}$ veda $O + i \mathbf{a}$ alla sua destra; cioè $i \mathbf{a}$ è ottenuto ruotando $\mathbf{a}$ di un angolo retto da sinistra a destra rispetto all'osservatore di dianzi. Si ha $i(i \mathbf{a}) = i^2 \mathbf{a} = -\mathbf{a}$;

$$i(i^2 \mathbf{a}) = i^3 \mathbf{a} = -i \mathbf{a}; \quad i(i^3 \mathbf{a}) = i^4 \mathbf{a} = \mathbf{a}; \quad m(i \mathbf{a}) = i(m \mathbf{a}); \\ (i \mathbf{a}) \times (i \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}; \quad (i \mathbf{a}) \wedge (i \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}; \quad \mathbf{a} \times i \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times i \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} \wedge i \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge i \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} \times i \mathbf{a} = 0; \quad \mathbf{a} \wedge i \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 \mathbf{u}; \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \\ = (\mathbf{b} \times i \mathbf{a}) \mathbf{u}.$$

Complessi e loro algoritmo. Se $m + i n$ è un numero complesso (i l'unità immaginaria, m, n numeri reali) ed $\mathbf{a}$ è un vettore di α , si porrà $(m + i n) \mathbf{a} = m \mathbf{a} + n i \mathbf{a}$ ove a secondo membro i è l'operatore dianzi definito: allora risulta che $m + i n$ è un'operatore che applicato su $\mathbf{a}$ dà la somma dei due vettori ortogonali $m \mathbf{a}$, $n i \mathbf{a}$; esso dicesi (numero) **complesso**, del quale m ed $i n$ sono la *parte reale* e la *parte immaginaria*. Se h è un numero reale, λ è un numero complesso, $h(\lambda \mathbf{a}) = \lambda(h \mathbf{a})$, $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$. Due complessi λ, μ si dicono **uguali** quando qualunque sia $\mathbf{a}$ del piano α , $\lambda \mathbf{a} = \mu \mathbf{a}$ onde risulta l'eguaglianza delle parti reali ed immaginarie (Cap. XIX, § 1); un complesso è nullo se e solo se la parte reale e la immaginaria sono nulle. Se λ e μ sono complessi, con $\lambda + \mu, \lambda \mu, \frac{\lambda}{\mu}$ (con $\mu \neq 0$) si indicherà il complesso ν tale che, qualunque sia il vettore $\mathbf{a}$ di α , rispettivamente sia $\nu \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$, $\nu \mathbf{a} = \lambda(\mu \mathbf{a})$, $\mu(\nu \mathbf{a}) = \lambda \mathbf{a}$; se, come in algebra, si conviene che $-\lambda = (-1)\lambda$, $\lambda + (-\lambda) = \lambda - \lambda$, risulta che tutto l'algoritmo algebrico dei segni $+, -, \times, :,$ e delle potenze sussiste per i complessi come per i simboli algebrici $m + i n$. Qualunque sia il vettore $\mathbf{a}$ di α si ha mod $\{(m + i n) \mathbf{a}\} = \sqrt{m^2 + n^2} \text{ mod } \mathbf{a}$, $\{(m + i n) \mathbf{a} \times (m' + i n') \mathbf{a}\} = (m m' + n n') \mathbf{a}^2$; $\{(m + i n) \mathbf{a}\} \wedge \{(m' + i n') \mathbf{a}\} = \mathbf{a}^2 (m n' - m' n) \mathbf{u}$. Si noti che il prodotto vettoriale e scalare di $(m + i n) \mathbf{a}$ per $(m' + i n') \mathbf{a}$ non hanno relazione col prodotto dei due complessi $m + i n$, $m' + i n'$.

Rotazioni. L'operatore $\cos \varphi + i \sin \varphi$ applicato ad un vettore $\mathbf{a}$ di α dà il vettore $\mathbf{b} = (\cos \varphi + i \sin \varphi) \mathbf{a} = \cos \varphi \mathbf{a} + i \sin \varphi \mathbf{a}$ ottenuto da $\mathbf{a}$ per la rotazione di φ radianti nel senso della rotazione i o nell'opposto a seconda che φ è positivo o negativo. Ponendo $e^{i \varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (formula di

Eulero, Cap. XLIV, § 5, b)), l'esponenziale $e^{i\varphi}$ rappresenta l'operatore rotazione di φ radianti. Si ha $m(e^{i\varphi} \mathbf{a}) = e^{i\varphi} (m \mathbf{a})$; $e^{i\varphi} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = e^{i\varphi} \mathbf{a} + e^{i\varphi} \mathbf{b}$; $e^{i\psi} (e^{i\varphi} \mathbf{a}) = e^{i(\varphi + \psi)} \mathbf{a}$; $(e^{i\varphi} \mathbf{a}) \times \times (e^{i\varphi} \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \times \mathbf{b}$; $(e^{i\varphi} \mathbf{a}) \wedge (e^{i\varphi} \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$; $\mathbf{a} \times e^{i\varphi} \mathbf{b} = = \mathbf{b} \times e^{-i\varphi} \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \wedge e^{i\varphi} \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge e^{-i\varphi} \mathbf{a}$, $(e^{i\varphi} \mathbf{a}) \times (e^{i\psi} \mathbf{a}) = = \mathbf{a}^2 \cos(\psi - \varphi)$, $(e^{i\varphi} \mathbf{a}) \wedge (e^{i\psi} \mathbf{a}) = \mathbf{a}^2 \sin(\psi - \varphi) \mathbf{u}$.

Potendosi porre $m + in = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ (Cfr. Capitolo XIX, § 3) l'operatore $m + in$ è il prodotto dell'operatore moltiplicazione per r (*modulo* del complesso) per la rotazione di φ (*argomento* del complesso) radianti.

Se $\mathbf{I}$ è un vettore unitario nella direzione e verso positivo dell'asse x , sia scelto l'asse y in modo che $i\mathbf{I}$ sia un vettore unitario nella direzione e senso positivo di y ; allora se le coordinate di P sono x, y è $P = O + x\mathbf{I} + i\mathbf{I}y = O + + (x + iy)\mathbf{I} = O + r e^{i\varphi} \mathbf{I}$ se r, φ sono le coordinate polari di P , O essendo il polo e l'asse polare coincidente col semiasse positivo di x .

5. — **Vettore localizzato** dicesi un vettore applicato in un punto determinato dello spazio.

Momento di un vettore rispetto ad un punto. Se $\mathbf{u} = B - A$ è un vettore applicato in A ed O un altro punto, dicesi momento di $\mathbf{u}$ rispetto ad O il vettore applicato in O uguale al prodotto vettoriale $(A - O) \wedge \mathbf{u}$. Se X, Y, Z sono le proiezioni di $\mathbf{u}$, x, y, z le coordin. di A ; a, b, c quelle di O ; L, M, N le proiezioni del momento, è $L = (y - b) Z - (z - c) Y$, $M = (z - c) X - (x - a) Z$, $N = (x - a) Y - (y - b) X$.

Sussiste la relazione $XL + YM + ZN = 0$. Se O si sposta su una parallela ad $\mathbf{u}$ il momento non cambia; le 6 quantità X, Y, Z, L, M, N definiscono il vettore nello spazio, a meno di uno scorrimento lungo la retta su cui giace: si dicono le **coordinate del vettore**.

Coordinate di un asse diconsi le tre proiezioni α, β, γ , sugli assi di un vettore $\mathbf{I}$ di modulo 1 che giace nella retta, e le tre proiezioni λ, μ, ν del momento di $\mathbf{I}$ rispetto all'origine:

sussistono fra le 6 quantità le due relazioni $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$,
 $\alpha \lambda + \beta \mu + \gamma \nu = 0$.

Momento risultante di un sistema di vettori localizzati rispetto ad un punto O è la risultante dei momenti dei vettori rispetto ad O ; se e solo se le rette su cui giacciono i vettori concorrono nel punto O , il momento risultante è il momento della risultante. Se $M - O$ è il momento risultante rispetto ad un punto O , $M_1 - O_1$ quello rispetto ad un punto O_1 , u la risultante dei vettori, è $M - O = M_1 - O_1 + (O_1 - O) \wedge u$. È $M - O = M_1 - O_1$ quando $u = 0$, oppure $O_1 - O \parallel u$.

Se 2 sistemi di vettori hanno uguale risultante e uguali momenti risultanti rispetto ad un punto, hanno uguali momenti risultanti rispetto a qualunque altro punto.

Equivalenti diconsi 2 sistemi di vettor se hanno uguali la risultante e il momento risultante rispetto ad un qualunque punto.

Coordinate di un sistema di vettori diconsi le 3 proiezioni X, Y, Z sugli assi della risultante u dei vettori e le 3 proiezioni L, M, N del momento risultante rispetto all'origine O degli assi; 2 sistemi equivalenti hanno le stesse coordinate. Se $M - Q$ è il momento risultante rispetto ad un punto Q (le cui proiezioni denotiamo L_Q, M_Q, N_Q) il prodotto scalare $(M - Q) \times \times u = XL_Q + XM_Q + ZN_Q$ è indipendente dalla posizione di Q ; è cioè un **invariante**; invariante quindi è la proiezione del momento risultante sulla risultante.

Momento di un sistema di vettori rispetto ad un asse è la proiezione nell'asse del momento risultante rispetto ad un punto qualunque Q dell'asse. Esso (indipendente da Q) è dato da $(M - Q) \times I$ se I è unitario nella direzione dell'asse, cioè $X\lambda + Y\mu + Z\nu + L\alpha + M\beta + N\gamma$ se X, Y, Z, L, M, N sono le coordin. del sistema di vettori, $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ quelle dell'asse.

Momento del sistema rispetto al vettore v_s (di coordinate $X_s, Y_s, Z_s, L_s, M_s, N_s$) è il prodotto scalare del momento risultante del sistema rispetto ad un punto qualunque O_s dell'asse

di $\mathbf{v}_s$ pel vettore $\mathbf{v}_s$, cioè $(M_s - O_s) \times \mathbf{v}_s$ se $M_s - O_s$ è il momento indicato: la sua misura è $LX_s + MY_s + NZ_s + XL_s + + YM_s + ZN_s$. Se $\mathbf{v}_s$ fa parte di un sistema di vettori, di coordinate X', Y', Z', L', M', N' , l'espressione $\sum_s (M_s - O_s) \times \mathbf{v}_s = LX' + + MY' + NZ' + L'X + M'Y + N'Z$ dicesi **momento mutuo dei due sistemi**. Se i due sistemi sono equivalenti ed hanno entrambi le coordinate X, Y, Z, L, M, N , il momento mutuo diviene $2(XL + YM + ZN)$ e dicesi **automomento** del sistema di coordin. X, Y, Z, L, M, N .

Coppia è un sistema di 2 vettori opposti non appartenenti allo stesso asse; il momento di una coppia è indipend. dal punto rispetto al quale si fa e si dice **asse della coppia**. Se δ è la distanza degli assi dei 2 vettori, (**braccio della coppia**), se u è il modulo comune dei vettori, l'asse ha il modulo $u\delta$; la direzione dell'asse è $\perp$ al piano della coppia, il suo senso è tale che immaginato applicato in un punto di uno dei 2 vettori, un osservatore nel verso dell'asse e rivolto all'altro vettore vede quest'ultimo diretto da sinistra a destra. Tutte le coppie di ugual asse sono equivalenti. Una coppia può spostarsi nel proprio piano o in piani $\parallel$, si può alterare braccio e modulo dei vettori purchè rimanga inalterato il prodotto $u\delta$. Più coppie sono equivalenti ad una unica coppia che ha per asse la risultante degli assi delle singole coppie.

6. — **Riduzione di un sistema di vettori**. Se l'automomento del sistema è $\neq 0$, il sistema è equivalente ad un sistema di 2 vettori, pei quali si può scegliere, ad arbitrio, l'asse di uno purchè rispetto ad esso il momento del sistema non sia nullo. Se l'automomento è nullo senza essere nulla la risultante, il sistema è equivalente ad un vettore unico. Se l'automomento è nullo, perchè è nullo il vettore risultante, il sistema è equivalente ad una coppia.

Trasportando un vettore da una linea d'azione ad una $\parallel$ si ottiene un sistema equivalente se si aggiunge una coppia formata dal 1° vettore e da un contrario sulla linea d'azione

del nuovo vettore. Se $P - O$ è il 1° vettore, $P_1 - O_1$ è il vettore già trasportato, la coppia da aggiungere ha per asse $(O - O_1) \wedge (P - O)$. Trasportando tutti i vettori $P_i - O_i$ di un sistema parallelamente a loro stessi ad avere un estremo in Q ; allora il sistema è equivalente ad un vettore (risultante dei dati) e ad una coppia (di asse $=$ al momento risultante $\Sigma (O_i - Q) \wedge (P_i - O_i)$). Il punto Q dicesi **centro di riduzione**. Se le coordinate del sistema di vettori sono X, Y, Z, L, M, N (pag. 402), fatto centro di riduzione in Q , il vettore ha le proiezioni X, Y, Z e l'asse della coppia le proiezioni $L - (bZ - cY)$, $M - (cX - aZ)$, $N - (aY - bX)$ se a, b, c sono le coordinate di Q .

Asse centrale dicesi il luogo dei punti rispetto ai quali il momento risultante è $\parallel$ al vettore risultante; le sue equaz. sono $\{L - (\eta Z - \zeta Y)\} : X = \{M - (\zeta X - \xi Z)\} : Y = \{N - (\xi Y - \eta X)\} : Z$ se ξ, η, ζ sono le coordin. correnti e X, Y, Z, L, M, N le coordinate del sistema di vettori. Un sistema di vettori può ridursi ad un vettore nella direzione dell'asse centrale e ad una coppia in un piano $\perp$ al detto asse.

CAPITOLO LIII.

Punti e vettori funzioni di variabili numeriche

Funzioni di un punto

1. — **Punti e vettori funzioni di una variabile numerica.**
Un punto P è funzione della variabile numerica t se ad ogni valore di t di un conveniente intervallo corrisponde una determinata posizione di P : si scrive, ad indicar ciò, $P(t)$.

Un vettore u è funzione della variabile numerica t se ad ogni valore di t di un conveniente intervallo corrispondono determinati la lunghezza, la direzione ed il verso di u .

Se comunque scelto un vettore $\mathbf{a}$, si ha la relazione numerica $\lim_{t=t_0} \mathbf{u}(t) \times \mathbf{a} = \mathbf{u}(t_0) \times \mathbf{a}$ si dice che $\mathbf{u}(t_0)$ è il **limite** di $\mathbf{u}(t)$ per $t=t_0$, e si scrive $\lim_{t=t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0)$. Si dice che $P(t_0)$ è il **limite** di $P(t)$ per $t=t_0$ se il limite del vettore $P(t_0) - P(t)$ è lo 0 per $t=t_0$; si scrive $P(t_0) = \lim_{t=t_0} P(t)$.

Continue in $t=t_0$ sono le funzioni $\mathbf{u}(t)$ e $P(t)$ se $\lim_{t=t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0)$ e $\lim_{t=t_0} P(t) = P(t_0)$; **continue nell'intervallo** $t_1 \rightarrow t_2$ si dicono le funzioni $\mathbf{u}(t)$ e $P(t)$ se lo sono in ogni punto dell'intervallo stesso.

Rapporti incrementali delle funzioni $P(t)$ ed $\mathbf{u}(t)$ sono i vettori $\frac{P(t+h) - P(t)}{h}$ e $\frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h}$ rispettivamente.

Derivate delle funzioni $P(t)$ ed $\mathbf{u}(t)$ sono i **vettori** limiti (qualora esistano) dei rapporti incrementali per $h=0$; si rappresentano rispettiv. con $\frac{dP}{dt}$ e $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ od anche con $P'(t)$, $\mathbf{u}'(t)$.

Derivate seconde di $P(t)$ ed $\mathbf{u}(t)$ sono le derivate di P' e $\mathbf{u}'$ e si indicano con $\frac{d^2P}{dt^2}$, $\frac{d\mathbf{u}}{dt^2}$ o con $P''(t)$, $\mathbf{u}''(t)$; così si definiscono le derivate degli ordini successivi. Se poi $P = O + x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}$ con O punto fisso, $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ vettori di modulo 1, fissi (indipendenti cioè da t), in particolare nelle direzioni e versi positivi degli assi cartesiani, è $P'(t) = x'(t)\mathbf{I} + y'(t)\mathbf{J} + z'(t)\mathbf{K}$, cioè la derivata di P è un vettore le cui coordinate sono le derivate delle coordin. di P . Se $\mathbf{u} = P - Q$ è $\mathbf{u}' = P' - Q'$; se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{I} + u_2\mathbf{J} + u_3\mathbf{K}$ è $\mathbf{u}' = u'_1\mathbf{I} + u'_2\mathbf{J} + u'_3\mathbf{K}$ cioè le proiezioni della derivata di un vettore sono le derivate delle proiezioni del vettore. Se $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \dots + \mathbf{h}$ è $\mathbf{u}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \dots + \mathbf{h}'$; $\frac{d(e^{i\varphi} \mathbf{u})}{dt} = e^{i\varphi} \mathbf{u}' + e^{i\varphi} \varphi' i \mathbf{u}$.

Derivate dei prodotti scalari e vettoriali: $\frac{d(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{dt} =$
 $= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$; $\frac{d(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \frac{d\mathbf{b}}{dt}$;

$\frac{d(a_i^2)}{dt} = 2a \times \frac{da}{dt}; \frac{d(\text{mod } a)}{dt} = \frac{a}{\text{mod } a} \times \frac{da}{dt}$. Se $\text{mod } u = \text{costante}$, da $u^2 = \text{costante}$, si trae $u \times u' = 0$ cioè u' è $\perp$ ad u . Se u non è nullo, $u \wedge u' = 0$ per tutti i t dell'intervallo di variabilità, rappresenta la condizione perchè u abbia direzione fissa; se $u \wedge u' \neq 0$ la $u \wedge u' \times u'' = 0$ rappresenta la condizione purchè u sia $\parallel$ ad un piano fisso.

Differenziale di un vettore $u(t)$ è il prodotto $u'(t) dt$ e si denota con du ; differenziale secondo è $d^2 u = u''(t) dt^2; \dots$ differenziale n -esimo è $d^n u = u^{(n)} dt^n$.

Formula del Taylor. Se $u(t)$ ha le derivate successive fino all'ordine $m-1$, $u(t+h) = u(t) + h u'(t) + \frac{h^2}{2} u''(t) + \dots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} u^{(m-1)}(t) + \frac{h^m}{m!} v$ ove v è un vettore dipendente da t, h, m . Se esiste anche la derivata m -esima, $v = u^{(m)} + w$ con $\lim_{h \rightarrow 0} w = 0$; un'analogha formula vale se in luogo di $u(t)$ si prende un punto $P(t)$.

Integrale di un vettore. Con $\int u(t) dt$ si intende ogni vettore la cui derivata è $u(t)$; se $b(t)$ è un tale vettore, $\int_{t_1}^{t_2} u(t) dt = b(t_2) - b(t_1)$.

Formule d'integrazione per parti: $\int u(t) \times dv(t) = u(t) \times v(t) - \int v(t) \times du(t)$; $\int_{t_0}^{t_1} u(t) \times dv(t) = [u(t) \times v(t)]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} v(t) \times du(t)$; $\int u(t) \wedge dv(t) = u(t) \wedge v(t) + \int v(t) \wedge du(t)$.

2. — Punto e vettore funzioni di più variabili. Se ad ogni sistema di n valori per le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ in un dato campo A corrisponde un punto P od un vettore u , si dice che il punto od il vettore sono funzioni delle n variabili in A ; per mettere ciò in evidenza si può scrivere $P(x_1, x_2, \dots, x_n), u(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Derivata parziale di P o di u rapporto ad x_i è

$$\lim_{h \rightarrow 0} [P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - P(x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)] \frac{1}{h}$$

$$\text{o } \lim_{h \rightarrow 0} [u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)] \frac{1}{h}$$

e si denotano con $\frac{\partial P}{\partial x_i}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Si possono così introdurre le derivate parziali di ordine superiore. È ancora $dP = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i$,

$$du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$$

3. — **Funzioni di un punto.** Un numero u , un punto M , un vettore u si dicono funzioni di un punto P , se ad ogni posizione di P corrisponde un numero u , un punto M , un vettore u .

Gradiente. Se u è funzione numerica del punto P variabile in un campo a 3 dimensioni, dicesi **gradiente** di u e si indica con $\text{grad } u$ il vettore, funzione solo di u e P tale che (1) $du = (\text{grad } u) \times dP$ qualunque sia il vettore spostamento dP di P , essendo du l'incremento corrispondente di u ; se P ha le coordin. cartes. x, y, z è $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{I} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{J} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{K}$. Se P varia in un piano π , alla (1) bisogna aggiungere, per la definizione di $\text{grad } u$, che esso è $\parallel$ al piano π .

Se f è funzione di $u, v, \dots$ che sono funzioni numeriche di P , è $\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad } u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad } v + \dots$

Si ha $\text{grad } (m u) = m \text{grad } u$ (m costante); $\text{grad } (u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v$; $\text{grad } (u v) = u \text{grad } v + v \text{grad } u$; $\text{grad } (u : v) = [v \text{grad } u - u \text{grad } v] : v^2$, $f(u) \text{grad } u = \text{grad } \int f(u) du$. Se r è la distanza ($\neq 0$) di P da un punto o retta o piano fisso, O è il punto fisso o il piede della $\perp$ condotta da P sulla retta o sul piano, si ha $\text{grad } r = (P - O) \frac{1}{r}$ cioè $\text{grad } r$ è un vettore unitario diretto da O a P . Se u è un vettore unitario $\perp$ ad un piano fisso π , r la distanza di P dal piano, positiva o negativa secondo che P ed $O + u$ (O punto qualunque di π) sono o no dalla stessa banda, è $\text{grad } r = u$. Se O è un punto fisso, $\mathbf{L}$ un vettore unitario fisso, r la distanza ($\neq 0$) di P da O ,

φ l'angolo di $P-O$ con $\mathbf{L}$, si ha $\text{grad } \varphi = \frac{1}{r \sin \varphi} (\mathbf{L} \wedge \text{grad } r) \wedge \text{grad } r = \text{cosec } \varphi (\mathbf{L} \wedge \text{grad } r) \wedge \text{grad } \log r$.

Superficie di livello è la superficie d'equaz. $u = \text{costante}$, per ogni punto P passa una sola superficie di livello; $\text{grad } u$ è un vettore uscente da $P \perp$ alla superficie di livello passante per P . Se $\mathbf{n}$ è un vettore unitario normale alla superficie di livello, $d\mathbf{n}$ un tratticello di normale tale che per $dP \parallel \mathbf{n}$ si abbia $dP = \mathbf{n} d\mathbf{n}$, è $du = \text{grad } u \times dP = \mathbf{n} \times \text{grad } u \cdot d\mathbf{n}$ cioè $\frac{du}{d\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \text{grad } u$. Con $\frac{du}{d\mathbf{n}}$ si intende la derivata della funzione u nella direzione della normale alla superficie di livello; essa risulta definita in forma assoluta da $\mathbf{n} \times \text{grad } u$.

b) **Rotazione.** Sia $\mathbf{u}$ un vettore funzione dei punti P di un campo, $dP, \delta P$ indichino 2 spostamenti arbitrari di P , $d\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}$ i corrispondenti incrementi di $\mathbf{u}$; si definisce per $\text{rot } \mathbf{u}$ il vettore per cui $\text{rot } \mathbf{u} \times dP \wedge \delta P = d\mathbf{u} \times \delta P - \delta \mathbf{u} \times dP$. Se rispetto ad un sistema cartesiano destrogiro $P = O + x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}$, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{I} + u_2\mathbf{J} + u_3\mathbf{K}$, si hanno le relazioni: $\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{I} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{J} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{K} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$; $\text{rot } \mathbf{u} = (\text{grad } u_1) \wedge \mathbf{I} + (\text{grad } u_2) \wedge \mathbf{J} + (\text{grad } u_3) \wedge \mathbf{K} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \mathbf{I} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \mathbf{J} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \mathbf{K}$. Si ha $\text{rot } \text{costante} = 0$, $\text{rot } (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{rot } \mathbf{u} + \text{rot } \mathbf{v}$; se m è una funzione numerica di P è $\text{rot } m \mathbf{u} = m \text{rot } \mathbf{u} + \text{grad } m \wedge \mathbf{u}$; se m è costante $\text{rot } m \mathbf{u} = m \text{rot } \mathbf{u}$.

c) **Divergenza.** Dato un vettore $\mathbf{v}$, esistono infinite coppie di vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ per cui $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ giacchè se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è una tale coppia, lo è pure $\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2$, se $\overline{\mathbf{v}}_1 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$, $\overline{\mathbf{v}}_2 = a\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ con $a\beta - ba = 1$; essendo in tale ipotesi $\mathbf{v}_2 \times \text{rot } \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \times \text{rot } \mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}}_2 \times \text{rot } \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \times \text{rot } \mathbf{v}_2$, il numero $\mathbf{v}_2 \times \text{rot } \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \times \text{rot } \mathbf{v}_2$ dipende unicamente da $\mathbf{v}$ e dicesi **divergenza** di $\mathbf{v}$ e si denota con $\text{div } \mathbf{v}$. È $\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$ se

$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{I} + u_2 \mathbf{J} + u_3 \mathbf{K}$. È $\operatorname{div} \text{costante} = 0$, $\operatorname{div} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{v}$; $\operatorname{div} m \mathbf{u} = m \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{grad} m \times \mathbf{u}$, se m è una funz. numerica di P , $\operatorname{div} m \mathbf{u} = m \operatorname{div} \mathbf{u}$, se m è costante; $\operatorname{div} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$.

d) **Prodotti delle funzioni grad, div, rot.** È $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$, $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$ se u è una funz. numerica. I prodotti *div grad*, *grad div*, *rot rot* non si possono esprimere mediante le funzioni fin qui introdotte. La funzione *div grad* si suole denotare con

Δ_2 ed è $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ e la funzione *grad div* —

— *rot rot* con Δ'_2 ed è $\Delta'_2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}$.

CAPITOLO LIV.

Applicazioni geometriche ed analitiche della teoria dei vettori

1. — **Curve piane.** Se $P(t)$ è un punto di un piano, funzione di variabile t in $t_0 \mapsto t_1$, il luogo di P al variare di t nell'intervallo è una curva; se esiste un vettore costante $\mathbf{u}$ per cui $\mathbf{u} \times P'(t) = 0$, la curva sta in un piano $\perp$ ad $\mathbf{u}$.

Se della curva è $r = r(\varphi)$ l'equaz. in coordinate polari, $\mathbf{I}$ un vettore unitario nella direzione e senso dell'asse polare, O il polo, l'equazione vettoriale della curva è $P = O + r(\varphi) e^{i\varphi} \mathbf{I}$; se rispetto a 2 assi cartes. ortogon. per O sono $x = x(t)$, $y = y(t)$ le equaz. parametriche l'equaz. vettoriale è $P = O + x(t) \mathbf{I} + y(t) i \mathbf{I}$, supposto $\mathbf{I}$ vettore unitario nella direzione e verso positivo dell'asse x .

Tangente e normale. $P'(t)$ è un vettore nella direzione della tangente; $\mathbf{T} = P'(t) : \operatorname{mod} P'(t)$ è un vettore unitario

secondo la tangente. Denotando con s la lunghezza dell'arco della curva (pag. 304) è $ds = \text{mod. } dP$; $T = \frac{dP}{ds}$. Se u è funz. numerica dei punti di un piano, $u = \text{cost}$ individua una linea; $\text{grad } u$ è diretto secondo la normale e $i \text{ grad } u$ secondo la tangente alla linea.

Settore infinitesimo coperto da un raggio vettore da un polo qualunque O è $\text{mod } [(P(t) - O) \wedge P'(t)] dt : 2$.

Inviluppi e traiettorie d'un sistema semplicemente infinito di curve. Se $P(t, a)$ appartiene ad una linea d'una famiglia di curve piane dipendenti dal parametro a , apparterrà al loro inviluppo se (1) $\frac{\partial P}{\partial t} \wedge \frac{\partial P}{\partial a} = 0$. Ad es. $P = O + k \text{sen } a \cos a e^{ia} I + t e^{ia} i I$ appartiene ad una delle rette che hanno staccato il segmento k dai 2 assi per O contenenti $I, i I$; la (1) diviene $(k \cos 2a - t) e^{ia} I \wedge e^{ia} i I = 0$ cioè $k \cos 2a = t$, da cui $P - O = k \text{sen}^3 a I + k \cos^3 a i I$, equaz. vettoriale dell'asteroide (pag. 42).

Ferme le notazioni precedenti, l'equaz. $dP \times \frac{\partial P}{\partial t} = \text{mod } dP. \text{mod } \frac{\partial P}{\partial t} \cos \vartheta$ è l'equaz. differenziale delle linee che tagliano sotto angolo ϑ le linee del dato sistema; in particolare per $\vartheta = \pi : 2$, si hanno le traiettorie ortogonali. Ad es. le traiettorie ortogonali delle rette $P - O = t e^{ia} I$ soddisfano all'equaz. $(e^{ia} dt I + e^{ia} t da i I) \times e^{ia} I = 0$, cioè $t = \text{costante}$, epperò sono i cerchi di centro O .

Essendo r_1, r_2 le coord. bipolari (pag. 10) se $u = f(r_1, r_2)$, si consideri la famiglia di curve $u = c$ (c parametro variabile); se si riesce a porre $i \text{ grad } u = h \text{ grad } v$ con h numero e v funzione numerica di P allora $v = \text{cost}$ è l'equaz. delle traiettorie ortogonali. Ad es. se $u = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = \text{cost}$ (curve equipotenziali di Cayley) le traiettorie ortogonali sono $m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2 = \text{cost.}$, in coord. biangolari (pag. 10).

Curvatura è $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times i\mathbf{T}$; si deduce $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{\varrho} i\mathbf{T}$. Se si pone $\frac{ds}{dt} = v$ si ha $P'(t) = v\mathbf{T}$, $P''(t) = v'\mathbf{T} + (v^2:\varrho) i\mathbf{T}$. Si ha $1:\varrho = -[P' \times i P''] : (\text{mod } P')^3$.

Centro di curvatura in P è il punto $C = P + \varrho i\mathbf{T} = P - [P'^2 : (P' \times i P'')] i P'$; il luogo di C è l'evoluta della curva. Per costruire graficamente C , si conducono dai punti $P + P'$, $P + P''$ le $\parallel$ alla normale e alla tangente in P e sia H il punto d'incontro. La $\perp$ da $P + P'$ alla PH taglia in C la normale.

Se $\varrho = \varrho(s)$ è l'equaz. intrinseca della curva (equaz. fra raggio di curvatura ed arco) la curva ha l'equaz. vettoriale $P = P_0 + \int \mathbf{T} ds$ ove $\mathbf{T} = e^{i \int \frac{ds}{\varrho}} \mathbf{T}_0$ ($\mathbf{T}_0$ vettore costante arbitrario, P_0 punto arbitrario).

2. — **Curve storte.** Se $P(t)$ è funz. della variabile t in $t_0 \mapsto t_1$, al variare di t descrive una linea che è storta se non esiste un vettore costante $\mathbf{u}$ per cui $\mathbf{u} \times P'(t) = 0$. Se rispetto ad un sistema di 3 assi per O contenenti i vettori unitari $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ le equaz. parametriche della curva sono $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, l'equaz. vettoriale della curva è $P = O + x(t)\mathbf{I} + y(t)\mathbf{J} + z(t)\mathbf{K}$. È $P'(t)$ un vettore nella direzione della tangente; $\mathbf{T} = P'(t) : \text{mod } P'(t)$ è un vettore unitario nella stessa direzione. Denotando con s l'arco (pag. 320) è $ds = \text{mod } dP$, $\mathbf{T} = \frac{dP}{ds}$. Il piano osculatore (pag. 322) è $\perp$ a $P'(t) \wedge P''(t)$, il quale vettore dà la direzione della binormale; $\mathbf{B} = (P' \wedge P'') : \text{mod } (P' \wedge P'')$ è un vettore unitario nella stessa direzione; la direzione della normale principale è $(P' \wedge P'') \wedge P'$; $\mathbf{N} = \{(P' \wedge P'') \wedge P'\} : \text{mod } \{(P' \wedge P'') \wedge P'\}$ è un vettore unitario nella stessa direzione; è anche $\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} : \text{mod } \frac{d\mathbf{T}}{ds}$.

Flessione e torsione. La curvatura di flessione è $\frac{1}{\varrho} = \text{mod } \frac{d\mathbf{T}}{ds}$ (pag. 324); quella di torsione è $\frac{1}{\tau} = \pm \text{mod } \frac{d\mathbf{B}}{ds}$ il segno

scelto in modo che sia $\frac{d \mathbf{B}}{d s} = \frac{1}{\tau} \mathbf{N}$. Quest'ultima insieme con $\frac{d \mathbf{T}}{d s} = \frac{1}{\rho} \mathbf{N}$, $\frac{d \mathbf{N}}{d s} = - \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{T} + \frac{1}{\tau} \mathbf{B} \right)$ sono le **formule di Frenet** (pag. 327). È ancora $1 : \rho = \{ \text{mod} (P' \wedge P'') \} : (\text{mod } P')^2$; $1 : \tau = - \{ P' \wedge P'' \times P''' \} : (P' \wedge P'')^2$.

Posto $v = \frac{d s}{d t}$, è $P'(t) = v \mathbf{T}$, $P'' = v' \mathbf{T} + (v^2 : \rho) \mathbf{N}$, $P''' = \{ v'' - (v^3 : \rho^2) \} \mathbf{T} + \{ 3 v v' : \rho - (v^2 \rho' : \rho^2) \} \mathbf{N} - (v^3 : \tau \rho) \mathbf{B}$ (gli accenti denotando la derivazione rapporto a t).

Centro di curvatura in P è il punto $C = P + \rho \mathbf{N}$; se dai punti $P + P'$, $P + P''$ si mandano le $\parallel$ a $\mathbf{N}$ e $\mathbf{T}$ che si incontrano in M , la $\perp$ da $P + P'$ alla PM taglia la normale principale in C . La distanza del punto $P + P'''$ dal piano osculatore è $\delta = \pm (P' \wedge P'' \times P''') : \text{mod} (P' \wedge P'')$ onde $\tau \delta = \pm \text{mod} (P' \wedge P'')$ cioè τ è l'altezza del parallelogrammo di base δ equivalente al parallelogr. formato con P' , P'' .

Evolventi, evolute. Se $P(t)$ percorre una linea L , il punto $Q = P - (s + c) \mathbf{T}$ ove s è l'arco, c una costante arbitraria percorre una evolvente della linea L . Posto $\varphi = \int \frac{d s}{\tau} + \varphi_0$ (φ_0 costante arbitraria), il punto $Q = P + \rho \mathbf{N} + \rho \text{tg } \varphi \mathbf{B}$ descrive un'evoluta di L (pag. 333).

3. — **Superficie.** Se $P(u, v)$ è funzione di due variabili numeriche, al variare di (u, v) entro un certo campo, descrive generalmente una superficie. Su di esse sono a considerarsi le linee che si ottengono facendo variare solo u (linee $v = \text{cost.}$) o solamente v (linee $u = \text{cost.}$) (pag. 335). Per un punto P passa una linea v ed una u le cui tangenti sono $\parallel$ ai vettori $\frac{\partial P}{\partial u}$, $\frac{\partial P}{\partial v}$ (se sono $\neq 0$). Una linea sulla superf. ha un'equaz. $f(u, v) = 0$; la tangente in P a codesta linea è $\parallel$ al vettore $d P = \frac{\partial P}{\partial u} d u + \frac{\partial P}{\partial v} d v$ ove $d u$, $d v$ soddisfano a $\frac{\partial f}{\partial u} d u +$

$+\frac{\partial f}{\partial v} dv = 0$. Supposto $\frac{dP}{du} \wedge \frac{dP}{dv} \neq 0$, dP varia nel piano tangente in P e la normale in P è || al vettore $\mathbf{k} = \frac{dP}{du} \wedge \frac{dP}{dv}$.

Linee di curvatura, geodetiche, asintotiche. L'equazione differenziale delle linee di curvatura è $dP \times \mathbf{k} \wedge d\mathbf{k} = 0$; quella delle geodetiche è $dP \wedge d^2P \times \mathbf{k} = 0$; quelle delle asintotiche $dP \times d\mathbf{k} = 0$ (pag. 341); $\mathbf{k}$ definito sopra.

4. — **Applicazioni di calcolo integrale.** a) **Teor. della divergenza.** Sia σ una superficie chiusa che comprende il volume S ; $\mathbf{n}$ un vettore unitario normale a σ e volto verso l'interno di S ; sia $\mathbf{u}$ vettore funzione dei punti di S e σ di cui si può considerare la divergenza; vale allora la formula (1) $\int_S \text{div } \mathbf{u} dS = -\int_\sigma \mathbf{n} \times \mathbf{u} d\sigma$, la quale esprime il *teor. della divergenza o del flusso*. Dicesi **flusso** del vettore $\mathbf{u}$ entrante in σ attraverso $d\sigma$ il prodotto $\mathbf{n} \times \mathbf{u} d\sigma$ epperò la (1) esprime che l'integrale di $\text{div } \mathbf{u}$ esteso a S eguaglia il flusso di $\mathbf{u}$ uscente da σ .

b) **Teor. del gradiente.** Sia u una funzione numerica di P in S e σ , ad un valore, finita e continua insieme colle derivate prime; se $\mathbf{a}$ è un vettore costante qualunque e si applica la (1) ad $\mathbf{a}u$, poichè $\text{div}(\mathbf{a}u) = \mathbf{a} \times \text{grad } u$ si ottiene (2) $\mathbf{a} \times \int_S \text{grad } u dS = -\mathbf{a} \times \int_\sigma \mathbf{n} u d\sigma$ e per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$, la (3) $\int_S \text{grad } u dS = -\int_\sigma \mathbf{n} u d\sigma$ che esprime il **teor. del gradiente**. Se in (2) si prende per $\mathbf{a}$ un vettore unitario nella direzione d'un asse cartes. si ha la formula di Gauss della pag. 270.

c) **Teor. della rotazione.** Se $\mathbf{u}$ è un vettore funzione dei punti P di S e σ di cui si può considerare la rotazione, vale la formula (4) $\int_S \text{rot } \mathbf{u} dS = -\int \mathbf{n} \wedge \mathbf{u} d\sigma$ che si stabilisce applicando la (1) al vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{a}$, essendo $\mathbf{a}$ un vettore costante arbitrario.

d) **Teor. di Stokes.** Se s è una curva chiusa percorsa in un certo senso da un punto P , σ una superficie avente s per

contorno, $\mathbf{u}$ un vettore funzione dei punti P di σ e s e di cui esiste la rot; $\mathbf{n}$ un vettore unitario $\perp$ a σ e diretto in modo che un osservatore con i piedi in P e la testa in $P + \mathbf{n}$ veda percorsa la s nel senso destrogiro, si ha (5) $\int_s \mathbf{u} \times dP = \int_\sigma \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u} d\sigma$ (vedi la formula di Stokes della pag. 271. linea 4). Il teor. espresso da queste formule dicesi di **Stokes** o della **circuitazione**, dicendosi **circuitazione** (o **circolazione**) di $\mathbf{u}$ lungo s l'integrale del 1° membro; esso esprime che la circuitazione di $\mathbf{u}$ lungo s eguaglia il flusso di $\text{rot } \mathbf{u}$ attraverso a una qualunque superficie σ che ha per contorno s .

Se S è semplicemente connesso (tale cioè che una curva chiusa s tutta contenuta in S possa sempre esser contorno di una superficie tutta contenuta in S) ed è $\text{rot } \mathbf{u} = 0$, si trae $\int_s \mathbf{u} \times dP = 0$, cioè se s si compone delle due parti s_1 e s_2 mediante P_0, P_1 supponendo queste percorse nello stesso senso da P_0 a P_1 , $\int_{s_1} \mathbf{u} \times dP = \int_{s_2} \mathbf{u} \times dP$ onde, tenendo fisso P_0 , l'integrale $\int_{s_1} \mathbf{u} \times dP$ dipende solo dall'estremo P_1 cioè è una funzione numerica u dei punti P ; si deduce $\mathbf{u} = \text{grad. } u$ (Cap. LIII, § 3). Nel caso che S non sia semplicemente connesso, u è funzione a più valori.

MECCANICA RAZIONALE.

Cinematica del punto

1. — **Sistema rigido o invariabile** dicesi un insieme di punti le cui mutue distanze non cambiano con il tempo. **Mobile** dicesi un punto P rispetto ad un sistema invariabile (*sistema di riferimento*) se col tempo variano le distanze di P dai punti del sistema; si ammette che P si sposti con continuità col variare continuo del tempo. Per sistema di riferimento prendasi una terna di assi $O\ x\ y\ z$ (che supporremo sempre formare un sistema cartesiano ortogonale destrogiro); si dicono **equazioni del moto** le equazioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ definienti le coordin. cartes. di P in funzione del tempo t . Per unità di lunghezza si prende il *centimetro* e per unità di tempo il *secondo* di tempo solare medio.

Traiettoria di P è il luogo geometrico delle posizioni occupate da P al variare di t ; le equaz. del moto ne sono le equaz. parametriche (Cap. III, § 5).

Indicando con s la lunghezza dell'arco di traiettoria a partire da una conveniente origine, le equaz. della traiettoria siano $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$; si hanno le equaz. del moto se si unisce a queste l'equaz. $s = f(t)$, detta **equaz. del moto sulla traiettoria**, che definisce la lunghezza dell'arco percorso sulla traiettoria, a partire dall'origine fissata, in funzione del tempo t . Si suole distinguere il moto in **diretto** o **retrogrado** a seconda che avviene nel senso di s crescente o decrescente, in **rettilineo** o **curvilineo**, a seconda che la traiettoria è una retta o no.

2. — **Moto rettilineo uniforme** dicesi il moto di un punto P sopra una retta se, in tempi uguali, P percorre spazi uguali.

Velocità di P in questo moto dicesi lo spazio percorso da P in una unità di tempo. L'unità di velocità è la velocità di un punto che percorre un centimetro in un secondo. Fissata un'origine O per contare gli spazi (ascisse), se A è la posizione del punto mobile quando si comincia a contare il tempo (*posizione iniziale*) ed è $OA = a$, l'equaz. del moto è $s = a + vt$ (**equaz. del moto uniforme**), se con s indichiamo lo spazio, con v la velocità, con t il tempo. Se t_1, t_2 sono due tempi qualunque, s_1, s_2 gli spazi corrispondenti è $(s_2 - s_1) : (t_2 - t_1) = v$.

Moto rettilineo vario è il moto rettilineo quando in tempi uguali il punto mobile non percorre spazi uguali. L'equazione $s = f(t)$ ove $f(t)$ non è lineare in t è l'equaz. di un moto vario. Se t e $t + \tau$ sono due tempi qualunque, $f(t + \tau) - f(t)$ è lo spazio percorso dal punto mobile P nell'intervallo di tempo τ ; il rapporto $[f(t + \tau) - f(t)] : \tau$ è detta **velocità media** del punto, perchè un punto Q animato da moto uniforme di velocità $[f(t + \tau) - f(t)] : \tau$, partendo all'istante t dalla posizione occupata da P , arriva al tempo $t + \tau$ nella posizione in cui arriva P .

Velocità di P all'istante t è il limite per $\tau = 0$ di $[f(t + \tau) - f(t)] : \tau$, cioè $f'(t)$, ossia la derivata dello spazio rapporto al tempo. Il moto è diretto o retrogrado a seconda che $f'(t)$ è > 0 o < 0 .

Velocità del moto curvilineo. Il punto mobile P è funzione del tempo; il vettore $P(t + \tau) - P(t)$ è lo **spostamento** subito da P nel tempo τ ; il vettore $[P(t + \tau) - P(t)] : \tau$ dicesi **velocità media** di P nell'intervallo τ ; il vettore limite del precedente per $\tau = 0$, cioè $\frac{dP}{dt}$ dicesi **velocità** di P all'istante t .

Le proiezioni di $\frac{dP}{dt}$ sono $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, se x, y, z sono le coordinate di P . Il modulo di $\frac{dP}{dt}$ è $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \left| \frac{ds}{dt} \right|$.

Se con v indichiamo la velocità, con $\mathbf{T}$ un vettore sulla direzione positiva della tangente (cioè nel senso di s crescente)

è $v = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}$. Le proiezioni di P sui 3 assi cartes. hanno moti

rettilinei di velocità $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ rispettivamente.

3. — **Uniformemente vario** dicesi il moto rettilineo di un punto P quando la velocità di P subisce incrementi uguali in uguali intervalli di tempo. Se j è l'incremento di velocità in un secondo, j dicesi **accelerazione** del moto; è uniformemente **accelerato** o **ritardato** a seconda che $j > 0$ o $j < 0$. La velocità è espressa da $v = b + j t$, b essendo la velocità all'istante $t=0$ (velocità iniziale). Lo spazio è $s = j \frac{t^2}{2} + b t + c$, c lo spazio iniziale.

Se il moto non è uniformemente vario, la velocità non è una funzione lineare del tempo; sia $v = f(t)$; se t e $t + \tau$ sono due tempi qualunque $f(t + \tau) - f(t)$ è l'incremento di velocità del punto P nell'intervallo di tempo $t \rightarrow t + \tau$; il rapporto $[f(t + \tau) - f(t)] : \tau$ dicesi **accelerazione media** nell'intervallo τ .

Il limite per $\tau = 0$ del rapporto precedente, cioè $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$, dicesi **accelerazione** di P all'istante t .

Accelerazione nel moto curvilineo. Siano t , $t + \tau$ due tempi, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v}(t + \tau)$ i due vettori velocità di P nei detti istanti, il vettore $[\mathbf{v}(t + \tau) - \mathbf{v}(t)] : \tau$ dicesi **accelerazione media** di P nell'intervallo τ ; il vettore limite del precedente per $\tau = 0$ dicesi **accelerazione** di P all'istante t . Indicando con $\mathbf{j}$ l'accelerazione

è $\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2}$; le sue proiezioni sugli assi sono $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; il suo modulo è $\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$.

Se con $\mathbf{T}$ e con $\mathbf{N}$ si indicano due vettori unitari nelle direzioni della tangente (nel senso di s crescente) e della nor-

male principale (verso il centro di curvatura (Cap. XLVI, § 11) è $\mathbf{j} = \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{N}$ (ρ raggio di curvatura di flessione); la proiezione di $\mathbf{j}$ sulla tangente (accelerazione tangenziale) è misurata da $\frac{d^2 s}{dt^2}$, sulla normale principale (accelerazione normale) da $\frac{v^2}{\rho}$; l'accelerazione tangenziale ha il senso di $\mathbf{T}$ o il contrario a seconda che v cresce o decresce col tempo, la normale è sempre dello stesso senso di $\mathbf{N}$; l'acceleraz. tangenziale è nulla nei moti uniformi, la normale è nulla nei moti rettilinei ($\rho = \infty$).

Odografo del moto di P è la traiettoria di un punto Q secondo estremo di un vettore col primo estremo in un punto O fisso arbitrario, definito da $\frac{dP}{dt} = Q - O$; moto odografo è il moto di Q ; è $\frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{dQ}{dt}$, cioè l'accelerazione di P uguaglia la velocità del moto odografo. Nel moto piano l'odografo è una linea piana ed in particolare una retta se il moto è rettilineo; se il moto è uniforme, l'odografo è una curva sferica.

Sovraccelerazione (o acceleraz. di 2° ordine) è il limite per $\tau = 0$ del vettore $[\mathbf{j}(t + \tau) - \mathbf{j}(t)]$: τ rappresentando $\mathbf{j}(t), \mathbf{j}(t + \tau)$ le acceleraz. negli istanti $t, t + \tau$; questo limite è il vettore $\frac{d^3 P}{dt^3}$, le cui proiezioni sugli assi sono $\frac{d^3 x}{dt^3}, \frac{d^3 y}{dt^3}, \frac{d^3 z}{dt^3}$.

In un moto piano la sovraccelerazione $\mathbf{w}$ ha una componente tangenziale $\mathbf{w}_t = \left(\frac{d^3 v}{dt^3} - \frac{v^3}{\rho^2} \right) \mathbf{T}$ e una normale $\mathbf{w}_n = \left(\frac{3v}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{v^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) \mathbf{N}$ ove $\frac{d\rho}{dt}$ può essere sostituito da $\pm \frac{v}{\rho} R$, essendo R il raggio di curvatura dell'evoluta. Se P percorre di moto uniforme un cerchio di raggio r la sovracce-

lerazione è tutta tangenziale di grandezza $v^3 : r^2$ e di verso opposto alla velocità.

4. — **Componenti della velocità ed accelerazione in coordinate polari nel piano.** Se P si muove in un piano nel quale è fissato un sistema polare, di polo O e di asse polare individuato dal vettore unitario $\mathbf{I}$, è $P - O = r e^{i\varphi} \mathbf{I}$ (Cap. LII, § 4) se r e φ sono coord. polari di P . È allora $\frac{dP}{dt} = \frac{dr}{dt} e^{i\varphi} \mathbf{I} + r \frac{d\varphi}{dt} i e^{i\varphi} \mathbf{I} = \frac{dr}{dt} \mathbf{R} + r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{N}$, se $\mathbf{R}$ è un vettore unitario nella direzione del raggio vettore ed $\mathbf{N} = i \mathbf{R}$, vettore unitario sulla $\perp$ al raggio vettore; cioè le proiezioni v_r della velocità sul raggio vettore, e v_n sulla normale al raggio vettore sono $v_r = \frac{dr}{dt}$, $v_n = r \frac{d\varphi}{dt}$. La $\frac{d\varphi}{dt}$ dicesi **velocità angolare**. Si ha ancora

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} \mathbf{R} + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) \mathbf{N};$$

cioè le proiezioni dell'accelerazione sopra il raggio vettore e la normale ad esso sono rispettivamente $j_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$,

$$j_n = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right).$$

Velocità areolare è il limite del rapporto fra l'area ΔS coperta dal raggio vettore nell'intervallo di tempo Δt , e l'intervallo stesso di tempo, al tendere di Δt a zero, cioè $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}$. Il momento della velocità rispetto ad un asse pel polo O normale al piano in cui avviene il moto, cioè la proiezione sopra quest'asse di $(P - O) \wedge \mathbf{v}$ è, in coord. cartesiane, $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$, in polari $r^2 \frac{d\varphi}{dt}$, cioè il doppio della velocità areolare.

$$\dot{\mathbf{E}} (P - O) \wedge \mathbf{j} = \frac{d}{dt} [(P - O) \wedge \mathbf{v}].$$

Se $r = f(\varphi)$ è l'equaz. polare di una curva pensata percorsa da un punto P è $v_r : v_n = \frac{dr}{d\varphi} : r$, onde la direzione della tangente è quella della risultante di $\frac{dr}{d\varphi} \mathbf{R}$, $r \mathbf{N}$ (metodo di Roberval).

Se $f(r, r')$ è l'equaz. di una curva in coordinate bipolari (Capitolo I, § 8) la velocità di un punto P che la percorre ha sui raggi vettori le proiezioni ortogonali $v_{r''} = \frac{dr}{dt}$, $v_r = \frac{dr'}{dt}$; allora è $v_r : v_{r''} = -\frac{\partial f}{\partial r'} : \frac{\partial f}{\partial r}$, da cui trovasi la direzione della tangente alla curva.

5. — **Alcuni moti particolari.** a) **Oscillatorio armonico** dicesi il moto rettilineo definito da $s = a \sin(n t + \alpha_0)$. Per $t = 0$, $s = a \sin \alpha_0$; il punto P trovasi nella stessa posizione agli istanti $t = k(2\pi:n)$ con k intero qualunque; α_0 è detta **fase iniziale** e definisce la posizione iniziale di P . La velocità di P è $v = n \cos(n t + \alpha_0)$; è $v = 0$ agli istanti $t = (k\pi - \alpha_0) : n$, nei quali per k dispari $s = -a$, per k pari $s = a$; P oscilla fra queste due posizioni; la durata di un'intera oscillazione è $T = 2\pi : n$ e dicesi **periodo**; $n : 2\pi$ è il numero delle oscillaz. compiute in un'unità di tempo e dicesi **frequenza**; n numero delle oscillazioni nel tempo 2π dicesi **pulsazione**, $2a$ è l'ampiezza di un'intera oscillazione. L'accelerazione è $j = -n^2 \sin(nt + \alpha_0) = -n^2 s$; dunque $\frac{d^2 s}{dt^2} = -n^2 s$. Viceversa il moto definito dall'equaz. $\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$ è $s = a \sin(\omega t + \alpha_0)$ con a , α_0 costanti arbitrarie.

b) **Moto circolare uniforme** è il moto di P che percorre un cerchio (raggio a) con velocità costante (di modulo v). Condotti pel centro O del cerchio due assi cartesiani ortogon., sia α_0 l'angolo che il raggio che va alla posizione iniziale P_0 di P forma con l'asse x . Contando gli spazi dal punto A del cerchio

sul semiasse x positivo e ponendo $\varphi = \widehat{AOP}$ è $s = vt + a\alpha_0 = a\varphi$, onde $\varphi = \alpha_0 + \omega t$ posto $\omega = v:a$, numero che misura l'angolo coperto dal raggio OP nell'unità di tempo od anche la velocità di un punto su OP alla distanza 1 da O e dicesi **velocità angolare** di P . L'acceleraz. è tutta normale (§ 3) ed è $j = v^2:a = \omega^2.a$ giacchè $v = \omega a$. La proiezione di P sull'asse y ha il moto definito da $y = a \sin(\alpha_0 + \omega t)$, **moto armonico** di fase iniziale α_0 , di periodo $2\pi:\omega$, di ampiezza $2a$; la proiezione di P sull'asse x ha il moto $x = a \cos(\alpha_0 + \omega t)$ armonico dello stesso periodo ed ampiezza e di fase iniziale $\alpha_0 - (\pi:2)$.

c) **Moto che su due assi ortogonali si proietta in moti armonici di ugual frequenza** è definito dalle 2 equazioni

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y \quad \text{i cui integrali generali sono}$$

$x = a_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$, $y = a_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$ con $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ costanti arbitrarie. La traiettoria del punto $P(x, y)$ è l'ellisse

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + 2 \frac{xy}{a_1 a_2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2). \quad \text{Il tempo im-}$$

piegato da P a percorrere l'ellisse è il periodo dei 2 moti armonici. Se $|\alpha_1 - \alpha_2| = \pi:2$ l'ellisse ha i semiasse a_1, a_2 e per $\alpha_1 = \alpha_2$ si ha il caso b). Se $\alpha_1 = \alpha_2$ o $\alpha_1 = \alpha_2 + \pi$ la traiettoria è la retta $x:a_1 = \pm(y:a_2)$ nella quale il moto è armonico di ampiezza $2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

d) **Oscillatorio smorzato** dicesi il moto rettilineo definito da $s = a e^{-pt} \sin(qt + \alpha_0)$ ($a, p, q > 0$). La velocità è $v = a e^{-pt} [q \cos(qt + \alpha_0) - p \sin(qt + \alpha_0)]$ che è nulla quando $p:q = \operatorname{tg}(qt + \alpha_0)$ cioè per $t = (a - \alpha_0 + k\pi):q$, ove k è un intero qualunque e a il più piccolo angolo per cui $\operatorname{tg} a = p:q$; le posizioni del punto mobile P a questi tempi sono date da $s_k = (-1)^k e^{-\frac{p}{q}(a - \alpha_0 + k\pi)} \sin a$, cioè P oscilla intorno all'origine compiendo oscillazioni di ampiezza decrescente indefinitamente al crescere di k . L'acceleraz. è $j = -pv - a e^{-pt} (q^2 \sin(qt + \alpha_0) + pq \cos(qt + \alpha_0)) = -[2pv + (p^2 + q^2)s]$. **Oscillatorio espan-**

sivo è il moto definito da $s = a e^{p't} \sin(qt + \alpha_0)$ ($a, p', q > 0$) giacchè ai tempi $t = (a - \alpha_0 + k\pi) : q$ è $s_k = (-1)^k e^{\frac{p'}{q}(a - \alpha_0 + \pi)}$ $\sin a$, espressione crescente al crescere dell'intero k . Il moto oscillatorio smorzato soddisfa all'equaz. $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2p \frac{ds}{dt} + (p^2 + q^2)s = 0$ l'espansivo all'equaz. $\frac{d^2 s}{dt^2} - 2p' \frac{ds}{dt} + (p'^2 + q^2)s = 0$.

Viceversa, ogni moto che soddisfa all'equaz. $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2h^2 \frac{ds}{dt} + l^2 s = 0$ ($l^2 > h^4$) è oscillatorio smorzato, giacchè l'integrale generale è $s = a e^{-h^2 t} \sin(\sqrt{l^2 - h^4} \cdot t + \alpha_0)$ con a, α_0 costanti arbitrarie; ogni moto che soddisfa all'equaz. $\frac{d^2 s}{dt^2} - 2h^2 \frac{ds}{dt} + l^2 s = 0$ ($l^2 > h^4$) è oscillatorio espansivo giacchè l'integrale generale è $s = a e^{h^2 t} \sin(\sqrt{l^2 - h^4} t + \alpha_0)$ con a, α_0 costanti arbitrarie.

e) Un punto P percorra la spirale logaritmica $\varrho = b e^{-m\varphi}$ ($m > 0$) in guisa, che se O è il polo, il raggio GP ruoti uniformemente intorno ad O (con velocità angolare ω costante). Se α_0 è l'anomalia della posizione di P al tempo $t = 0$, sarà $\varphi = \alpha_0 + \omega t$ ed allora $x = b e^{-m(\alpha_0 + \omega t)} \cos(\alpha_0 + \omega t)$, $y = a e^{-m\omega t} \sin(\alpha_0 + \omega t)$ posto $a = b e^{-m\alpha_0}$; con che è messo in evidenza che i moti delle proiezioni sugli assi sono oscillatori smorzati; se $m < 0$, i moti suddetti sono oscillatori espansivi.

f) **Moto elicoidale** è il moto definito da $x = a \sin \omega t$, $y = a \cos \omega t$, $z = \omega h t$; la velocità è di modulo $\omega \sqrt{a^2 + h^2}$ e ha sugli assi le proiezioni $\omega a \cos \omega t$, $-\omega a \sin \omega t$, ωh ; il moto proiettato su z è uniforme di velocità h , il moto proiettato sul piano xy è circolare uniforme di velocità angolare ω . La traiettoria è l'elica di passo $2\pi h$ e di raggio a . Se P si muove sul cerchio di raggio a con velocità angolare costante ω e il cerchio si sposta perpendicolarmente al proprio piano con velocità costante ωh , P è animato dal moto elicoidale dianzi definito. L'accelerazione è tutta normale di grandezza $a\omega^2 = \omega^2(a^2 + h^2) : \varrho$ da cui si deduce $\varrho = a + (h^2 : a)$.

g) **Moto sotto accelerazione costante.** Se P ha la accelerazione costante j , di modulo j , assunto per asse z una retta nella direzione di j , col senso positivo uguale a quello di j , le equazioni differenziali del moto sono $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2z}{dt^2} = j$:

se l'asse x è posto in un piano parallelo ad j e contenente la velocità iniziale, la proiezione di questa sull'asse y sarà nulla e siano v_{ox} , v_{oz} quelle sull'asse x e z rispettiv. Allora integrando una prima

volta le dette equazioni si ha $\frac{dx}{dt} = v_{ox}$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dz}{dt} = j t + v_{oz}$

ed integrando di nuovo, dette x_0 , 0 , z_0 le coordinate della posizione iniziale, $x = v_{ox} t + x_0$, $y = 0$, $z = j \frac{t^2}{2} + v_{oz} t + z_0$: il moto è dunque

piano; la traiettoria è la parabola $z = \frac{j}{2 v_{ox}^2} (x - x_0)^2 + \frac{v_{oz}}{v_{ox}} (x - x_0) + z_0$.

Se fosse $v_{ox} = 0$, il moto è rettilineo, uniformemente vario. Se non v'ha velocità iniziale e l'origine degli assi è nella posizione iniziale, è $v = \sqrt{2 j z}$.

CAPITOLO LVI.

Moti finiti di un sistema rigido e loro composizione

1. — a) **Moto di traslazione.** Se Σ è un sistema rigido, A , A_1 sono due posizioni di uno stesso punto in due posizioni diverse S , S_1 del sistema, il vettore $A_1 - A$ dicesi **spostamento** di A ; se tutti i punti di Σ subiscono spostamenti eguali, si dice che la posizione S_1 è ottenuta da S con la **traslazione semplice** $A_1 - A$. Immaginando le infinite posizioni intermedie tra S ed S_1 , se due posizioni qualunque sono ottenute l'una dall'altra mediante una traslazione semplice, si dice che il moto di Σ dalla posi-

zione S alla S_1 è un **moto continuo di traslazione**. I punti di S descrivono curve uguali e $\parallel$; le velocità dei punti del sistema sono, in ogni istante, uguali; e reciprocamente se, in ogni istante, le velocità dei punti di un sistema rigido Σ sono uguali, il sistema è animato da un moto continuo di traslazione.

Di moto di traslazione istantaneo dicesi animato *in un istante* un sistema Σ se in quell'istante le velocità di tutti i punti sono vettori uguali.

b) **Moto di rotazione**. Se un sistema rigido Σ ha un asse fisso, si fa passare da una posizione S ad una S_1 facendo coincidere un punto P di S col suo corrispondente in S_1 ; ciò si ottiene con una **rotazione** intorno all'asse. Fissato un senso sull'asse, diremo positive quelle rotazioni che rispetto ad un osservatore disposto nel senso dell'asse sono vedute compiersi da sinistra verso destra; **ampiezza** è il più piccolo angolo (fra 0 e 2π) di cui occorre ruotare Σ nel senso positivo per farlo passare dalla posizione S alla S_1 .

Le traiettorie dei singoli punti sono archi di cerchio in piani $\perp$ all'asse col centro sull'asse. Se ω è il modulo della velocità in un dato istante di un punto P distante di 1 dall'asse, $r\omega$ è il modulo della velocità di un punto alla distanza r . Dicesi ω **velocità angolare**; posto sull'asse un vettore ω di modulo ω in tal senso che la rotazione di Σ apparisca per un osservatore disposto secondo esso da sinistra a destra, la velocità v di un qualunque punto Q di Σ è il momento di ω rispetto a Q . Se in un dato istante i punti di un sistema rigido Σ , hanno velocità che sono i momenti rispetto ai punti stessi di un vettore ω , si dice che Σ è animato in quell'istante da un **moto di rotazione istantaneo** intorno all'asse di ω , con velocità angolare ω .

c) **Moto elicoidale**. Se un sistema rigido Σ è animato da una traslazione lungo un asse e da una rotazione intorno allo stesso asse, e se le velocità angolare ω di rotazione e di traslazione τ sono costanti, ogni punto A di Σ descrive eliche cir-

colari il cui asse è l'asse della rotazione: il moto del sistema si dice **elicoidale**. Se in un dato istante la velocità di ogni punto A di un sistema rigido Σ si può considerare la risultante di due velocità, l'una dovuta ad un moto istantaneo di traslazione, l'altra di rotazione istantanea intorno ad un asse parallelo alla traslazione, il moto in quell'istante, si dice **istantaneo elicoidale**. Il rapporto $\tau : \omega$ dicesi **parametro** del moto elicoidale.

2. — **Analisi del moto finito di un sistema rigido.** a) Nel moto di un sistema Σ piano nelp proprio piano siano s, s_1 2 posizioni di Σ ; si fa coincidere s con s_1 quando 2 punti A, B di s si sono fatti coincidere con i 2 punti corrispond. A_1, B_1 di s_1 : ciò si ottiene con una rotazione di s intorno al punto C d'intersezione delle rette $\perp$ ai segmenti AA_1, BB_1 nei loro punti medi, in guisa che A vada in A_1 .

b) Nel moto di un sistema Σ con un punto fisso O la sezione di Σ con una qualunque sfera S di centro O si muove su S ; siano s, s_1 2 posizioni della detta sezione, le quali si faranno coincidere facendo coincidere 2 punti A, B di s con i corrispond. A_1, B_1 di s_1 ; ciò si ottiene facendo ruotare Σ intorno all'asse OC se C è l'incontro dei 2 cerchi massimi su S $\perp$ agli archi di cerchio massimo AA_1, BB_1 , nei loro punti medi in guisa che A vada in A_1 .

c) Siano s e s_1 le posizioni di un qualunque sistema rigido Σ , A un punto di s , A_1 il corrispond. in s_1 ; impressa a Σ la traslazione $A_1 - A$ e detta s' la nuova posizione di Σ , s' e s_1 hanno un punto unito A_1 , quindi (caso preced.) con una rotazione intorno ad un asse per A_1 si fa coincidere s' con s_1 : dunque s si fa coincidere con s_1 mediante una traslazione ed una rotazione. Ciò si può ottenere in infiniti modi, ma tutti gli assi di rotazione sono paralleli e le ampiezze delle rotazioni uguali. Se A, B, C sono tre punti di s , A_1, B_1, C_1 i corrispond. in s_1 , si considerino i tre vettori $A_2 - O = A_1 - A, B_2 - O = B_1 - B, C_2 - O = C_1 - C$ essendo O un punto qualunque; sia OP la $\perp$ da O al piano $\sigma \equiv A_2B_2C_2$; se A', A'_1, B', B'_1 sono

le proiezioni su σ di A, A_1, B, B_1 sia C il centro della rotazione con cui $A' B'$ coincidono con $A'_1 B'_1$; allora la parallela per C ad OP è l'asse di rotazione parallelamente al quale dando la traslazione $P - O$ si porta s a coincidere con s_1 : si porta dunque s a coincidere con s_1 con un moto elicoidale. La traslazione $P - O$ è la minima.

3. — Composizione di moti finiti. *a) Più traslazioni* si compongono in una traslazione rappresentata da un vettore somma dei vettori delle traslazioni componenti. *b) Due rotazioni intorno ad assi paralleli* ed aventi lo stesso senso equivalgono ad una rotazione unica di ampiezza uguale alla somma delle ampiezze delle rotazioni componenti intorno ad un asse parallelo e nello stesso senso. Se O_1, O_2 sono le traccie dei due assi su un piano normale, ω_1, ω_2 le ampiezze delle rotazioni, che si seguono nell'ordine, la traccia dell'asse della rotazione risultante è l'incontro delle rette che si ottengono facendo ruotare la $O_1 O_2$ intorno ad O_1 di $\omega_1 : 2$ nel senso contrario alla rotazione e intorno ad O_2 di $\omega : 2$ nel senso della rotazione.

c) Due rotazioni intorno ad assi paralleli, aventi senso contrario, di ampiezze non uguali, equivale ad una rotazione unica intorno ad un asse parallelo, di ampiezza uguale alla differenza delle due ampiezze, di senso uguale a quella dell'ampiezza maggiore in valore assoluto. Ferme le notazioni precedenti, la traccia dell'asse di rotazione risultante è l'intersezione delle rette che si ottengono facendo ruotare la retta $O_1 O_2$ intorno ad O_1 di $\omega_1 : 2$ nel senso contrario alla rotazione e intorno ad O_2 di $\omega_2 : 2$ nel senso della rotazione. *d) Due rotazioni intorno a due assi paralleli di senso contrario ma di ampiezza uguale* (coppia di rotazioni) equivalgono ad una traslazione normale al piano dei due assi, di ampiezza $2 \delta \sin (\omega : 2)$ se $\delta = \overline{O_1 O_2}$ e ω è l'ampiezza delle due rotazioni e la cui direzione forma con $O_1 O_2$ l'angolo $(\omega + \pi) : 2$. *e) Una rotazione seguita da una traslazione normale all'asse della rotazione* equivale ad una rotazione intorno ad un asse $\parallel$ di ampiezza

uguale alla precedente. Se O è la traccia dell'asse della rotazione su un piano σ normale, O' un punto per cui $O' - O$ rappresenti la traslazione, la traccia su σ del nuovo asse di rotazione è l'incontro della retta OR per O che con la normale OA a OO' forma l'angolo $-\omega:2$, con la retta per $O' \parallel$ alla simmetrica di OR rispetto ad OA .

f) Due rotazioni intorno ad assi concorrenti in O di ugual senso equivalgono ad una rotazione unica intorno ad un asse per O , nello stesso senso. Siano $O_1 O_2$ le traccie sopra la sfera, di centro O e raggio 1, degli assi delle rotazioni che si seguono nell'ordine; ω_1, ω_2 le ampiezze delle rotazioni, α l'arco di cerchio massimo $O_1 O_2$; la traccia sulla sfera dell'asse della rotazione risultante è l'intersezione degli archi di cerchio massimo ottenuti facendo rotare intorno ad O_1 l'arco $O_1 O_2$ di $\omega_1:2$ nel senso contrario alla rotazione, e l'arco $O_2 O_1$ intorno ad O_2 di $\omega_2:2$ nel senso della rotazione. L'ampiezza della rotazione è ω definito da $\cos(\omega:2) = \cos(\omega_1:2)\cos(\omega_2:2) - \sin(\omega_1:2)\sin(\omega_2:2)\cos \alpha$.

*g) Una rotazione ed una traslazione non parallela all'asse di rotazione danno luogo ad un moto elicoidale; si decomponga la traslazione in 2, una $\parallel$ e l'altra $\perp$ all'asse di rotazione; la rotazione e la traslazione $\perp$ all'asse di rotazione equivalgono ad una rotazione di uguale ampiezza intorno ad un asse $\parallel$ (caso *e*); quest'ultima e la traslazione $\parallel$ equivalgono ad un moto elicoidale.*

*h) Due rotazioni intorno ad assi sghembi si compongono in un moto elicoidale nel modo seguente: una delle rotazioni è sostituibile da una rotazione della stessa ampiezza intorno ad un asse $\parallel$ ed incidente all'altro asse e da una traslazione $\perp$ al primo asse (caso *e*); le 2 rotazioni si compongono in una sola (caso *f*) quest'ultima e la traslazione danno luogo ad un moto elicoidale (caso *g*).*

Analisi del moto istantaneo di un sistema rigido.

Moto continuo di un sistema rigido

1. — **Moto rispetto a due terne di assi l'una fissa e l'altra mobile.** Un sistema Σ rigido sia riferito ad una terna di assi ortogonali $O(x, y, z)$ fissa e ad una terna di assi $O_1(x_1, y_1, z_1)$ mobile; le 2 terne sono destrogire; $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ sono 3 vettori di modulo 1 nelle direzioni e sensi positivi di x, y, z ; $\mathbf{I}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1$ di x_1, y_1, z_1 ; i coseni direttori degli assi di una terna rispetto all'altra sono quelli della pag. 399. Si può considerare il **moto di Σ rispetto ad $O(x, y, z)$** (detto anche **moto assoluto**) ed il **moto rispetto ad $O_1(x_1, y_1, z_1)$** (detto anche **moto relativo**).

Se le coordinate di un punto P di Σ rispetto alla terna fissa sono x, y, z e rispetto alla mobile sono x_1, y_1, z_1 e ξ, η, ζ sono le coordin. di O_1 rispetto ad O , dalla $P - O_1 = (P - O) - (O_1 - O)$ si trae $x_1 \mathbf{I}_1 + y_1 \mathbf{J}_1 + z_1 \mathbf{K}_1 = (x - \xi) \mathbf{I} + (y - \eta) \mathbf{J} + (z - \zeta) \mathbf{K}$, da cui le relazioni cartesiane (cfr. pag. 14) (1) $x = \xi + a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1$, $y = \eta + a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1$, $z = \zeta + a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1$, e (2) $x_1 = (x - \xi) a_1 + (y - \eta) a_2 + (z - \zeta) a_3$, $y_1 = (x - \xi) b_1 + (y - \eta) b_2 + (z - \zeta) b_3$, $z_1 = (x - \xi) c_1 + (y - \eta) c_2 + (z - \zeta) c_3$. Se di P si conosce il moto rispetto ad O_1 e il moto della terna O_1 , le $\xi, \eta, \zeta, x_1, y_1, z_1, a_1, b_1, \dots, c_3$ sono note funzioni del tempo t , onde le (1) fanno conoscere x, y, z in funzione di t e quindi il moto di P rispetto ad O . Se di P e della terna O_1 si conosce il moto rispetto alla terna fissa, le (2) fanno conoscere il moto di P rispetto alla terna O_1 .

Posto $\frac{d\mathbf{J}_1}{dt} \times \mathbf{K}_1 = p$, $\frac{d\mathbf{K}_1}{dt} \times \mathbf{I}_1 = q$, $\frac{d\mathbf{I}_1}{dt} \times \mathbf{J}_1 = r$ da

cui $\mathbf{J}_1 \times \frac{d\mathbf{K}_1}{dt} = -p$, $\mathbf{K}_1 \times \frac{d\mathbf{I}_1}{dt} = -q$, $\mathbf{I}_1 \times \frac{d\mathbf{J}_1}{dt} = -r$,
 e detto ω un vettore di proiezioni p, q, r su x_1, y_1, z_1 , si ha
 $\frac{d\mathbf{I}_1}{dt} = r\mathbf{J}_1 - q\mathbf{K}_1 = \omega \wedge \mathbf{I}_1$, $\frac{d\mathbf{J}_1}{dt} = p\mathbf{K}_1 - r\mathbf{I}_1 = \omega \wedge \mathbf{J}_1$,
 $\frac{d\mathbf{K}_1}{dt} = q\mathbf{I}_1 - p\mathbf{J}_1 = \omega \wedge \mathbf{K}_1$.

Se P è un qualunque punto di Σ , *connesso rigidamente* con la
 terna O_1 , derivando rapporto a t la $P - O_1 = x_1\mathbf{I}_1 + y_1\mathbf{J}_1 + z_1\mathbf{K}_1$,
 si deduce $\frac{dP}{dt} = \frac{dO_1}{dt} + \omega \wedge (P - O_1)$ che dà la velocità di
 P (**velocità di trascinamento**) quale risultante di una trasla-
 zione istantanea di velocità $\frac{dO_1}{dt}$ e di una rotazione istantanea
 definita da ω applicato in O_1 . Le sue proiezioni sugli assi
 mobili sono $u_o + qz_1 - ry_1$, $v_o + rx_1 - pz_1$, $w_o + py_1 - qx_1$
 se u_o, v_o, w_o sono le proiezioni di $\frac{dO_1}{dt}$.

Se u è un vettore rigidamente connesso con la terna O_1 , è
 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \omega \wedge \mathbf{u}$. Se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{I}_1 + u_2\mathbf{J}_1 + u_3\mathbf{K}_1$ è variabile
 con il tempo, $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left(\frac{du_1}{dt}\mathbf{I}_1 + \frac{du_2}{dt}\mathbf{J}_1 + \frac{du_3}{dt}\mathbf{K}_1 \right) +$
 $+ \left(u_1 \frac{d\mathbf{I}_1}{dt} + u_2 \frac{d\mathbf{J}_1}{dt} + u_3 \frac{d\mathbf{K}_1}{dt} \right)$ in cui il 1° termine è la de-
 rivata di u rispetto ad un osservatore posto in O_1 che s'indi-
 cherà con $\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_1$ ed il 2° è $\omega \wedge \mathbf{u}$, onde (3) $\frac{d\mathbf{u}}{dt} =$
 $= \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_1 + \omega \wedge \mathbf{u}$.

**Relazioni fra le velocità e fra le accelerazioni dei due
 moti.** Posto in (3) $\mathbf{u} = P - O$, essendo P un punto di Σ , si ha
 che la **velocità di P rispetto ad O** (detta anche **velocità assoluta**)
 è (4) $\frac{dP}{dt} = \left(\frac{dP}{dt} \right)_1 + \left[\frac{dO_1}{dt} + \omega \wedge (P - O_1) \right]$ cioè la risul-

tante della **velocità di P rispetto ad O_1** (detta anche **velocità relativa** $= \frac{d x_1}{d t} \mathbf{I}_1 + \frac{d y_1}{d t} \mathbf{J}_1 + \frac{d z_1}{d t} \mathbf{K}_1$) e della **velocità di strascinamento** $(= x_1 \frac{d \mathbf{I}_1}{d t} + y_1 \frac{d \mathbf{J}_1}{d t} + z_1 \frac{d \mathbf{K}_1}{d t})$. Derivando rispetto a t la (4), si ha (5) $\frac{d^2 P}{d t^2} = \left(\frac{d^2 P}{d t^2} \right)_1 + \left[\frac{d^2 O_1}{d t^2} + \frac{d \boldsymbol{\omega}}{d t} \wedge (P - O_1) + \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{d(P - O_1)}{d t} \right] + 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\frac{d P}{d t} \right)_1$, cioè l'**accelerazione di P rispetto ad O** (o **accelerazione assoluta**) è la risultante delle 3 acceleraz.: $\left(\frac{d^2 P}{d t^2} \right)_1$ **acceleraz. rispetto ad O_1** (o **acceleraz. relativa** $= \frac{d^2 x_1}{d t^2} \mathbf{I}_1 + \dots$); $\frac{d^2 O_1}{d t^2} + \frac{d \boldsymbol{\omega}}{d t} \wedge (P - O_1) + \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{d(P - O_1)}{d t}$ (l'ultimo termine equivalente a $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O_1)$, supponendosi nella derivazione P connesso rigidamente con O_1) **acceleraz. di strascinamento** $\left(= x_1 \frac{d^2 \mathbf{I}_1}{d t^2} + \dots \right)$; $2 \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\frac{d P}{d t} \right)_1$ **acceleraz. complementare o di Coriolis** $(= 2 \left(q \frac{d z_1}{d t} - r \frac{d y_1}{d t} \right) \mathbf{I}_1 + 2 \left(r \frac{d x_1}{d t} - p \frac{d z_1}{d t} \right) \mathbf{J}_1 + 2 \left(p \frac{d y_1}{d t} - q \frac{d x_1}{d t} \right) \mathbf{K}_1)$.

L'**acceleraz. complementare** è nulla se $\left(\frac{d P}{d t} \right)_1 = 0$, se $\boldsymbol{\omega} = 0$ (la terna O_1 ha un moto di traslazione), se $\boldsymbol{\omega} \parallel \left(\frac{d P}{d t} \right)_1$ (la velocità relativa è $\parallel$ all'asse della rotazione istantanea della terna); nel moto piano la sua grandezza è $2 \boldsymbol{\omega} \cdot \text{mod} \left(\frac{d P}{d t} \right)_1$. L'**acceleraz. di strascinamento** è la risultante di 3 acceleraz. (**teor. di Rivals**): $\frac{d^2 O_1}{d t^2}$, **acceleraz. di O_1** ; $\frac{d \boldsymbol{\omega}}{d t} \wedge (P - O_1)$, **momento**

rispetto a P di $\frac{d\omega}{dt}$ (accelerazione angolare) applicato in O_1

$$\left[= \left(z_1 \frac{dq}{dt} - y_1 \frac{dr}{dt} \right) I_1 + \left(x_1 \frac{dr}{dt} - z_1 \frac{dp}{dt} \right) J_1 + \left(y_1 \frac{dp}{dt} - x_1 \frac{dq}{dt} \right) K_1 \right]; \quad \omega \wedge \frac{d(P-O_1)}{dt} \text{ (acceleraz. centripeta) di gran-}$$

dezza $\omega^2 R$ (se R è la distanza di P da ω) diretta normalmente al piano di ω e P e in verso tale che un osservatore disposto lungo esso vede il senso di ω da sinistra verso destra. Le proiezioni su x_1, y_1, z_1 di quest'ultima accelerazione sono $p\delta - x_1\omega^2, q\delta - y_1\omega^2, r\delta - z_1\omega^2$, posto $\delta = px_1 + qy_1 + rz_1$.

Formule di Poisson. Per definizione $p = b_1'c_1 + b_2'c_2 + b_3'c_3 = -(b_1c_1' + b_2c_2' + b_3c_3')$; $q = c_1'a_1 + c_2'a_2 + c_3'a_3 = -(c_1a_1' + c_2a_2' + c_3a_3')$; $r = (a_1'b_1 + a_2'b_2 + a_3'b_3) = -(b_1'a_1 + b_2'a_2 + b_3'a_3)$ denotando coll'accento le derivate rapporto al tempo. Le proiezioni di ω sugli assi x, y, z sono $P = pa_1 + qb_1 + rc_1$; $Q = pa_2 + qb_2 + rc_2$; $R = pa_3 + qb_3 + rc_3$.

Le derivate dei 9 coseni $a_1, a_2, \dots, c_3$ si esprimono mediante i coseni stessi e p, q, r mediante le formule (di Poisson) $a_1' = ra_2 - qa_3, a_2' = pa_3 - ra_1, a_3' = qa_1 - pa_2$ e le altre 6 cambiando a in b e c . Si ha ancora $a_1' = Qc_1 - Rb_1, b_1' = Ra_1 - Pc_1, c_1' = Pb_1 - Qa_1$ e le altre 6 cambiando l'indice 1 in 2 e 3.

2. — Composizione dei moti istantanei simultanei. Dire che un sistema invariabile Σ è animato da più moti simultanei significa che Σ è animato dal 1° moto rispetto ad una terna O_1 la quale è animata dal 2° moto rispetto ad una terna O_2 , la quale è animata dal 3° moto rispetto ad una terna O_3 e così via. Applicando il teor. espresso dalla (4), successivamente a 2, 3, ecc. moti, si vede che la velocità di un punto P di Σ è la risultante delle velocità singole dei moti istantanei componenti, onde l'ordine con cui si compongono i moti è indifferente.

Se Σ è animato da n traslazioni istantanee, il moto risultante è una traslazione di velocità uguale alla risultante della velocità delle singole traslazioni.

Se Σ è animato da n rotazioni intorno ad assi concorrenti $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ il moto risultante è la rotazione $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$. Una coppia di rotazioni istantanee $\omega, -\omega$ equivale ad una traslazione istantanea la cui velocità è il momento della coppia (Cap. LII, § 5). Se P è un punto di Σ , la sua velocità ha l'espressione $\frac{d O_1}{dt} + \omega \wedge (P - O_1)$ (basta riferire Σ ad una terna $O_1 (x_1, y_1, z_1)$ rigidamente connessa a Σ), che è uguale alla velocità che avrebbe P se fosse animato da un sistema di rotazioni di risultante ω e di momento risultante $\frac{d O_1}{dt}$ rispetto ad O_1 (Cap. LII, § 5): da ciò discende che un qualunque moto istantaneo di un sistema rigido si può riguardare in infiniti modi come risultante di più rotazioni istantanee. V'ha perfetta corrispondenza fra la teoria dell'equivalenza dei moti istantanei e quella dei vettori; in particolare: Ogni moto istantaneo equivale a 2 rotazioni, di cui una intorno ad un asse scelto ad arbitrio fra quelli di momento non nullo; ogni moto istantaneo equivale ad una rotazione e ad una traslazione istantanea; ogni moto istantaneo può riguardarsi come moto elicoidale istantaneo intorno ad un asse (**asse di moto elicoidale**) le cui equazioni sono $(u_o + q \zeta - r \eta) : p = (v_o + r \xi - p \zeta) : q = (w_o + p \eta - q \xi) : r$ (u_o, v_o, w_o proiezioni di $\frac{d O_1}{dt}$, p, q, r di ω); in questo caso la rotazione è sempre ω e la traslazione lungo l'asse di ω ha la velocità $(p u_o + q v_o + r w_o) : \omega$.

3. — **Moto di un sistema piano nel proprio piano.** *a)* **Luogo fisso e luogo mobile dei centri d'istantanea rotazione.** Un sistema piano Σ sia riferito ad una coppia d'assi $O (x, y)$ fissa e ad una coppia $O_1 (x_1, y_1)$ connessa rigidamente con Σ congruente alla prima. Se a, b sono le coordin. di O_1 rispetto agli assi fissi, φ l'angolo $\widehat{xx_1}$, il moto di Σ è noto se sono

note funzioni del tempo a, b e φ mediante cui si esprimono le coordin. dei punti di Σ (pag. 7) oppure se $a = a(\varphi), b = b(\varphi)$ e $\varphi = \varphi(t)$. La velocità di un punto P di Σ è (5) $\frac{dP}{dt} =$

$$= \frac{dO_1}{dt} + \omega \wedge (P - O_1) [\text{in coordin. cartes. } x' = a' - (y - b)\varphi', \\ y' = b' + (x - a)\varphi' \text{ indicando con l'accento la derivazione rapporto a } t; \varphi' = \text{mod } \omega]. \text{ Se } Q \text{ è un altro punto di } \Sigma, \text{ si deduce } \frac{dP}{dt} - \frac{dQ}{dt} = \omega i(P - Q) \text{ (pag. 399) da cui } P + \frac{1}{\omega} i \frac{dP}{dt} = C$$

con C punto fisso per quell'istante; discende (6) $\frac{dP}{dt} = (C - P) \wedge \omega$,

cioè il moto istantaneo di Σ è una rotazione di velocità angolare ω intorno a C , **centro istantaneo di rotazione**. Note all'istante t le posizioni P e Q di 2 punti sulle loro traiettorie, C è al tempo t l'incontro delle $\perp$ in P e Q alle 2 traiettorie. Una curva σ di Σ inviluppa nel moto una curva σ_1 ; il punto di contatto di σ con σ_1 in un istante è il piede della $\perp$ a σ per il centro C relativo a quell'istante. Al variare di t , il luogo di C sopra il piano connesso a Σ è una curva Γ_1 , **luogo mobile dei centri istantanei di rotazione**; il luogo di C sul piano fisso è una curva Γ , **luogo fisso dei centri istantanei di rotazione**. Le coord. di C rispetto agli assi mobili sono

$$\xi_1 = \frac{da}{d\varphi} \sin \varphi - \frac{db}{d\varphi} \cos \varphi, \eta_1 = \frac{da}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{db}{d\varphi} \sin \varphi, \text{ eliminando } \varphi \text{ fra le quali, si ha l'equaz. } F_1(\xi_1, \eta_1) = 0 \text{ di } \Gamma_1; \text{ le coordin. di } C \text{ rispetto agli assi fissi sono } \xi = a - \frac{db}{d\varphi}, \eta = b + \frac{da}{d\varphi}; \text{ eliminando } \varphi \text{ fra le quali, si ha l'equaz. } F(\xi, \eta) = 0 \text{ di } \Gamma.$$

In ogni istante Γ e Γ_1 hanno in comune il centro di rotazione di quell'istante, C , in cui sono tangenti; nel moto continuo di Σ la Γ_1 rotola senza strisciare sulla Γ . Segnata la Γ sul piano fisso, la Γ_1 sul mobile, si riproduce, cinematicamente,

il moto facendo rotolare la I_1 sulla Γ senza strisciamento (**moto cicloidale generale**) (*).

b) **Centro delle accelerazioni.** Derivando rispetto a t la (5), per l'accelerazione di un punto P di Σ si ha (5')

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{d^2 O_1}{dt^2} - \omega^2 (P - O_1) + \frac{d\omega}{dt} \wedge (P - O_1)$$
 [in coordinate cartes. $x' = a'' - \varphi''(y - b) - \varphi'^2(x - a)$; $y'' = b'' + \varphi''(x - a) - \varphi'^2(y - b)$] o derivando la (6) $\frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{dC}{dt} \wedge \omega - \omega^2 (P - C) + \frac{d\omega}{dt} \wedge (P - C)$.

Posto $v = \text{mod } \frac{dC}{dt}$, $r = \text{mod } (P - C)$, $\varphi = \text{ang } \left(P - C, \frac{dC}{dt} \right)$ le acceleraz. tangenziale e normale (Cap. LV, § 3) sono $j_t = \left(r \frac{d\omega}{dt} - \omega v \cos \varphi \right) \mathbf{T}$, $j_n = (r \omega^2 - v \omega \sin \varphi) \mathbf{N}$. Il luogo dei punti in cui $j_t = 0$ è il cerchio di raggio ωv : $\frac{d\omega}{dt}$ passante per C , col centro sull'asse di $\frac{dC}{dt}$; il luogo dei punti in cui $j_n = 0$ è il cerchio di raggio $v : 2\omega$ passante per C col centro sulla $\perp$ all'asse di $\frac{dC}{dt}$. Questo cerchio è detto **cerchio dei flessi** perchè i suoi punti hanno ivi un flesso per le loro traiettorie; C ha invece un regresso per la propria traiettoria. I 2 cerchi si tagliano ulteriormente in un punto A (detto **centro o polo delle acceleraz.**) di accelerazione nulla. La velocità di C su Γ (**velocità di rotolamento**) è tangente al cerchio dei flessi ed è uguale in grandezza e senso alla velocità nel polo A . Il cerchio dei flessi è tangente a Γ e Γ_1 nel loro punto comune; il cerchio dei flessi e Γ_1 sono dalla stessa banda della tangente comune.

Si deduce $\frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \wedge (P - A) - \omega^2 (P - A)$ cioè l'acce-

(*) In senso ristretto dicesi *moto cicloidale* quello in cui Γ_1 è un cerchio e Γ una retta.

leraz. di P è la risultante di un'acceleraz. diretta da P al polo A di grandezza $\omega^2 \text{ mod } (P - A)$ e di un'acceleraz. $\perp$ alla precedente di grandezza $\frac{d\omega}{dt} \text{ mod. } (P - A)$. Se la velocità angolare ω è costante, l'acceleraz. si riduce alla centripeta $\omega^2 \cdot \text{mod } (P - A)$.

Centri di curvatura delle traiettorie. Se P è un punto di Σ , C il centro istantaneo di rotazione, D la 2^a intersezione del cerchio dei flessi colla retta CP , Q il centro di curvatura della traiettoria di P relativo a P stesso, è $\overline{PQ} : \overline{PC} = \overline{PC} : \overline{PD}$.

Se relativamente a due punti P_1, P_2 sono noti i centri di curvatura Q_1, Q_2 , l'intersezione di $P_1 Q_1$ con $P_2 Q_2$ è C ; si determinano $D_1 D_2$ mediante la proporzione precedente notando che D_i, Q_i stanno dalla stessa parte rispetto a P_i ; il cerchio per C, D_1, D_2 è il cerchio dei flessi.

Formola di Euler-Savary. Si indichi con R il raggio di curvatura di Γ e R' quello di Γ' relativo al loro punto di contatto C (essendo $R' \geq 0$ secondo che Γ e Γ' hanno o no la concavità dalla stessa banda della tangente comune); se P è un punto di Σ e Q è il centro di curvatura della traiettoria di P relativo a P stesso, vale la formola $\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{QC} - \frac{1}{PC} \right) \sin \varphi$, ove φ è l'angolo di CP con la tangente a Γ in C .

Centro di curvatura delle cicloidi. Un cerchio s_1 rotoli su una curva s ; un punto P di s_1 ha per traiettoria una **cicloide a guida** s . Sia C il punto di contatto fra s, s_1 , M_1 il centro di s_1 , M il centro di curvatura di s relativo a C ; la retta PC incontra la congiungente di Q col punto diametralmente opposto di P su s_1 nel centro di curvatura delle cicloide relativo a P .

Sovraccelerazione nel moto piano. Derivando rapporto a t la (5'), per la sovraccelerazione di un punto P di Σ si ha (5'')

$$\frac{d^3 P}{dt^3} = \frac{d^3 O_1}{dt^3} - 3 \omega \frac{d\omega}{dt} (P - O_1) + \left(\frac{d^2 \omega}{dt^2} - \omega^3 \right) i (P - O_1).$$

4. — **Moto di un sistema rigido intorno ad un punto fisso.** Un sistema rigido Σ abbia un punto O fisso e sia riferito ad una terna di assi (x, y, z) fissa e ad un'altra (x_1, y_1, z_1) connessa rigidamente con Σ , entrambe con l'origine in O e destrogire. La velocità di un punto P di Σ è $\omega \wedge (P - O)$, momento rispetto a P del vettore ω con l'origine in O ; quindi il moto istantaneo è una rotazione intorno ad un asse l per O (**asse istantaneo di rotazione**). Note le posizioni MN di 2 punti di Σ sulle loro traiettorie, l'asse l è l'intersezione dei due piani $\perp$ alle traiettorie in M e N . L'asse l ha le equaz. (7) $\xi_1 : p = \eta_1 : q = \xi_1 : r$ rispetto agli assi mobili e le equaz. (8) $\xi : P = \eta : Q = \zeta : R$ ove p, q, r, P, Q, R sono le proiezz. di ω sugli assi mobili e fissi rispettivamente (§ 1).

Il luogo degli assi l nello spazio fisso è un cono Γ di vertice O , il luogo di l nello spazio connesso al sistema mobile Σ è un cono Γ_1 pure di vertice O . Γ dicesi **cono fisso degli assi istantanei di rotazione** e la sua equaz. $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ si ottiene eliminando t fra le (8); Γ_1 dicesi **cono mobile degli assi istantanei di rotazione** e la sua equaz. $F_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0$ si ottiene eliminando t fra le (7). Se si considera una sfera S di centro O taglia in Σ una figura sferica S_1 che si muoverà sempre sulla S ; il moto equivale al moto di S_1 su S ; il moto istantaneo è di rotazione di S_1 su S intorno al punto C di S (**centro o polo di rotazione**) appartenente all'asse istantaneo di rotazione. Il luogo di C su S è una curva γ detta **erpoloide** (equaz. $\omega \xi : h P = \omega \eta : h Q = \omega \zeta : h R$ ove h è il raggio di S) il luogo di C nella sfera connessa a S_1 è una curva γ_1 detta **poloide** (equaz. $\omega \xi_1 = h p = \omega \eta_1 : h q = \omega \zeta_1 : h r$).

Note in un istante le posizioni MN di 2 punti di S_1 sulle traiettorie sferiche, i due cerchi massimi $\perp$ alle traiettorie dette in MN si incontrano in C . Durante il moto il cono Γ_1 rotola senza strisciare su Γ e analogamente γ_1 su γ : di qui una riproduzione cinematica del moto.

Alcuni dicono **erpoloide** e **poloide** il luogo del 2° estremo A del vettore rotazione ω (il 1° essendo in O), nello spazio fisso

e nello spazio connesso con Σ rispettiv.; A è detto **polo** della rotazione. La velocità con cui A si sposta sulla poloide è l'accelerazione angolare (pag. 433). Se si dice *diretto* il moto di Σ rispetto allo spazio circostante e inverso il moto di questo rispetto al corpo, la poloide ed erpoloide del moto diretto sono rispettiv. simmetriche, rispetto ad O , della erpoloide e poloide del moto inverso.

Componenti di ω espresse per gli angoli euleriani. Essendo ϑ, ψ, φ gli angoli euleriani definiti a pag. 71, detti L, K_1, K 3 vettori di modulo 1 nelle direzioni e sensi positivi della linea nodale, asse z_1 e asse z , si ha $\omega = \vartheta' L + \varphi' K_1 + \psi' K$ (l'accento denotando la derivazione rapporto al tempo) da cui (9) $p = \vartheta' \cos \varphi + \psi' \sin \varphi \sin \vartheta$, $q = -\vartheta' \sin \varphi + \psi' \cos \varphi \sin \vartheta$, $r = \varphi' + \psi' \cos \vartheta$; $P = \vartheta' \cos \psi + \varphi' \sin \psi \sin \vartheta$, $Q = \vartheta' \sin \psi - \varphi' \cos \psi \sin \vartheta$, $R = \psi' + \varphi' \cos \vartheta$.

5. — Moto continuo di un sistema rigido. Un sistema rigido Σ sia riferito a 2 terne di assi l'una fissa $O(x, y, z)$ l'altra $O_1(x_1, y_1, z_1)$ connessa con Σ .

La velocità di un punto P essendo $\frac{dO}{dt} + \omega \wedge (P - O_1)$, risultante di una traslazione e di una rotazione istantanea, il moto istantaneo è un moto elicoidale intorno ad un asse l , **asse istantaneo di moto elicoidale** (§ 2); il luogo di l nello spazio fisso è una superficie rigata Γ , il luogo di l nello spazio connesso con Σ è pure una rigata Γ_1 ; in un dato istante Γ, Γ_1 sono tangenti lungo l'asse l relativo a quell'istante. Si riproduce, cinematicamente, il moto facendo muovere la Γ_1 sulla Γ in modo da rotolare e scorrere in ogni istante lungo la generatrice in comune.

Principi fondamentali della statica

1. — **Rappresentazione delle forze.** Dalla sensazione dello sforzo muscolare necessario a imprimere, a variare o ad impedire il moto di un corpo, si giunge, per astrazione, a dire **forza** ogni causa che produce modifichi o distrugga il moto di un corpo e a giustificare la convenzione di rappresentare una forza mediante un **vettore localizzato**, di cui l'origine è il *punto d'applicazione della forza*, la direzione è quella della forza (*linea d'azione della forza*) ed il modulo il numero che misura la forza. Per la determinazione di questo numero valgono le considerazioni seguenti. **Eguale** diconsi 2 forze se applicate nello stesso punto con la stessa direzione e sensi contrari *si fanno equilibrio*, cioè se, applicate ad un corpo in riposo, o in movimento, lo mantengono nello stesso stato di riposo o non modificano il suo movimento (**postulato dell'uguaglianza**). A più forze aventi lo stesso punto d'applicazione ed egual direzione e senso fa equilibrio una forza unica collo stesso punto d'applicazione, stessa direzione e senso opposto; la forza opposta a quest'ultima dicesi **somma** delle prime. 2 forze hanno il **rapporto** $m : n$ (m, n interi) quando la somma di m forze uguali alla 1^a fa equilibrio alla somma di n eguali alla 2^a, applicate che siano queste somme in uno stesso punto d'applicazione nella stessa direzione e in sensi opposti. Mediante i concetti di classi contigue o successioni convergenti (Cap. XVIII) si deduce il concetto di rapporto irrazionale. Dopo ciò, scelta arbitrariamente una forza a cui si fa corrispondere il numero 1 (*unità di misura*), è definito il numero positivo che *misura* la forza.

2. — **In equilibrio** dicesi un sistema materiale rispetto ad un sistema di riferimento quando è immobile rispetto a quest'ultimo. Il sistema potrà essere rigido o no (pag. 417), essere costituito da uno o più corpi liberi o vincolati (aventi cioè punti fissi, assi fissi, punti d'appoggio mutui o con corpi fissi collegamenti con fili flessibili e inestendibili, o con aste rigide di peso trascurabile ecc.).

Oggetto della Statica è lo studio delle condizioni cui devono soddisfare le forze agenti su un dato sistema materiale affinché sia in equilibrio.

Postulati della Statica e prime conseguenze. A quelli enunciati nel § 1 aggiungiamo i postulati: *a)* L'equilibrio di un insieme di corpi (rigidi o no) non si altera introducendo nuovi legami, rendendo fissi alcuni punti, od anche se il sistema non è rigido, supponendolo irrigidito. *b)* L'equilibrio di un sistema di forze non si altera per l'aggiunta di un sistema di forze il quale da solo è capace di mantenere l'insieme dei corpi in equilibrio. *c)* Ad un sistema di forze in equilibrio o no si possono aggiungere o togliere due forze opposte (cioè uguali, della stessa direzione, senso contrario e stesso punto d'applicazione). Si deduce: da un sistema di forze in equilibrio si può sopprimere un sistema di forze, se l'opposto di questo, agendo da solo, è in equilibrio; da un sistema di forze che tiene in equilibrio un corpo *rigido*, si può sopprimere un sistema di forze, il quale agendo da solo lo tiene in equilibrio. Il punto d'applicazione di una forza può trasportarsi in un altro punto della linea d'azione purchè rigidamente connesso col primo.

Equivalenti diconsi 2 sistemi S_1, S_2 di forze, se esiste un 3° sistema S che faccia equilibrio tanto a S_1 quanto a S_2 ; o, ciò che fa lo stesso, se S_1 fa equilibrio al sistema — S_2 formato con tutte le forze opposte di S_2 . *d)* Se un punto (od un asse) di un corpo rigido è fisso, il corpo assoggettato ad una forza è un equilibrio o no a seconda che la linea d'azione della

forza incontra o no il punto (o l'asse) fisso. Segue che un corpo sollecitato da 2 sole forze non aventi la stessa linea d'azione non può essere in equilibrio. *e)* Ad ogni azione corrisponde sempre una reazione eguale e contraria (**principio dell'eguaglianza dell'azione e della reazione**, Cap. LXI, § 1).

f) **Postulato della risultante**: più forze concorrenti in un punto e non in equilibrio possono essere equilibrate da una sola forza. Da *b)* e *d)* si trae che questa forza è concorrente nello stesso punto; la sua contraria dicesi **risultante** delle forze date. *g)* La risultante gode del principio associativo e commutativo. Da ciò la determinazione della risultante di più forze concorrenti si riconduce a quella di 2 forze. Si dimostra che la risultante R di 2 forze concorrenti in un punto è complanare ad esse, ed è contenuta nell'angolo delle direzioni opposte alle 2 forze.

3. — **Parallelogrammo delle forze**. La risultante di 2 forze concorrenti è la risultante dei 2 vettori che rappresentano le due forze. Fra le varie dimostrazioni accenniamo alla seguente.

Di 2 forze $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ concorrenti in O , di uguali misura P , la risultante $\mathbf{R}$, posta sulla bisettrice l dell'angolo $2x$ delle loro linee d'azione, avrà una misura funzione di P e x , più precisamente della forma $P\varphi(x)$. Si deve determinare φ colle condizioni $\varphi(x) = \varphi(-x)$, $\varphi(0) = 2$, $\varphi(\pi : 2) = 0$. Siano $\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}''_1, \mathbf{P}'_2, \mathbf{P}''_2$ quattro forze concorrenti in O della stessa misura P , la prime 2 simmetriche rispetto a $\mathbf{P}_1$, le altre rispetto a $\mathbf{P}_2$ e sia y la misura degli angoli di $\mathbf{P}'_1\mathbf{P}_1$ e di $\mathbf{P}'_1\mathbf{P}_2$; la risultante di $\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}''_1$ posta su $\mathbf{P}_1$ è di misura $P\varphi(y)$, quella di $\mathbf{P}'_2, \mathbf{P}''_2$, posta su $\mathbf{P}_2$ è di misura $P\varphi(y)$; la risultante delle 2 risultanti, posta su l , è di misura $P\varphi(x)\varphi(y)$. Se $\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}''_2$ sono le più esterne, la loro risultante, sulla l , ha la grandezza $P\varphi(x+y)$; quella di $\mathbf{P}''_1, \mathbf{P}'_2$, pure su l , ha la grandezza $P\varphi(x-y)$; la risultante delle 2 risultanti misura $P\varphi(x+y) + P\varphi(x-y)$. Si deduce (per *g)*) l'equaz. funzionale $\varphi(x+y) +$

$+ \varphi(x - y) = \varphi(x) \varphi(y)$ che ammette per soluzione, soddisfacente alle poste condizioni, $\varphi = 2 \cos x$. Il teor. resta così dimostrato per forze di ugual grandezza; viceversa ad una forza $\mathbf{P}$ si possono sostituire 2 forze di grandezza $P: 2 \cos \vartheta$ inclinate di ϑ su $\mathbf{P}$. Il teor. si dimostra per 2 forze $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ fra loro $\perp$, col decomporre ciascuna di esse in 2 forze di ugual grandezza, una sulla diagonale del rettangolo costituito su $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$, l'altra sulla sua simmetrica rispetto a $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$. Infine il teor. si dimostra per 2 forze $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ qualunque, decomponendo ciascuna di esse in 2 forze ortogonali di cui una sulla diagonale del parallelogrammo costruito su $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$. Viceversa ad una forza $\mathbf{R}$ applicata in O si possono sostituire 2 forze applicate in O che hanno per risultante $\mathbf{R}$; in codesta decomposizione si possono dare arbitrariamente le direzioni delle componenti purchè complanari con $\mathbf{R}$, o la grandezza e direzione di una forza.

Si conclude che la forza è un vettore localizzato che segue le leggi della composizione e decomposizione dei vettori localizzati.

4. — **Coordinate del sistema di forze** diconsi le coordin. del sistema di vettori che le rappresentano.

Equivalenza fra sistemi di forze. Col trasportare il punto d'applicazione d'una forza lungo la propria linea d'azione, col decomporre una forza in 2 su opportune direzioni, col comporre forze concorrenti, si può ridurre un sistema di forze agenti su un corpo rigido a 2, e, in casi particolari, ad 1 sola forza. In queste riduzioni non si alterano le coordin. del sistema; ora poichè 2 forze non si equilibrano se non sono opposte, nel qual caso le coordin. del sistema di codeste 2 forze sono nulle, si conclude che un sistema di forze agenti su un corpo rigido è in equilibrio se e solo se ha coordinate nulle. Ne segue che due sistemi di forze sono equivalenti (§ 2) se e solo se hanno le stesse coordinate; cioè se equivalenti sono i 2 sistemi di vettori rappresentativi.

5. — **Riduzioni di un sistema di forze.** Dalla teoria dei vettori (Capitolo LII) risulta che di una forza F_i di intensità F_i agente lungo un asse di coordin. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \lambda_i, \mu_i, \nu_i$, le proiezioni sugli assi sono $X_i = F_i \alpha_i, Y_i = F_i \beta_i, Z_i = F_i \gamma_i$ e i momenti rispetto agli assi $L_i = F_i \lambda_i = F_i(\gamma_i y_i - \beta_i z_i) = Z_i y_i - Y_i z_i, M_i = F_i \mu_i = X_i z_i - Z_i x_i, N_i = F_i \nu_i = Y_i x_i - X_i y_i$. Se F_i appartiene ad un sistema di n forze, la risultante ha le proiezioni sugli assi $X = \sum_{i=1}^n X_i, Y = \sum_{i=1}^n Y_i, Z = \sum_{i=1}^n Z_i$ e il momento risultante le componenti $L = \sum_1^n L_i, M = \sum_1^n M_i, N = \sum_1^n N_i$.

Un sistema di 2 forze eguali in grandezza, di sensi opposti, agenti su rette $\parallel$, dicesi **coppia di forze**; è individuata dal suo asse (Cap. LII, § 5); le coppie si compongono e decompongono, componendo e decomponendo i loro assi. Ad un sistema di forze si può sostituire in infiniti modi una forza ed una coppia; variando l'origine (centro di riduzione) la risultante non varia, varia il momento risultante (pag. 402 linea 9); ma è costante la sua proiezione sulla risultante. Esiste una retta (**asse centrale**) luogo dei centri di riduzione per cui risultante ed asse della coppia sono $\parallel$; in tal caso l'asse della coppia ha il valore minimo; una forza e una coppia siffatta costituiscono una **diname**. Ad una forza R e ad una coppia di asse M si possono sostituire due forze; basta prendere una delle 2 forze della coppia incidente alla R e comporre queste ultime 2. Se la forza R giace nel piano della coppia, si prenda per una delle 2 forze della coppia la opposta di R ; il sistema si riduce all'altra forza della coppia, cioè la R spostata parallelamente a se stessa.

Se l'automomento $XL + YM + ZN$ di un sistema di forze (pag. 403) è nullo senza che siano nulle X, Y, Z , il sistema si riduce ad una forza unica; se $X = Y = Z = 0$ si riduce ad una coppia.

Composizione delle forze parallele. Un sistema di forze F_i parallele, se $\sum F_i = R \neq 0$ (F_i misura in grandezza e segno

di $\mathbf{F}_i$), ammette per risultante una forza $\parallel$ alle date di intensità R . Il punto G per cui, essendo O un qualunque punto, si ha $(G - O) \Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma \mathbf{F}_i (P - O)$ se P_i è il punto d'applicazione di $\mathbf{F}_i$, non varia al variare della direzione comune delle $\mathbf{F}_i$ e per esso passa la linea d'azione della risultante: esso è detto **centro delle forze parallele**. Se le coordinate di P_i sono x_i, y_i, z_i le coordinate di G sono $\xi = (\Sigma F_i x_i) : \Sigma F_i$, $\eta = (\Sigma F_i y_i) : \Sigma F_i$, $\zeta = (\Sigma F_i z_i) : \Sigma F_i$ (vedi Capitolo LXI). Se $R = 0$, il sistema delle forze parallele è riducibile ad una *coppia* che è costituita dalle risultanti dei 2 gruppi di forze di sensi opposti. Se i centri dei 2 gruppi suddetti coincidono il corpo è in equilibrio comunque si ruoti la direzione comune delle forze. In particolare 2 forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \parallel$, non costituenti una coppia, applicate in $P_1 P_2$ hanno una risultante di intensità uguale alla somma o alla differenza delle intensità di $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ a seconda che coincidono o no i sensi, e la cui linea d'azione divide in parti inversamente proporzionali il segmento $P_1 P_2$ internamente od esternamente a seconda che coincidono o no i sensi di $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$.

6. — Condizioni d'equilibrio in alcuni casi fondamentali.

- a) **Corpo rigido libero** è in equilibrio se e solo se forza risultante e coppia risultante sono nulle, cioè se le 6 coordinate del sistema sono nulle; in particolare un punto materiale libero è in equilibrio se la forza risultante è nulla. b) **Corpo con un punto fisso O** : fatta la riduzione rispetto ad O , l'equilibrio sussiste se l'asse della coppia è nullo; cioè se $L = M = N = 0$. c) **Corpo con un asse fisso l** : fatta la riduzione rispetto ad un punto O di l , l'equilibrio sussiste se la componente dell'asse della coppia lungo l è nullo, cioè se il momento risultante delle forze rispetto ad l è nullo. d) **Punto materiale sopra una superficie** è in equilibrio se la risultante delle forze è $\perp$ alla superficie e nel senso di premere su essa. e) **Punto materiale sopra una curva** è in equilibrio se la risultante delle forze giace sul piano $\perp$ alla curva e nel senso da premere contro essa. f) **Corpo C_1 appoggiato in un punto O ad un corpo fisso C_2** :

l'equilibrio sussiste se, fatta la riduzione delle forze rispetto ad O , la forza risultante $\mathbf{R}$ è lungo la normale comune a C_1, C_2 in O e diretta verso C_2 , e se è nullo l'asse della coppia (cioè il momento risultante rispetto ad O). Nei casi $a), e), f)$ si suppongono le superficie e linee perfettamente levigate (Cfr. § 8).

7. — Un metodo generale per la determinazione delle condizioni d'equilibrio. Dalle condizioni d'equilibrio nel caso $b)$ si rileva che l'azione del punto fisso O è uguale a quello di una forza opposta alla risultante delle forze; da quella del caso $f)$ che l'azione del corpo fisso C_2 su C_1 è sostituibile dalla forza $-\mathbf{R} \perp$ a C_1 e diretta verso C_1 . Due corpi C_1, C_2 collegati fra loro mediante un filo flessibile inestendibile $A_1 A_2$, siano in equilibrio: tagliando il filo in A_1 l'equilibrio può essere mantenuto coll'aggiunta di una forza $\mathbf{T}$ applicata in A_1 diretta secondo $A_1 A_2$ la quale rappresenta l'azione di C_2 su C_1 : la $-\mathbf{T}$ si dice la tensione del filo (Cfr. Capitolo LX). La $-\mathbf{T}$ applicata in A_2 rappresenta l'azione di C_1 su C_2 e mantiene in equilibrio C_2 tolto il filo. Analoghe considerazioni se il collegamento è fatto mediante un'asta rigida (di peso trascurabile), salvo il senso di $\mathbf{T}$ che può essere quello di $A_1 A_2$ o l'opposto. Se 2 corpi mobili C_1, C_2 toccantisi in un punto O , sono in equilibrio, C_1 è in equilibrio, tolto C_2 , se in O si aggiunge una forza $\perp$ alle superficie limitanti i corpi, la quale rappresenta la pressione di C_2 su C_1 ; una forza opposta tiene in equilibrio C_2 , tolto C_1 , e rappresenta la pressione di C_1 su C_2 .

Dato, in generale, un sistema di corpi mobili vincolati fra loro o con corpi fissi, mediante punti o assi fissi di collegamento, mediante punti d'appoggio, fili, aste di connessione ecc. si penserà isolato ciascun corpo C col sostituire ai vincoli le forze (incognite) atte a farne le veci, come sopra s'è accennato. Si scrivono allora le equaz. per l'equilibrio del corpo C considerato libero; se altrettanto si fa per tutti i corpi del sistema si avrà un certo numero di equaz. contenenti quantità note, relative al sistema dato e alle forze che gli sono applicate, ed

altre incognite, le forze sostituite ai vincoli. Eliminando le quantità incognite si otterranno relazioni fra le note, le quali, dovendo essere identiche, soddisfatte acciò l'equilibrio sussista, costituiscono le **equaz. dell'equilibrio**. Le rimanenti equaz. servono a determinare le forze incognite, ciò le reazioni dei vincoli; e poichè talune di queste devono agire in un determinato senso, dovranno ancora essere verificate certe disuguaglianze perchè l'equilibrio sussista.

8. — **Attrito**. Enunciando al § 6 le condizioni di equilibrio di corpi a contatto o di un punto sopra una superficie o linea, si suppongono le superficie e linee perfettamente levigate. In natura le superficie a contatto presentando scabrosità e subendo, per le mutue pressioni, piccole deformazioni, danno luogo a fenomeni noti sotto il nome di *fenomeni d'attrito*.

Se un corpo pesante S è appoggiato sopra un piano orizzontale e la superficie del corpo ed il piano sono perfettamente levigati ogni forza orizzontale che si applichi ad S turba l'equilibrio; non così avviene sempre in natura, giacchè l'esperienza mostra che si possono applicare forze sufficientemente piccole perchè l'equilibrio non venga turbato; per altre forze l'equilibrio non sussiste più. La forza orizzontale di grandezza F tale che ogni forza orizzontale $< F$ mantenga l'equilibrio ed ogni forza $> F$ rompa l'equilibrio dicesi **trazione limite**. Quando le superficie a contatto sotto le stesse, la trazione limite è proporzionale al peso del corpo; il coefficiente di proporzionalità $f (< 1)$ si dice **coefficiente d'attrito**. Il coefficiente d'attrito è indipendente dall'estensione delle superfici a contatto, a parità del peso per S . Dicesi **forza d'attrito al distacco** l'opposta della trazione limite.

Un corpo S sia appoggiato in O ad un corpo fisso C ; le forze che sollecitano S siano equivalente ad un'unica forza F applicata in O , $\perp$ a C e diretta verso l'interno di C . Il corpo S è in equilibrio e se le superficie di S e C sono perfettamente levigate, qualunque forza applicata in O e giacente sul piano

tangente in O turba l'equilibrio; in natura, per la scabrosità delle superficie e perchè il contatto avviene secondo un'areola contenente O , si possono applicare in O forze secondo il piano tangente che lasciano sussistere l'equilibrio, altre invece che lo turbano. Esiste una forza di grandezza φ tale che applicando in O forze dirette tangenzialmente $> \varphi$ turbano l'equilibrio, ed applicando forze $< \varphi$ lasciano inalterato l'equilibrio: la forza uguale ed opposta a φ dicesi la **forza d'attrito al distacco**. La φ è proporzionale a F' ($= \text{mod } F$); il coefficiente di proporzionalità $f (< 1)$ è detto il **coefficiente d'attrito**.

Se le forze applicate in S equivalgono ad un'unica forza F applicata in O , siano F_n e F_t le componenti secondo la normale n a C in O ed il piano tangente; perchè l'equilibrio sussista, deve F_n essere diretta verso l'interno di C ed $F_t < f F_n$. Se α è un angolo per cui $\text{tg } \alpha = f$ (essendo $f < 1$, $\alpha < \pi : 4$) ogni volta che F è interno al cono di asse n , vertice O , e apertura, α è $F_t : F_n < \text{tg } \alpha$ onde l'equilibrio sussiste: questo cono è detto **cono d'attrito**, α è l'**angolo d'attrito**.

CAPITOLO LIX.

Il principio dei lavori virtuali

1. — **Spostamento virtuale** di un punto M di un sistema qualunque vincolato o no è uno spostamento che si pensa possibile a darsi ad M per portarlo in una posizione vicinissima M' ; dicesi **invertibile** se è possibile l'opposto, **non invertibile** nel caso contrario. Se M ad es. appartiene ad una superficie S sono invertibili solo gli spostamenti sul piano tangente a S in M ; se M è congiunto ad un punto fisso O con un filo flessibile ma inestendibile, sono invertibili gli spostamenti che

mantengono teso il filo, non invertibili quelli che accorciano la distanza di M da O . Gli spostamenti virtuali invertibili sono conciliabili coi vincoli del sistema; quelli non invertibili, no. Con δM rappresentiamo lo spostamento virtuale, vettore di modulo infinitesimo.

Lavoro virtuale di una forza F applicata in M per lo spostamento virtuale δM è il prodotto scalare $F \times \delta M = F \cdot \delta M \cos(F, \delta M) = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ se X, Y, Z sono proiezioni negli assi di F ; $\delta x, \delta y, \delta z$ quelle di δM . Il lavoro virtuale è positivo negativo o nullo a seconda che l'angolo $(F, \delta M)$ è acuto, retto o ottuso. Il lavoro virtuale della risultante di più forze applicate in M uguale alla somma dei lavori virtuali delle componenti; pensando δM risultante di più spostamenti, il lavoro virtuale di F rispetto a δM è la somma dei lavori di F rispetto agli spostamenti componenti.

Il lavoro virtuale di un sistema di forze F_s applicate nei punti M_s d'un sistema rigido è $X\delta u_o + Y\delta v_o + Z\delta w_o + L\delta p + M\delta q + N\delta r$ ove X, Y, Z, L, M, N sono le coordin. del sistema di forze, $\delta u_o, \delta v_o, \delta w_o$ le componenti della traslazione $\delta p, \delta q, \delta r$ le componenti della rotazione mediante le quali si dà lo spostamento virtuale al sistema rigido. Se il sistema rigido ha un punto O fisso, il lavoro è $L\delta p + M\delta q + N\delta r$, essendo L, M, N le componenti del momento delle forze e $\delta p, \delta q, \delta r$ quelle della rotazione che determina lo spostamento virtuale, su 3 assi ortogonali per O . Se il sistema rigido ha un asse fisso, assunto questo come asse z , il lavoro si esprime con $N\delta r$.

2. — Principio dei lavori virtuali. Condizione necessaria e sufficiente acciò che un sistema materiale qualunque sia in equilibrio è che la somma dei lavori virtuali delle forze applicate al sistema sia nullo per gli spostamenti invertibili, negativa per i non invertibili. Questo principio si verifica immediatamente pel punto libero (dall'essere $F \times \delta M = 0$ con δM arbitrario, discende $F = 0$; viceversa se $F = 0$, il lavoro è nullo); pel punto appoggiato ad una superficie (il punto si può considerare libero se si pensa applicato al punto M la rea-

zione $\mathbf{N}$ della superficie, $\perp$ alla superficie stessa; se v'ha equilibrio $\mathbf{F} = -\mathbf{N}$ onde: *lav.* $(\mathbf{F} + \mathbf{N}) = 0$ e poichè per spostamenti invertibili *lav.* $\mathbf{N} = 0$, è *lav.* $\mathbf{F} = 0$ e poichè per non invertibili *lav.* $\mathbf{N} > 0$, è *lav.* $\mathbf{F} < 0$; viceversa se *lav.* $\mathbf{F} < 0$, la $\mathbf{F}$ è $\perp$ alla superficie e diretta verso l'interno, onde sussiste l'equilibrio); per un sistema rigido libero (se c'è equilibrio le 6 coordin. del sistema delle forze applicate sono nulle, onde il lavoro (§ 1) è nullo; viceversa se questo è zero per l'arbitrarietà di $\delta u_o, \delta v_o, \delta w_o, \delta p, \delta q, \delta r$ deducesi che nulle sono le 6 coordinate dette); per un sistema rigido con un punto od un asse fisso; per un corpo rigido appoggiato ad una parete fissa, per corpi rigidi a contatto (osservato che le reazioni danno luogo a lavoro nullo per spostamenti invertibili, positivo per non invertibili); per due punti congiunti da un filo flessibile ed inestendibile; si dimostra il principio per sistemi costituiti da corpi rigidi con o senza punti od assi fissi, appoggiati fra loro o a pareti fisse sulle quali possono scivolare o rotolare ecc. si *ammette* infine per ogni sistema vincolato, *in cui si prescinda dall'attrito*.

3. — **Sistemi olonomi e anolonomi.** Se un sistema è vincolato, i suoi punti non possono avere spostamenti invertibili arbitrari; avverrà in generale che, dette $\delta x_s, \delta y_s, \delta z_s$ le componenti cartesiane dello spostamento virtuale di $M_s(x_s, y_s, z_s)$, queste soddisfano ad un certo numero di equazioni lineari omogenee (1) $\sum_{s=1}^n (a_{is} \delta x_s + b_{is} \delta y_s + c_{is} \delta z_s) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k < 3n$) (se n sono i punti del sistema), ove in generale saranno a_{is}, b_{is}, c_{is} funzioni delle coordinate degli n punti. Se le equaz. (1) considerate come un sistema di equaz. ai differenziali totali (Capitolo XLIX, § 6) sono integrabili, equivalgono a (ossia i vincoli sono esprimibili da) k equaz. in termini finiti (2) $L_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, L_2 = 0, \dots, L_k = 0$ ed in questo caso il sistema si dice **olonomo**; se non sono integrabili, il sistema si dice **anolonomo** (o non olonomo). Date le (2), le (1) sono le k equaz.

$$(3) \sum_1^n \left(\frac{\partial L_i}{\partial x_s} \delta x_s + \frac{\partial L_i}{\partial y_s} \delta y_s + \frac{\partial L_i}{\partial z_s} \delta z_s \right) = 0 \text{ o, compendiosamente}$$

$\delta L_i = 0$ ($i = 1, 2 \dots k$). Gli spostamenti non invertibili rendono i primi membri delle (1) disuguali da zero; quindi nel caso dei sistemi olonomi $\delta L_i \geq 0$.

4. — **Deduzione dal principio dei lavori virtuali delle equaz. generali dell'equilibrio di un sistema.** a) Il sistema abbia n punti ed i vincoli siano traducibili nelle k equaz. (2) $L_1 = 0$, $L_2 = 0 \dots L_k = 0$ fra le coordinate dei punti.

Le (3) siano le equaz. differenziali a cui soddisfano i $3n$ spostamenti $\delta x_s, \delta y_s, \delta z_s$; da esse si potranno ricavare k spostamenti in funzione dei rimanenti $3n - k$ che saranno del tutto arbitrari: questi si dicono **indipendenti**, i primi k **dipendenti**. Poste queste k espressioni nell'equazione (4) $\sum_1^n (X_s \delta x_s + Y_s \delta y_s + Z_s \delta z_s) = 0$ esprime che il lavoro delle forze applicate $\mathbf{F}_s$ è nullo per spostamenti invertibili, si avrà un'equaz. omogenea lineare nei $3n - k$ spostamenti arbitrari, dalla quale si deduce che debbono essere zero i coefficienti di codesti spostamenti arbitrari. Eguagliando a zero i detti coefficienti, si hanno $3n - k$ equaz. che insieme alle (2) danno le equaz. per l'equilibrio.

Se il sistema è anolonomo si usano le (1) anzichè le (3).

b) **Metodo dei moltiplicatori (di Lagrange).** Si moltiplichino ordinatamente le k equaz. (1) per le indeterminate

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \text{ e si sommino con la (4): si ottiene (5) } \sum_{s=1}^k \left\{ (X_s + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{is}) \delta x_s + (Y_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i b_{is}) \delta y_s + (Z_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i c_{is}) \delta z_s \right\} =$$

$= 0$. Si assoggettino le λ ad annullare i coefficienti dei k spostamenti dipendenti; dopo ciò la (5) diviene omogenea negli spostamenti indipendenti, da cui discende che devono essere nulli i coefficienti dei $3n - k$ spostamenti indipendenti. Si hanno cioè le $3n$ equazioni (6) $X_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{is} = 0$, $Y_s +$

+ $\sum_{i=1}^k \lambda_i b_{is} = 0$, $Z_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i c_{is} = 0$ ($s = 1, 2, 3, \dots, n$), eliminando fra le quali le λ_i si ottengono le equaz. necessarie per l'equilibrio. Dopo ciò, e supposte verificate queste condizioni, le (6) ci determinano le λ_i .

Se il sistema è olonomo, le (1) divengono le (3) e si determinano le $3n$ coordinate x_s, y_s, z_s e le indeterminate λ_i dal sistema delle (3) e delle (6) che divengono (6') $X_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial L_i}{\partial x_s} = 0$, $Y_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial L_i}{\partial y_s} = 0$, $Z_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial L_i}{\partial z_s} = 0$.

Consideriamo ora spostamenti non invertibili: supposte verificate le (6), moltiplichiamole ordinatamente per $\delta x_s, \delta y_s, \delta z_s$ e sommiamo per s da 1 a n ; avremo (7) $\sum_{s=1}^n (X_s \delta x_s + Y_s \delta y_s + Z_s \delta z_s) + \lambda_1 \sum_{s=1}^n (a_{1s} \delta x_s + b_{1s} \delta y_s + c_{1s} \delta z_s) + \lambda_2 \sum_{s=1}^n (a_{2s} \delta x_s + b_{2s} \delta y_s + c_{2s} \delta z_s) + \dots + \lambda_k \sum_{s=1}^n (a_{ks} \delta x_s + b_{ks} \delta y_s + c_{ks} \delta z_s) = 0$.

Consideriamo un sistema di spostamenti che renda (8) $\sum_{s=1}^n (a_{hs} \delta x_s + b_{hs} \delta y_s + c_{hs} \delta z_s) \leq 0$ e tutte le altre somme analoghe nulle. Poichè $\sum_{s=1}^n (X_s \delta x_s + Y_s \delta y_s + Z_s \delta z_s) < 0$ sarà

$\lambda_h \sum_{s=1}^n (a_{hs} \delta x_s + b_{hs} \delta y_s + c_{hs} \delta z_s) > 0$, cioè λ_h deve avere lo stesso segno del 1° membro della (8). Se il sistema è olonomo le (7) si possono scrivere $\sum_{s=1}^n (X_s \delta x_s + Y_s \delta y_s + Z_s \delta z_s) + \lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \dots + \lambda_k \delta L_k = 0$, onde λ_h deve avere lo stesso segno di δL_h . Si sono così determinate le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio.

Determinazione delle reazioni. Se manca il vincolo $L_1 = 0$, ma si suppone su ogni punto (x_s, y_s, z_s) agire una forza di proiezioni $\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_s}, \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_s}, \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_s}$ le equaz. dell'equilibrio sono le stesse, dunque le forze aggiunte tengono luogo del vincolo.

c) **Coordinate lagrangiane del sistema.** Se è dato un sistema olonomo soggetto ai vincoli (2) $L_1 = 0, L_2 = 0 \dots L_k = 0$, possiamo pensare ricavate k coordinate in funzione delle rimanenti $3n - k$ e se queste sono espresse mediante altre $3n - k$ variabili, $q_1, q_2, \dots q_{3n-k}$, tutte le $3n$ coordinate vengono espresse per le $3n - k$ variabili $q_1, q_2, \dots q_{3n-k}$; avremo cioè $x_s = x_s(q_1, q_2, \dots q_{3n-k}), y_s = y_s(q_1, q_2, \dots q_{3n-k}), z_s = z_s(q_1, q_2, \dots q_{3n-k})$ ($s = 1, 2, \dots n$) le quali equaz. soddisfano identicamente le (2).

Quando le $3n$ coordinate cartesiane sono espresse mediante $3n - k$ variabili $q_1, q_2, \dots q_{3n-k}$ in guisa che le (2) siano soddisfatte, ad ogni sistema di valori per le q corrisponde una configurazione possibile del sistema: le $3n - k$ variabili q si dicono le **coordinate (lagrangiane) del sistema** ed il numero $3n - k$ **grado di libertà** del sistema. La (4), fatte le sostituzioni, prenderà la forma $Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_{3n-k} \delta q_{3n-k} = 0$ e per essere $\delta q_1, \delta q_2, \dots \delta q_{3n-k}$ arbitrari, saranno $Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots Q_{3n-k} = 0$ le equazioni necessarie per l'equilibrio.

$$\text{È } Q_h = \sum_{s=1}^n \left(X_s \frac{\partial y_s}{\partial q_h} + Y_s \frac{\partial y_s}{\partial q_h} + Z_s \frac{\partial z_s}{\partial q_h} \right).$$

d) **Caso che le forze dipendono da un potenziale.** Se il lavoro virtuale delle forze $\sum_{i=1}^{3n-k} Q_i \delta q_i$ è il differenziale della funzione $U(q_1, q_2, \dots q_{3n-k})$ si dice che le forze derivano da un potenziale o sono conservative e la U dicesi il **potenziale** delle forze (Cap. LXIV). In questo caso le equaz. per l'equil. sono $\frac{\partial U_1}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \dots \frac{\partial U}{\partial q_{3n-k}} = 0$. Ai valori delle coordinate lagrangiane che corrispondono ai massimi e ai minimi della U (Cap. XLIII, § 2) corrispondono configurazioni d'equilibrio del sistema.

Per la stabilità o no dell'equilibrio vedi Cap. LXIV, § 5.

Equilibrio dei sistemi articolati e dei fili

A. — Sistemi articolati.

1. — **Sistema articolato** dicesi un sistema di aste rigide, assimilabili a segmenti rettilinei, collegate fra loro mediante cerniere, assimilabili a punti materiali, detti **nodi**. Quando la configurazione si riduce ad un poligono semplice aperto, il sistema articolato dicesi **semplicemente connesso**. Siano $P_1, P_2, \dots, P_n$ i nodi; con $P_2 - P_1, P_3 - P_2, \dots, P_n - P_{n-1}$, si rappresentino le $n - 1$ aste, $F_1, F_2, \dots, F_n$ le forze direttamente applicate in $P_1, P_2, \dots, P_n$. Si dicono **sforzi** corrispondenti all'asta $P_{i+1} - P_i$ le reazioni $f_{i,i+1}, f_{i+1,i}$ applicate in P_i, P_{i+1} provenienti dal suo collegamento coi nodi, reazioni uguali e contrarie alle azioni che i nodi sopportano dalle aste che ivi concorrono, all'infuori di $P_{i+1} - P_i$. Gli sforzi $f_{i,i+1}, f_{i+1,i}$ hanno la linea d'azione di $P_{i+1} - P_i$, sono uguali ed opposti; diconsi **pressioni** o **tensioni** a seconda che sono diretti verso l'interno o l'esterno dell'asta. Per l'equilibrio si hanno le $n - 2$ equazioni dette **indefinite** (1) $F_i + f_{i-1,i} = f_{i,i+1}$ ($i = 2, 3, \dots, n - 1$) e le 2 equaz. ai limiti $F_1 = f_{1,2}, F_n = f_{n,n-1}$. Discende $F_1 + F_2 + \dots + F_n = 0$.

La configurazione di equilibrio dicesi **poligono funicolare**.

2. — **Poligono delle forze di Varignon**. A partire da un punto arbitrario Q_1 si tracci una spezzata poligonale i cui lati $Q_2 - Q_1, Q_3 - Q_2, \dots, Q_n - Q_{n-1}$ siano uguali a $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$; sarà allora $Q_1 - Q_n = F_n$. I lati $Q_2 - Q_1, Q_3 - Q_2, Q_n - Q_1, \dots, Q_n - Q_1$ sono || ordinatamente a $P_2 - P_1, P_3 - P_2, P_4 - P_3, \dots$

... $P_n - P_{n-1}$ e rappresentano gli sforzi $f_{1,2}, f_{2,3}, f_{3,4}, \dots, f_{n-1,n}$. Reciprocamente se ad un poligono $P_1 P_2 \dots P_n$ si può far corrispondere un poligono delle forze $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ per modo che sia $P_2 - P_1 \parallel Q_2 - Q_1, P_3 - P_2 \parallel Q_3 - Q_2, \dots, P_n - P_{n-1} \parallel Q_n - Q_{n-1}$, è $P_1 P_2 \dots P_n$ poligono funicolare per il sistema articolato che si considera.

Se P_1 è fisso e $F_2, F_3, \dots, F_n$ sono note, si costruisce il poligono delle forze costruendo a partire da Q_2 il poligono $Q_2 Q_3 \dots Q_{n-1} Q_n Q_1$ in guisa che $Q_3 - Q_2 = F_2, Q_4 - Q_3 = F_3, \dots, Q_n - Q_{n-1} = F_{n-1}, Q_n - Q_1 = F_n$; il lato $Q_2 - Q_1$ è uguale alla forza incognita F_1 (reazione dovuta all'attacco) che si esercita in P_1 ad equilibrio stabilito. Il poligono funicolare si ottiene orientando la prima asta come $Q_2 - Q_1$; la seconda come $Q_3 - Q_2$ ecc.

Caso delle forze parallele. Se nei nodi intermedi $P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ sono applicate forze parallele $F_2, F_3, \dots, F_{n-1}$, il poligono funicolare è contenuto nel piano per $P_1 P_n$ e $\parallel$ alla direzione comune delle forze. Siano le F_i dei pesi p_i , si tratta di determinare il poligono funicolare, assegnate le coordinate $(x_1, y_1), (x_n, y_n)$ di P_1, P_n . Noti i pesi p_i e le lunghezze l_i delle aste $P_i P_{i+1}$, incognite sono le inclinazioni α_i delle aste sull'asse Ox orizzontale. Gli sforzi $f_{1,2}, f_{2,3}, \dots, f_{n-1,n}$ hanno componente orizzontale costante: assumiamola come incognita ausiliaria φ ; le componenti verticali degli sforzi sono $\varphi \operatorname{tg} \alpha_1, \varphi \operatorname{tg} \alpha_2, \dots, \varphi \operatorname{tg} \alpha_{n-1}$. Allora le (1) proiettate sull'asse y danno $p_i + \varphi \operatorname{tg} \alpha_{i-1} = \varphi \operatorname{tg} \alpha_i$ ($i = 2, 3, \dots, n-1$): queste e le $x_n = x_1 + \sum_{i=1}^n l_i \cos \alpha_i, y_n = y_1 + \sum_{i=1}^n l_i \sin \alpha_i$ (ottenute proiettando il poligono sugli assi) servono a determinare $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \varphi$.

3. — **Fili soggetti ad un numero finito di forze.** Un tratto $A_1 A_2$ di filo flessibile ed inestendibile è in equilibrio quando agli estremi agiscono due forze F_1, F_2 opposte in senso ma di intensità uguali e dirette verso l'esterno; il tratto di filo si dispone secondo un segmento rettilineo nella direzione di F_1, F_2 .

Tagliato in P il filo, la parte $A_1 P$ è in equilibrio se in P si applica una forza τ uguale e contraria a $\mathbf{F}_1$; τ è la **tensione**, uguale in tutti i punti del filo. In un tratto di filo siano applicate negli estremi P_1, P_n e in $n - 2$ punti intermedi $P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$, n forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$; questo tratto di filo $P_1 P_n$ si comporta, quanto all'equilibrio come un sistema articolato di aste rigide, osservando che gli sforzi sono unicamente **tensioni**.

B. — Fili assoggettati ad una distribuzione continua di forze.

4. — **Equazioni di equilibrio di un filo flessibile ed inestendibile.** Sopra ogni elemento ds di un filo flessibile ed inestendibile agisca una forza $\mathbf{F}ds$, dell'ordine di grandezza di ds ; $\mathbf{F}$ dicesi **forza unitaria**. Gli estremi M_0, M_1 del filo possono essere liberi o fissi od obbligati a rimanere sopra superficie o linee date: in ogni modo si possono supporre liberi e soggetti a due forze $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1$. **Curva funicolare** dicesi la configurazione d'equilibrio del filo.

Il lavoro virtuale delle forze per uno spostamento virtuale del filo è (2) $\int_0^l \mathbf{F}_0 \times \delta M_0 ds + \mathbf{F}_0 \times \delta M_0 + \mathbf{F}_1 \times \delta M_1$, ove l è la lunghezza totale del filo, M un punto di ds ; l'arco s contato positivamente da M_0 a M_1 . Per spostamenti invertibili sarà $\delta(ds) = 0$, per non invertibili $\delta(ds) < 0$. Essendo $ds = \text{mod } dP$ le condizioni precedenti si trasformano in $\frac{dM}{ds} \times \frac{d\delta M}{ds} \leq 0$ od anche $\mathbf{T} \times \frac{d\delta M}{ds} \leq 0$ se $\mathbf{T}$ è un vettore unitario nella direzione della tangente e senso di s crescente.

Considerando spostamenti invertibili, per ogni elemento ds è $\mathbf{T} \times \frac{d\delta M}{ds} = 0$, onde moltiplicando queste infinite equazioni per $-\lambda ds$ (metodo dei moltiplicatori di Lagrange, Cap. LIX, § 4, b) e integrando rispetto a s da 0 ad l , si ha $-\int_0^l \lambda \mathbf{T} \times \frac{d\delta M}{ds} ds = 0$

od anche per la formula d'integrazione per parti (Cap. LIII,

$$\S 1) [\lambda \mathbf{T} \times \delta M]_i^2 + \int_0^l \frac{d(\lambda \mathbf{T})}{ds} \times \delta M ds = 0.$$

Chiamiamo τ il vettore $\lambda \mathbf{T}$ (di modulo λ), τ_o e τ_1 i vettori τ per $s=0$, $s=l$; sommando con la (1) ed eguagliando a zero i coefficienti degli spostamenti, si ha $\mathbf{F}_o + \tau_o = 0$, $\mathbf{F}_1 - \tau_1 = 0$ (equazioni agli estremi) e (3) $\mathbf{F} + \frac{d\tau}{ds} = 0$ (equazione indefinita, che dev'essere verificata per tutti i punti del filo).

Per gli spostamenti non invertibili bisogna che τ sia diretto nel senso di s crescente (Cap. LIX, § 4, b). Il vettore τ è la **tensione** cioè la forza capace di mantenere in ciascun punto M l'equilibrio, tolta la parte di filo dopo M).

Equazioni intrinseche dell'equilibrio. Dicansi F_t , F_n , F_b le proiezioni di $\mathbf{F}$ sulla tangente, normale, principale e binormale alla curva funicolare, $\mathbf{N}$ un vettore unitario secondo la normale principale, ϱ il raggio di curvatura di flessione l'equazione indefinita diviene $\left(F_t + \frac{d\tau}{ds}\right) \mathbf{T} + \left(F_n + \frac{\tau}{\varrho}\right) \mathbf{N} = 0$ che si scinde nelle $F_t + \frac{d\tau}{ds} = 0$, $F_n + \frac{\tau}{\varrho} = 0$, $F_b = 0$.

Equazioni cartesiane: agli estremi: $X_o + \tau_o \left(\frac{dx}{ds}\right)_{s=0} = 0$,
 $Y_o + \tau_o \left(\frac{dy}{ds}\right)_o = 0$, $Z_o + \tau_o \left(\frac{dz}{ds}\right)_o = 0$, $X_1 + \tau_1 \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 = 0$,
 $Y_1 + \tau_1 \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 = 0$, $Z_1 + \tau_1 \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 = 0$; l'indefinita si scinde in
(4) $X + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dx}{ds}\right) = 0$, $Y + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dy}{ds}\right) = 0$, $Z + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dz}{ds}\right) = 0$
(essendo τ , τ_o , τ_1 i moduli di τ , τ_o , τ_1 ; X , Y , Z le proiezioni di $\mathbf{F}$; X_o , Y_o , Z_o ; X_1 , Y_1 , Z_1 , quelle di $\mathbf{F}_o$, $\mathbf{F}_1$) a cui si deve aggiungere la $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$. L'integrale generale di queste 4 equaz. dà x , y , z , τ in funzione di s e di 6

costanti, le quali si determinano imponendo che queste 4 funzioni soddisfino alle 6 equaz. agli estremi. Per l'esistenza della curva d'equilibrio è necessario che x, y, z, τ risultino reali e l'ultima positiva per s variabili in $0 \rightarrow l$.

5. — **Casi particolari.** Quando $\mathbf{F}$ ha direzione costante, la curva d'equilibrio è piana in un piano $\parallel$ ad $\mathbf{F}$: preso l'asse $z \parallel$ ad $\mathbf{F}$ e per piano $y = 0$ il piano della curva, le equaz. si riducono a $\tau \frac{dx}{ds} = c$ (esprimente che la tensione ha costante la componente normale alla direzione della forza), $Z + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dz}{ds} \right) = 0$.

Se $\mathbf{F}$ oltre ad avere direzione costante (quella dell'asse z) non dipende da s , posto $p = \frac{dz}{dx}$ si ricava $\tau = c \sqrt{1+p^2}$ e $Z + \frac{c}{\sqrt{1+p^2}} \frac{dp}{dx} = 0$, equaz. differenziale del 2° ordine, il cui integrale generale dà la curva d'equilibrio. Se Z è funzione solo di x , posto $p = \sinh u$ (Cap. XLIV, § 5, c) si ha $Z dx + c du = 0$ da cui $c u = \{ c_1 - \int Z dx \}$. Chiamato $f(x)$ il secondo membro, si ha $p = \sinh f(x)$ onde $z + c_2 = \int \sinh f(x) dx$.

Catenaria omogenea è la configurazione d'equilibrio di un filo pesante omogeneo: nella 2ª delle equaz. (4) è $Z = G$ se $G ds$ è il peso dell'elemento ds . La catenaria omogenea ha l'equaz. $z - z_0 = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}} \right)$ avendo posto $a = c/G$ (c = proiezione orizzontale della tensione); le costanti a, x_0, z_0 (x_0, z_0 coordinate del punto più basso) si determinano date le coordinate degli estremi e la lunghezza del filo.

Curva dei punti sospesi dicesi la configurazione d'equilibrio d'un filo il peso di un cui elemento è proporzionale alla proiezione orizzontale dell'elemento; se z ha la direzione della gravità, $Z ds = G ds$ e la curva d'equilibrio è la parabola $z - z_0 = G(x - x_0)^2 : 2c_1$ (ove c_1 è la tensione costante orizzontale, x_0, z_0 le coordinate del punto più basso).

6. — **Integrali primi dell'equaz. (3).** Se $\mathbf{F}$ è funzione solo di s la (3) dà $\tau + \int_0^l \mathbf{F} ds = c$ e dalle (3) si ricavano 3 equaz. del tipo $\frac{dx}{ds} = \varphi_1(s)$, $\frac{dy}{ds} = \varphi_2(s)$, $\frac{dz}{ds} = \varphi_3(s)$. Se esiste una funzione $V(x, y, z)$ tale che sia $X = \frac{\partial V}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial V}{\partial z}$, sarà $F_t = \mathbf{F} \times \mathbf{T} = \frac{dV}{ds}$ ed allora $\frac{dV}{ds} + \frac{d\tau}{ds} = 0$ da cui $\tau + V = h$. Se $\mathbf{F}$ incontra una retta fissa, ad es. l'asse x , il momento rispetto all'asse x di $\mathbf{F}$ è nullo quindi è nullo il momento rispetto ad x di $\frac{d\tau}{ds}$ ossia $\tau \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) = c$ (costante).

Se $\mathbf{F}$ è una forza centrale (pag. 466), presa l'origine delle coordinate nel punto di concorrenza delle linee d'azione delle forze è nullo il momento di $\frac{d\tau}{ds}$ rispetto all'origine, da cui i 3 integrali $\tau \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) = c_1$, $\tau \left(z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds} \right) = c_2$, $\tau \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) = c_3$, dai quali si deduce $c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$, cioè la curva d'equilibrio è in un piano per l'origine.

7. — **Equilibrio di un filo appoggiato sopra una superficie.** Si riconduce al caso del filo libero pensando ogni elemento ds soggetto ad una forza normale alla superficie $f(x, y, z) = 0$, $\mathbf{N} ds$. Le equaz. agli estremi sono le già trovate, l'equaz. indefinita è $\mathbf{F} + \mathbf{N} + \frac{d\tau}{ds} = 0$ e cartes. $X + N \cos(\nu x) + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dx}{ds} \right) = 0$ e due analoghe, ove $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ sono i coseni direttori della normale a $f(x, y, z) = 0$ volta internamente (Cap. XLVII, § 1). A queste 3 equaz. si debbono aggiungere le due $\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1$, $f(x, y, z) = 0$.

L'integrale generale offre x, y, z, τ, N in funzione di s e 4 costanti c_1, c_2, c_3, c_4 : è necessario siano x, y, z reali e τ, N positive per s variabile in $0 \leq l$.

Le equaz. intrinseche sono $F_t + N_t + \frac{d\tau}{ds} = 0, F_n + N_n + \frac{\tau}{\rho} = 0, N_b + F_b = 0$, ove N_t, N_n, N_b sono le proiezioni di N sulla tangente, normale principale e binormale alla curva d'equilibrio.

Se F ha in ogni punto la direzione della normale alla superficie la configurazione di equilibrio è una geodetica della $f(x, y, z) = 0$ (Cap. XLVII, § 10, b); la τ è costante. Un filo appoggiato ad una superficie, non sollecitato da forze, salvo due forze uguali applicate agli estremi di intensità F , si dispone secondo una geodetica ed in ogni punto esercita la pressione $F: \rho$. Se F ha proiezioni uguali a $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ si ha $\tau + V = h$ (Cfr. § 6).

8. — **Modo di riconoscere se una data curva è d'equilibrio, data la distribuzione delle forze.** Servono le equaz. intrinseche: per la 3^a si deve verificare se la forza giace sul piano osculatore; se questa è verificata, dalla 2^a si trae τ e se sostituendo il valore di τ nella 1^a questa è identicam. soddisfatta, la data curva è configurazione d'equilibrio. Infine τ per $s = 0$ e per $s = l$ deve avere i valori τ_0 e τ_l che si deducono dalle equaz. agli estremi.

Per risolvere la stessa quistione se il filo è sopra una data superficie, si ricorre pure alle equaz. intrinseche: l'ultima deve essere soddisfatta identicamente, dalla 1^a e 2^a si deducono τ ed N che devono risultare > 0 ; poi devono essere verificate le condizioni agli estremi come nel caso del filo libero. Verificate queste condizioni la curva è l'equilibrio, altrimenti no.

La dinamica del punto materiale libero

1. — Le tre leggi fondamentali del moto (o di Newton).

1ª legge (o di **inerzia**): « Ogni corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto uniforme e rettilineo finchè non interviene una forza esterna ». Per corpo qui si intende una porzione sufficientemente piccola di materia da essere individuata in posizione mediante la posizione di un suo punto: dicesi **punto materiale**. La terna di assi di riferimento è connesso con le stelle fisse; la misura del tempo si fa riguardando come uniforme la rotazione della terra intorno al proprio asse.

2ª legge: « Il cambiamento di moto (**accelerazione**) è proporzionale alla forza applicata ed avviene secondo la retta nella quale agisce la forza ». L'accelerazione prodotta da una forza costante F che agisce su un punto materiale è indipendente dalla velocità iniziale del punto; è ancora indipendente dalle accelerazioni prodotte da altre forze agenti sul punto materiale.

Se F è la forza che agisce sul punto P , la 2ª legge si esprime con $F = c j$ ove c è un coefficiente di proporzionalità, j l'accelerazione di P .

Massa. Constatandosi che diversi punti materiali soggetti alla stessa forza F possono assumere accelerazioni diverse, si conviene di dire che 2 punti materiali hanno **masse** uguali, quando, soggetti alle stesse forze, assumono accelerazioni uguali; un punto materiale ha massa doppia, tripla, $\cdot n$ -pla di un altro quando occorre assoggettare il 1º ad una forza doppia, tripla,

...n-pla di $\mathbf{F}$ perchè assuma la accelerazione che ha il 2° assoggettato alla forza $\mathbf{F}$. Indicando con m la massa del punto P , sarà $c = \lambda m$, $\mathbf{F} = \lambda m \mathbf{j}$, con λ coefficiente uguale per tutti i punti materiali. Col prendere opportunamente le unità di misura per la forza, massa ed accelerazione, si può sempre avere $\lambda = 1$; onde la 2ª legge viene ad esprimersi con $\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{P}}{dt^2}$.

Scelta l'unità di forza e l'unità di accelerazione, l'unità di massa è la massa di un corpo che acquista l'accelerazione 1 sotto l'azione di una forza 1; oppure, scelta l'unità di accelerazione e l'unità di massa, l'unità di forza è quella forza che fa acquistare l'accelerazione 1 alla massa 1.

Pei diversi sistemi di unità, vedi § 5.

3ª legge: « Ad ogni azione corrisponde sempre una reazione uguale e contraria; ossia, le azioni mutue di 2 corpi qualunque sono sempre uguali e dirette in senso contrario ».

2. — **Equaz. del moto di un punto materiale libero.** La forza $\mathbf{F}$ sollecitante il punto P dipende, nel caso più generale, dalla posizione di P , dalla sua velocità, dal tempo: nota $\mathbf{F}$, la

(1) $\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{P}}{dt^2}$ (2ª legge di Newton) è l'equaz. differenziale del moto di P : cartesianam. si scinde nelle 3 (indicando con gli accenti le derivate rapporto al tempo) (1') $X = m x''$, $Y = m y''$, $Z = m z''$ ove X, Y, Z , componenti di $\mathbf{F}$, saranno 3 note funzioni di x, y, z, x', y', z', t e costituiscono un sistema di 3 equazioni differenziali del 2° ordine, il cui integrale generale darà $x = x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$, $y = y(t, c_1, \dots, c_6)$, $z = z(t, c_1, \dots, c_6)$, cioè le coordinate di P in funzione del tempo e di 6 costanti arbitrarie. Queste si determinano conoscendo posizione e velocità di P al tempo t_0 , cioè i valori di x, y, z, x', y', z' per $t = t_0$ (condizioni iniziali). La (1) proiettata sulla tangente, normale principale e binormale alla traiettoria, dà luogo alle 3 equaz.

intrinseche (2) $F_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}$, $F_n = \frac{v^2}{\rho}$, $F_b = 0$ (Cap. LV, § 3).

3. — **Quantità di moto** di un punto P di massa m al tempo t , dicesi il vettore $m\mathbf{v}$, se $\mathbf{v}$ è la velocità di P al tempo t .

Impulso elementare di una forza $\mathbf{F}$ variabile col tempo è il vettore $\mathbf{F}dt$; **impulso** della $\mathbf{F}$ nell'intervallo di tempo $t_0 \rightarrow t$ è il vettore $\int_{t_0}^t \mathbf{F}dt$ (proiezioni sugli assi $\int_{t_0}^t X dt$, ecc.), il calcolo del quale esige la conoscenza della legge di variazione di $\mathbf{F}$ e quella del moto (salvo il caso che $\mathbf{F}$ sia costante o

funzione solo di t). Poichè $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, sarà (3) $\int_{t_0}^t \mathbf{F}dt = m\mathbf{v} -$

$- m\mathbf{v}_0$ ($\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}$ velocità agli istanti t_0, t) cioè l'impulso è la differenza delle quantità di moto agli estremi dell'intervallo di

tempo. Indicando con $\mathbf{I}$ l'impulso, cioè $\int_{t_0}^t \mathbf{F}dt$, è $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{I}}{dt}$.

Se $\mathbf{F}$ è costante si ha la relazione scalare $F(t - t_0) = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0$; supposto il punto in riposo al tempo t_0 , si ha $F(t - t_0) = m\mathbf{v}$ e per $t - t_0 = 1$, $F = m\mathbf{v}$, cioè la misura di una forza costante è quella della quantità di moto nella prima unità di tempo.

Forza istantanea. Nella (3) supponiamo l'intervallo di tempo $t_1 - t_0$ molto piccolo, ma l'intensità di $\mathbf{F}$ grandissima, in guisa che l'integrale sia finito; l'accrescimento di velocità della massa m sarà finito (non infinitesimo); una forza siffatta dicesi **forza istantanea**, o **forza di percossa** e si misura mediante l'accrescimento della quantità di moto, ossia mediante l'impulso. Osservando che la grandezza della velocità si mantiene finita,

da $\frac{ds}{dt} < \alpha$ si deduce $|s - s_0| < \alpha(t_1 - t_0)$, cioè lo spostamento subito dalla massa è dell'ordine di grandezza di $t_1 - t_0$.

Forza viva o energia cinetica di un punto P dicesi il semiprodotto della massa di P pel quadrato della sua velocità, cioè $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$, che si rappresenta, di solito, con T .

4. — **Lavoro di una forza.** Se un punto P soggetto ad una forza $\mathbf{F}$ costante subisce in un intervallo di tempo uno spostamento rettilineo $P_1 - P_0$ dicesi **lavoro** della forza $\mathbf{F}$ relativo allo spostamento $P_1 - P_0$ il prodotto scalare $\mathbf{F} \times (P_1 - P_0)$. Esso è positivo, nullo o negativo a seconda che l'angolo $(\mathbf{F}, P_1 - P_0)$

è acuto, retto od ottuso; nel primo caso dicesi lavoro motore, nell'ultimo lavoro resistente. Se lo spostamento di P da P_o a P_1 avviene lungo una curva l , si immagini spezzato l'arco $P_o P_1$ in tratticelli infinitesimi; lavoro di $\mathbf{F}$ relativo ad uno di questi spostamenti infinitesimi è $\mathbf{F} \times dP$ (pag. 449 linea 7) onde il lavoro relativo all'intero spostamento è $\int_{P_o}^{P_1} \mathbf{F} \times dP = \mathbf{F} \times (P_1 - P_o)$ cioè lo stesso che per lo spostamento rettilineo $P_1 - P_o$.

Se $\mathbf{F}$ è variabile col tempo e nell'intervallo $t \mapsto t + dt$ il punto P ha subito lo spostamento dP , lavoro di $\mathbf{F}$ relativo a questo spostamento, detto **lavoro elementare** è il prodotto scalare $\mathbf{F} \times dP = Xdx + Ydy + Zdz$, se X, Y, Z sono le proiezioni sugli assi di $\mathbf{F}$; dx, dy, dz quelle di dP . Se nell'intervallo finito di tempo $t_o \mapsto t_1$ il punto P è passato da P_o a P_1 lungo la curva l , dicesi **lavoro** di $\mathbf{F}$ relativo allo spostamento $P_o P_1$ la somma dei lavori elementari corrispondenti agli spostamenti infinitesimi di cui si compone l , cioè (4) $\int_{P_o}^{P_1} \mathbf{F} \times dP = \int_{(l)} (Xdx + Ydy + Zdz)$. Per la valutazione di questo integrale, nel caso generale che $\mathbf{F}$ dipenda dal tempo, posizione e velocità di P , occorre la conoscenza delle equaz. del moto in termini finiti, mediante le quali l'integrale (4) diventa della forma $\int_{t_o}^{t_1} \Phi(t) dt$. Se la $\mathbf{F}$ è una forza posizionale, cioè dipende solo dalla posizione di P , basta la conoscenza della traiettoria di P , giacchè mediante le sue equaz. parametriche $x = x(q)$, $y = y(q)$, $z = z(q)$, l'integrale (4) diventa della forma $\int_{q_o}^{q_1} \Phi(q) dq$ (q_o, q_1 valori del parametro corrispondenti a $P_o P_1$).

Relazione fra forza viva e lavoro. Se nelle equazioni (1) moltiplichiamo scalarmente a sinistra per $\frac{dP}{dt} dt$ e a destra per dP , abbiamo $m \frac{d^2 P}{dt^2} \times \frac{dP}{dt} dt = \mathbf{F} \times dP$, ossia $d \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dP}{dt} \right)^2 \right] = \mathbf{F} \times dP$, ed anche rappresentando con dL il lavoro elementare, $dT = dL$ cioè il differenziale della forza viva è = al lavoro elementare; in un intervallo finito di tempo $t_o \mapsto t_1$,

nel quale si passa da P_o a P_1 , si ha $mv_1^2 - mv_o^2 = \int_{P_o}^{P_1} \mathbf{F} \times dP$, cioè il lavoro di $\mathbf{F}$ è = alla variazione di forza viva.

Lavoro di una forza dipendente da un potenziale. Se il lavoro elementare di $\mathbf{F}$ è il differenziale di una funzione U (pag. 232 linea 1) l'integrale (4) cioè il lavoro L_{P_1, P_o} della forza $\mathbf{F}$ nel passaggio da P_o a P_1 si calcola facendo la differenza $U_1 - U_o$ dei valori U_1, U_o che la U ha in P_1 e P_o ; e solo quando il lavoro elementare è il differenziale di una funzione $U(x, y, z)$ il lavoro nel passaggio da P_o ad una qualunque altra posizione P_1 dipende solo dalle posizioni estreme. Quando ciò accade dicesi U la **funzione potenziale** o anche solo il **potenziale** della forza $\mathbf{F}$, la quale dicesi dipendere da un potenziale. Se

$U(x, y, z)$ è il potenziale, è $\frac{\partial U}{\partial x} = X, \frac{\partial U}{\partial y} = Y, \frac{\partial U}{\partial z} = Z$ onde

$$\text{mod } \mathbf{F} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Si ha poi $dT = dU$ e nel passaggio da P_o a P_1 , integrando $T_1 - T_o = U_1 - U_o$.

Esempi di forze dipendenti da un potenziale. a) Un grave cadendo nel vuoto acquista una accelerazione costante g (accelerazione di gravità), onde il peso di una massa m è una forza costante mg ; prendendo l'asse z diretto secondo la forza di gravità, il lavoro elementare di questa è $mg dz$, onde il potenziale è mgz (ove z rappresenta la distanza della massa m da un qualsiasi piano orizzontale contata verso il basso). b) La $\mathbf{F}$ è sempre $\perp$ ad un piano fisso e la sua intensità è funzione della distanza dal punto d'applicazione dal piano. Preso per asse z la normale al piano, sarà $X=0, Y=0, Z=\varphi(z)$ ed il lavoro elementare $\varphi(z) dz$ onde $U = \int \varphi(z) dz$ il potenziale. c) La forza $\mathbf{F}$ sia sempre normale ad un asse e la sua intensità sia funzione $\varphi(r)$ della distanza r del punto d'applicazione dall'asse; sia z l'asse, il lavoro elementare della forza è $\pm \varphi(r) \frac{x}{r} dx \pm \varphi(r) \frac{y}{r} dy = \pm \varphi(r) dr$ (il segno $-$ o $+$ a

seconda che $\mathbf{F}$ diretta o no verso l'asse); onde $\pm \int \varphi(r) dr$ è il potenziale. *d*) La forza $\mathbf{F}$ abbia la linea d'azione passante per un punto fisso O (**forza centrale**) e l'intensità sia una funzione $\varphi(r)$ della distanza r del punto d'applicazione da O , il lavoro elementare è $\pm \left[\varphi(r) \frac{x}{r} dx + \varphi(r) \frac{y}{r} dy + \varphi(r) \frac{z}{r} dz \right] = \pm \varphi(r) dr$ (il segno $-$ o $+$ a seconda che $\mathbf{F}$ è diretta o no verso O); onde $\pm \int \varphi(r) dr$ è il potenziale. *e*) Una forza nel piano xy sia tale che $X = y$, $Y = x$, se x e y sono le coordinate del punto d'applicazione; essa dipende dal potenziale $U = xy$. *f*) Se $\mathbf{F}$ è risultante di più forze $\mathbf{F}_i$ che dipendono ciascuna da un potenziale U_i dipende dal potenziale ΣU_i .

Superficie equipotenziali (o di **livello**) diconsi le superficie $U = c$ (costante), luogo dei punti ove il potenziale prende il valore costante c . La forza che agisce sopra un punto della superficie equipotenziale è $\perp$ alla superficie stessa (pag. 329) e diretta dalla banda di U crescente. Se un punto P si muove sopra una superficie di livello il lavoro della forza applicata in P è nullo. Se P percorre una curva chiusa, il lavoro è pure nullo. Le superficie di livello per la forza di gravità sono piani orizzontali; le superficie di livello per la forza del caso *b*) sopra accennato sono piani $\perp$ a z ; nel caso *c*) sono cilindri di asse z ; quelle delle forze centrali del caso *d*) sono sfere di centro O ; infine le linee di livello per la forza del caso *e*) sono iperboli equilateri aventi per asintoti gli assi.

Linee di forza diconsi le traiettorie ortogonali delle superficie di livello; la direzione della forza è in ciascun punto di una linea di forza quella della tangente in quel punto alla linea. Nel caso *a*) di dianzi le linee di forza sono le rette verticali; nel caso *b*) le rette $\parallel$ a z , nel caso *c*) le rette $\perp$ a z , nel caso *d*) i raggi uscenti da O , nel caso *e*) le iperboli stesse ruotate di $\pi:4$.

Potenza relativa ad un intervallo di tempo $t_0 \vdash t_1$ è il rapporto fra il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ in $t_0 \vdash t_1$ e l'intervallo stesso,

cioè $[\int_{t_0}^{t_1} (Xx' + Yy' + Zz') dt] : (t_1 - t_0)$ (avendo posto $dx = x' dt$ ecc.); per la valutazione della potenza è necessaria la conoscenza delle equaz. del moto in termini finiti.

Potenza all'istante t è il limite del rapporto precedente esteso all'intervallo $t \rightarrow t + h$ al tendere di h a zero, cioè $Xx' + Yy' + Zz'$. Per l'unità di misura si veda § 5.

Energia potenziale dicesi la $-U$; nel passaggio da una posizione P_0 ad una generica P si ha, come si è visto a pagina 465 linea 16, $T - T_0 = U - U_0$ od anche $T - U = T_0 - U_0$; cioè $T - U = \text{costante}$ (**integrale delle forze vive**); la somma della energia cinetica con l'energia potenziale è costante (**principio della conservazione della energia**); nel moto avviene una trasformazione dell'una energia nell'altra. La $-U$ dicesi anche energia di posizione, non dipendendo il suo valore se non che dalla posizione di P .

5. — **Sistema tecnico di unità.** Scelto il metro ed il secondo come unità di lunghezza e tempo, se si prende per unità di forza il peso di 1 Kilogrammo, l'unità di massa è quella di un corpo che pesa Kilogrammi g , essendo g l'accelerazione di gravità espressa in metri al secondo. Essa varia al variare del luogo, poichè col luogo varia la g .

L'unità di lavoro è il **kilogrammetro**, lavoro fatto da una forza di 1 kilogramma per uno spostamento verticale del suo punto d'applicazione di un metro.

L'unità di potenza è il **cavallo-vapore** che si indica con *H.P.* (dall'inglese horse power) che è la potenza di una forza che in un secondo produce un lavoro di 75 kilogrammetri. Si prende anche per unità il **poncelet** che è la potenza di una forza che in un secondo produce un lavoro di 100 kilogrammetri.

Sistema assoluto di unità. Assunto il centimetro ed il secondo per unità di lunghezza e di tempo, si prende per unità di massa il **grammo-massa**, la massa della millesima parte del kilogramma campione, cilindro di platino depositato negli archivi di Parigi (uguale approssimativamente ad un decimetro cubo

di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi centigradi). Allora l'unità di forza è la **dine**, che fa acquistare al grammo massa l'accelerazione unità. Questo sistema dicesi **sistema C. G. S.** (centimetro, grammo, secondo). Un milione di dine si dice **megadine**. Un grammo (peso) vale g dine.

L'unità di lavoro è l'**erg**, lavoro d'una dine per uno spostamento di un centimetro. Un milione di erg si dice **megaerg**; in elettricità si prende per unità di lavoro il **joule** $= 10^7$ erg.

Un erg $= \frac{1}{10^5 g}$ kilogrammetri. L'unità di potenza è quella di una forza che produce il lavoro di un erg in un minuto secondo; in elettricità l'unità è il **watt** potenza di una forza che in 1 secondo produce un lavoro di 1 joule; il **kilowatt** vale 1000 watt. Un kilowatt vale (1000:75 g) cavalli-vapore (g , espresso in metri).

6. — **Dimensioni delle grandezze fisiche.** L'unità di misura A di qualunque grandezza fisica è determinata qualora siano fissate le 3 unità fondamentali di lunghezza, massa e tempo; si dice perciò unità **derivata**. Dette l, m, t queste 3 unità, se A varia proporzionalmente alla potenza p_1 -esima di l , p_2 -esima di m , p_3 -esima di t , si dice che A ha le dimensioni p_1, p_2, p_3 (rispetto alle unità di lunghezza, massa e tempo); ad esprimere ciò vale il simbolo introdotto da Maxwell $A = l^{p_1} m^{p_2} t^{p_3}$ (**equaz. di dimensione**). Si dice poi che una grandezza a di cui A è l'unità di misura ha le dimensioni p_1, p_2, p_3 . Se una grandezza non dipende da un'unità, ad es. da m , si tralascia, di solito, il simbolo (che per la convenzione fatta converrebbe) m^0 .

Le equaz. di dimensione di un'area è $A = l^2$, di un volume $V = l^3$, di una velocità $v = lt^{-1}$, di un'accelerazione $j = lt^{-2}$, di una velocità angolare $\omega = t^{-1}$, di una forza $F = lmt^{-2}$, di un impulso $I = lmt^{-1}$, di una quantità di moto $Q = lmt^{-1}$, di un lavoro $L = l^2mt^{-2}$, di una forza viva $T = l^2mt^{-2}$, di una potenza $\pi = l^2mt^{-3}$, di un momento d'inerzia (Cap. LXII, § 4) $I = l^2m$; ecc.

Se si prendono per unità fondamentali (§ 5) la forza, la lunghezza ed il tempo, la massa diventerebbe derivata e la sua equaz. di dimensione rispetto a lunghezza, tempo e forza (f), sarebbe $m = l^{-1} t^2 f$; l'equaz. di dimensione della quantità di moto è $Q = t f$, dell'impulso $I = t f$, del lavoro $L = l f$, della forza viva $T = l f$, della potenza $\pi = l t^{-1} f$.

Se l'unità di lunghezza è ridotta nel rapporto da 1 a $1:\lambda$, quella di massa da 1 a $1:\mu$, quella di tempo da 1 a $1:\tau$, la misura di una grandezza di dimensioni p_1, p_2, p_3 (rispetto a lunghezza, massa e tempo) viene ad essere data dalla misura precedente moltiplicata per il coefficiente $\lambda^{p_1} \mu^{p_2} \tau^{p_3}$ che dicesi **coefficiente di riduzione**.

Notiamo infine che le equazioni della Meccanica devono presentare **omogeneità** rispetto alla lunghezza, massa e tempo, cioè le grandezze rappresentate dai vari termini devono avere le stesse dimensioni.

7. — **Equaz. del moto in casi particolari.** I. F è costante (Cfr. Cap. LV, § 5, g). Appartiene a questo caso il moto dei proiettili nel vuoto: posta l'origine degli assi nella posizione iniziale, z verticale, volto in basso, x orizzontale nel piano contenente la velocità iniziale v_0 di proiezione orizzontale $v_0 \cos \alpha$, e verticale $-v_0 \sin \alpha$, la traiettoria è $z = \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} - x \operatorname{tg} \alpha$. Il segmento intercetto sull'asse x (**gittata**) è $(v_0^2 : g) \sin 2 \alpha$ che è massimo per $\alpha = \pi : 4$ ed uguale a $v_0^2 : 2 g$. Il vertice della parabola ha le coordinate $x = (v_0^2 : 2 g) \sin 2 \alpha$, $z = (-v_0^2 : 2 g) \sin^2 \alpha$. La massima altezza è raggiunta per $\alpha = \pi : 2$ cioè nel moto verticale. Al variare di α , per v_0 costante, le parabole inviluppano la parabola $z = \frac{g x^2}{2 v_0^2} - \frac{v_0^2}{2 g}$ che è detta **parabola di sicurezza** e divide la regione dei punti del piano colpibili dai non colpibili. Se (x_1, z_1) sono le coordinate di un punto A , un punto di velocità iniziale v_0 colpisce A se $\operatorname{tg} \alpha = (v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 + 2 g v_0^2 z_1 - g^2 x_1^2}) : g x_1$ valori, che sono reali distinti se A è dentro alla parabola

di sicurezza, reali coincidenti ($v_0^2: g x_1$) se A è sulla detta parabola, immaginari se è fuori. La tangente nel punto in cui una parabola tocca il suo involuppo è $\perp$ alla velocità iniziale.

II. F dipende dal solo tempo. Con successive quadrature si ha: $x = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t X dt + c_1 t + c_2$; $y = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t Y dt + c_3 t + c_4$; $z = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t Z dt + c_5 t + c_6$ ove c_1, c_3, c_5 sono le proiezioni della velocità iniziale, c_2, c_4, c_6 le coordinate della posizione iniziale.

III. F ha direzione costante; assunto per piano zx il piano $\parallel$ ad F per la velocità iniziale, per asse z la direzione di F , per origine la posizione iniziale del punto P , poichè $Y = 0$ ed inizialmente $y = y' = 0$, la 2^a delle (1') del § 2 dà $y = 0$, cioè il moto è piano. Se la velocità iniziale è $\parallel$ ad F sarà ancora $x = 0$, cioè P si muove lungo z . Sottocasi: a) F è costante: il moto è uniform. vario; b) F è funz. della sola z : si ha $z'' = \varphi(z)$ (equaz. tipo f , Cap. XLVIII, § 14): in particolare, se $\varphi(z) = -k^2 z$ il moto è armonico (Cap. LV, § 5, a); il tempo che P impiega a passare da una posizione qualunque iniziale, in cui la velocità sia nulla, all'origine è $\pi:2k$ (moto tautocrono); c) F è funzione di v : l'equaz. è $\frac{dv}{dt} = \varphi(v)$ da

cui (5) $t + c_1 = \int \frac{dv}{\varphi(v)}$; se di qui si ricava $v = \psi(t)$, è $z + c_2 = \int \psi(t) dt$; se no, avendosi $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} v$, si trae $z + c_3 = \int \frac{v dv}{\varphi(v)}$ e l'integrale generale si ha eliminando v fra questa e la (5).

Appartiene a questo caso il **moto verticale di un grave in un mezzo resistente**: detto $g_1 m$ il peso del grave diminuito del peso di uguale volume del mezzo e supposto che la resistenza del mezzo sia proporzionale a v^2 secondo $g_1 m : k^2$ l'equaz. del moto, assunto l'asse z nella direzione e senso della gravità, è $\frac{d^2 z}{dt^2} = g_1 \left(1 \mp \frac{v^2}{k^2}\right)$ se il moto è ascendente, e $\frac{d^2 z}{dt^2} = g_1 \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$

se è discendente. Nel 1° caso una prima integraz. dà $v = k \operatorname{tg} \frac{g_1}{k} (t + \tau)$.

Se la velocità per $t = 0$ è v_o , è $\tau = \frac{k}{g_1} \operatorname{arctg} \frac{v_o}{k}$, onde $\frac{dz}{dt} =$

$$= k \frac{v_o \cos \frac{g_1}{k} t + k \operatorname{sen} \frac{g_1}{k} t}{k \cos \frac{g_1}{k} t - v_o \operatorname{sen} \frac{g_1}{k} t} \text{ da cui integrando } z = -\frac{k^2}{g_1} \log \left(\cos \frac{g_1}{k} t - \frac{v_o}{k} \operatorname{sen} \frac{g_1}{k} t \right) \text{ se parte dall'origine. Si ha anche } z = \frac{k}{2g_1} \log \frac{k^2 + v^2}{k^2 + v_o^2};$$

l'altezza massima è $z = -\frac{k^2}{2g_1} \log \left(1 + \frac{v_o^2}{k^2} \right)$ che raggiunge al tempo $\frac{k}{g_1} \operatorname{arctg} \frac{v_o}{k}$; dopo il moto è discendente.

Pel moto discendente, una prima integrazione dà: $\log \frac{k+v}{k-v} = \frac{2g_1}{k} (t + \tau)$. Se per $t = 0$ si ha $v = v_o$, è $\tau = \frac{k}{2g_1} \log \frac{k+v_o}{k-v_o}$,

$$\text{onde } \frac{dz}{dt} = k \frac{(k+v_o) e^{\frac{g_1 t}{k}} - (k-v_o) e^{-\frac{g_1 t}{k}}}{(k+v_o) e^{\frac{g_1 t}{k}} + (k-v_o) e^{-\frac{g_1 t}{k}}} \text{ da cui integrando}$$

$$z = \frac{k^2}{g_1} \log \left(\cosh \frac{g_1 t}{k} + \frac{v_o}{k} \operatorname{senh} \frac{g_1 t}{k} \right). \text{ Se fosse } v_o = k \text{ si avrebbe}$$

$$z' = k \text{ e il moto sarebbe uniforme. Se } v_o = 0 \text{ è } v = k \operatorname{tgh} \frac{g_1 t}{k},$$

$$z = \frac{k^2}{g} \log \cosh \frac{g_1 t}{k}. \text{ Al tendere di } k \text{ all' } \infty, v = g_1 t, z = \frac{1}{2} g_1 t^2 \text{ e } g_1 \text{ tende all'accelerazione di gravità } g.$$

IV. F' dipende solo dalla posizione del suo punto d'applicazione. a) Se le (1') hanno la forma $x'' = \varphi_1(x)$, $y'' = \varphi_2(y)$, $z'' = \varphi_3(z)$ si hanno gli integrali primi $(x')^2 - v_{ox}^2 = 2 \int_{x_o}^x \varphi_1(x) dx$ e 2 analoghe, se x_o, y_o, z_o sono le coordin. della posizione iniziale, v_{ox}, v_{oy}, v_{oz} le proiezioni sugli assi della velocità iniziale.

Posto $v_{ox}^2 + 2 \int_{x_o}^x \varphi_1(x) dx = \psi_1(x)$ ed analoghe, si ha $\int_{x_o}^x \frac{dx}{\sqrt{\psi_1(x)}} = t - t_o$

e 2 analoghe in y e z . b) $\mathbf{F}$ ammette la funzione potenziale $U(x, y, z)$, (§ 4); esiste l'integrale primo (della forza viva) $m v^2 - 2 U = h$ ove $h = m v_o^2 + 2 U(x_o, y_o, z_o)$. c) $\mathbf{F}$ è **forza centrale**, cioè passa costantemente per un punto O ; allora se P è il punto mobile ($P - O$) $\wedge \mathbf{v}$ è un vettore costante $\mathbf{u}$; la traiettoria giace nel piano $\perp$ ad $\mathbf{u}$ che contiene la velocità iniziale; $\text{mod } \mathbf{u} = c = \text{doppio della velocità areolare}$ (pag. 421),

onde l'integrale primo (6) $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c$. d) $\mathbf{F}$ è **centrale** e $F (= \text{mod } \mathbf{F})$ è

funz. di $r = OP$, cioè $F = f(r)$; esiste la funzione potenziale $U = \mp \int f(r) dr$ (il segno superiore per l'attrazione da O , l'inferiore per la repulsione) e posto $\mu = 1 : m$ (m massa di P) l'integrale primo (7) $v^2 = \mp 2 \mu \int f(r) dr + h$. Eliminando dt fra

le (6), (7) e $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ (pag. 421), posto $\psi(r) = h \pm$

$\pm 2 \mu \int f(r) dr - \frac{c^2}{r^2}$, si ha $d\vartheta = \pm \frac{c dr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}}$, integrando

si ha la traiettoria. Eliminando invece $d\vartheta$ si ha $dt = dr : (\pm \sqrt{\psi(r)})$, che integrata esprime r in funzione di t ; mediante l'equaz. della traiettoria si esprime ϑ in funzione di t . Essendo

data la velocità iniziale, si conosce il segno iniziale di $\frac{dr}{dt}$ e

quindi il segno del radicale che si manterrà costante fino a che $\psi(r)$ non si annulli. Se inizialmente $\psi(r) = 0$, si prende il se-

gno $+$ o $-$ a seconda che $\frac{d^2 r}{dt^2} \geq 0$, per $t = 0$.

Se è data la traiettoria mediante un'equaz. fra r e ϑ è possibile esprimere la proiezz. F della forza sul raggio vettore per r e ϑ . Eliminando dt fra la (6) e l'espressione di v^2 si ha

$v^2 = \left\{ \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\vartheta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right\} c^2$, onde la eguaglianza fra i differen-

ziali della forza viva e del lavoro dà $F dr = \frac{mc^2}{2} \left\{ \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\vartheta} \right)^2 + \right.$

$$+ \left(\frac{1}{r} \right)^2 \left\} \text{ da cui } F = - \frac{m c^2}{r^2} \left[\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \vartheta^2} + \frac{1}{r} \right] \text{ (formuladi Binet).}$$

Apsidi si dicono i punti in cui il raggio vettore è $\perp$ alla traiettoria; questa è simmetrica rispetto ad ogni linea apsidale.

Se $f(r) = k^2 : r^2$ e la forza è d'attrazione, l'equaz. differenziale della traiettoria, ponendo qui $k^2 : m = \mu$ è $d \vartheta = \pm c d \left(\frac{1}{r} \right) :$

$$: \sqrt{h + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c} \right)^2}; \text{ integrando } r = p : (1 + e \cos (\vartheta - \vartheta_0)) \text{ ove}$$

$p = c^2 : \mu$, $e^2 = (\mu^2 + h c^2) : \mu^2$. La traiettoria è una conica di fuoco O , ed è una iperbole se $h > 0$, una parabola se $h = 0$, una ellisse se $h < 0$. Se la forza è repulsiva bisogna cambiare il segno a μ .

Sia il moto ellittico: tracciato un cerchio di diametro sull'asse maggiore, sia Q il punto in cui il cerchio è incontrato dalla normale all'asse maggiore pel punto mobile P , il raggio che dal centro C va a Q forma coll'asse maggiore un angolo u che dicesi **anomia eccentrica** di P ; il doppio della velocità areolare è $ab \frac{du}{dt} (1 - e \cos u) = c$ essendo a, b i semiassi, e l'eccentricità, onde, posto $n = c : ab$, integrando si ha $nt = u - e \sin u$ (equaz. di Keplero). Se ϑ è l'anomia di P , $\sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{1 + e^2} \operatorname{tg} \frac{u}{2}$.

Moto relativo di 2 punti che si attraggono con forza proporzionale alle masse e funzione della distanza; moto dei pianeti; vedi Cap. LXVII § 5, 6.

V. Moto dei proiettili in un mezzo resistente. Supposto che la resistenza sia tangente alla traiettoria, nel senso contrario al moto, funzione della velocità $m R(v)$, le equaz. intrinseche sono $\frac{dv}{dt} = -R(v) - g \sin \alpha$, $\frac{v^2}{\varrho} = g \cos \alpha$ se α è l'an-

golo che la tangente forma coll'orizzonte. La traiettoria è piana; poichè $\varrho = -ds : da = v dt : da$ la 2^a equaz. dà (8) $v \frac{da}{dt} = -g \cos \alpha$,

eliminando fra queste e la 1^a il tempo, si ha (9) $\cos \alpha \frac{dv}{da} =$

$-v \sin \alpha = \frac{R(v)}{g} v$, integrando la quale si ha una relazione fra v ed α . Se $R(v) = g(a + bv^n)$ l'equaz. (9) colla sostituzione $w = v^{-n}$ diventa $\frac{dw}{da} + \frac{n(a + \sin \alpha)}{\cos \alpha} w = -\frac{nb}{\cos \alpha}$ che è lineare (pag. 358).

Se $R(v) = g b v^n$ la (9) posto $v \cos \alpha = u$, $\operatorname{tg} \alpha = p$ diventa $\frac{du}{dp} =$

$= b(1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}} u^{n+1}$ il cui integrale è (10) $u^{-n} - u_0^{-n} = -$

$-nb \int_{p_0}^p (1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}} dp$ essendo $u_0 = v_0 \cos \alpha_0$, $p_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$, v_0, α_0 valori iniziali di v ed α . Determinato u , si ha da (8)

$-gt = \int_{p_0}^p u dp$, $gx = -\int_{p_0}^p u^2 dp$, $gz = -\int_{p_0}^p u^2 p dp$, supposta la posizione iniziale nell'origine. Se $n = 1$, la (10) è $u^{-1} - u_0^{-1} =$

$= nb(p_0 - p)$, se $n = 2$, è $u^{-2} - u_0^{-2} = \frac{nb}{2}(p_0 \sqrt{1+p_0^2} - p \sqrt{1+p^2}) +$

$+\frac{nb}{2} \log \frac{p_0 + \sqrt{1+p_0^2}}{p + \sqrt{1+p^2}}$; se $n = 3$, è $u^{-3} - u_0^{-3} = nb(p_0 - p) +$

$+\frac{nb}{3}(p_0^3 - p^3)$.

CAPITOLO LXII.

Geometria delle masse

1. — **Baricentro.** *a)* Sia dato un sistema di n punti P_i di coordinate x_i, y_i, z_i e di massa m_i ; i loro pesi sono n forze parallele di intensità $m_i g$ che ammettono un centro G (pag. 445) il quale dicesi **baricentro del sistema**.

Le sue coordinate sono $\xi = (\sum_1^n x_i m_i) : M$, $\eta = (\sum_1^n y_i m_i) : M$,
 $\zeta = (\sum_1^n z_i m_i) : M$ essendo $M = \sum_1^n m_i$ cioè la massa del sistema.

Se O è un punto qualunque vale la formula vettoriale:
 $M(G - O) = \sum m_i (P_i - O)$, onde $\sum m_i (P_i - G) = 0$.

b) Sia dato un continuo C materiale (volume, superficie, linea) e sia ΔC una sua porzione (di cui con ΔC indichiamo pure la misura) di massa Δm ; il rapporto $\Delta m : \Delta C$ all'impicciolire indefinito di ΔC in guisa da tendere ad un punto P , tende ad un numero che dicesi **densità** del continuo in P ; la densità diviene perciò una funzione $\varrho(x, y, z)$ del punto P del continuo. Di un elemento dC del continuo (punto materiale, Cap. LXI, § 1) la massa dm è $\varrho(x, y, z) dC$ onde la **massa totale** del continuo è $M = \int_C \varrho(x, y, z) dC$, l'integrazione estesa al continuo C . Il peso dell'elemento dC è $g dm$ ed il peso totale del continuo è gM . Se ϱ è costante, il continuo dicesi **omogeneo** ed in questo caso $M = \varrho C$ indicando con C la misura del continuo. Le coordinate del **baricentro** del continuo sono $\xi = (\int_C x \varrho(x, y, z) dC) : M$, $\eta = (\int_C y \varrho(x, y, z) dC) : M$, $\zeta = (\int_C z \varrho(x, y, z) dC) : M$. Se il corpo è omogeneo, le formule precedenti divengono $\xi = (\int_C x dC) : C$; $\eta = (\int_C y dC) : C$; $\zeta = (\int_C z dC) : C$, rappresentando con C la misura del continuo.

Se il continuo C si divide nei continui $C_1, C_2 \dots C_k$ di masse $M_1, M_2, \dots M_k$, se $G_1, G_2 \dots G_k$ sono i baricentri di $C_1, C_2 \dots C_k$ rispettiv., il baricentro dei k punti $C_1, C_2, \dots C_k$ ai quali si attribuiscono le masse $M_1, M_2, \dots M_k$ coincide con il baricentro di C .

2. — **Momento di 1° ordine o momento statico** di un punto di massa m rispetto ad un piano π è il prodotto della massa m per la distanza del punto dal piano (fissato sulla normale al piano un verso come positivo); di un sistema di punti si dice momento statico la somma dei momenti statici dei singoli punti. Indicando con M_x il momento statico di un sistema

di punti $P_i (x_i, y_i, z_i)$ di masse m_i rispetto al piano yz , con M_y, M_z i momenti statici rispetto ai piani zx, xy rispettivamente. il momento statico del sistema rispetto al piano xy $\alpha + \beta + \gamma - \delta = 0$ (equaz. normale pag. 61) è $M\delta - \alpha M_x - \beta M_y - \gamma M_z$ ove M è la massa totale Σm_i . Se ξ, η, ζ sono le coordinate del baricentro il momento predetto è $M(\delta - \alpha\xi - \beta\eta - \gamma\zeta)$ cioè il momento statico di un sistema rispetto ad un piano equivale al momento statico di tutta la massa M concentrata nel baricentro rispetto allo stesso piano, giacchè $\delta - \alpha\xi - \beta\eta - \gamma\zeta$ è la distanza del baricentro dal piano (pag. 63).

3. — **Determinazione di baricentri.** Il baricentro di una superficie piana, sta nel piano della superficie; il baricentro di un segmento rettilineo sta su di esso. Se il continuo è omogeneo ed ha un piano di simmetria (ortogonale od obliquo) il baricentro sta in codesto piano; se ha due piani di simmetria, il baricentro sta nella loro intersezione; se ha tre piani di simmetria, il baricentro è il loro punto di intersezione; in particolare se il continuo è piano ed ha una retta di simmetria (ortogonale od obliqua) il baricentro sta sulla retta, se ha due rette di simmetria, il baricentro è il punto di intersezione. I risultati precedenti seguitano a sussistere se il continuo non è omogeneo purchè i punti simmetrici siano di masse uguali. Ne consegue, supponendo i continui omogenei, che: il **baricentro di un segmento** è il suo punto medio, il **baricentro di un parallelogrammo** è l'incontro delle diagonali, il **baricentro di un triangolo** è l'incontro delle mediane (posto ai $2/3$ di una mediana a partire dal vertice), il **baricentro di un parallelepipedo** è l'incontro delle congiungenti i vertici opposti; il **baricentro di un tetraedro** è l'incontro delle rette che congiungono i vertici coi baricentri delle faccie opposte (posto ai $3/4$ di una di codeste rette a partire dal vertice); il **baricentro di un cerchio**, di un'ellisse, di un asteroide, di una ovale del Cassini, è il centro di codeste figure; il **baricentro di un prisma** o di un **cilindro** a basi parallele è alla metà del segmento che

unisce i baricentri delle basi stesse; il **baricentro di una piramide** o di un **cono** è ai $\frac{3}{4}$ della congiungente il vertice (opposto alla base) con il baricentro della base, a partire dal vertice.

Teor. di Guldino, vedi pag. 346 e 350.

Baricentro di un arco di cerchio di raggio a e che sottende ad un angolo α si trova sul raggio che va al punto medio dell'arco alla distanza $\frac{2 a \operatorname{sen} 2 \alpha}{\alpha}$ del centro: la distanza detta

sta al raggio come la corda sta all'arco. **Baricentro del settore di cerchio** corrispondente all'arco precedente è sullo stesso raggio alla distanza $\frac{4}{3} \frac{a}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$. Il **baricentro di un**

arco di catenaria $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ simmetrico rispetto al vertice e proiettantesi sulla direttrice nel segmento $2h$ è il punto $x=0, y = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{2h}{a}} - e^{-\frac{2h}{a}} + 4h \right) : \left(e^{\frac{h}{a}} - e^{-\frac{h}{a}} \right)$ cioè

il punto medio del segmento staccato sull'asse y dalla normale ad un estremo. Il baricentro dell'area racchiusa dall'arco precedente di catenaria, dalla direttrice e dalle ordinate agli estremi

è il punto $x=0, y = \frac{1}{8} \left(e^{\frac{2h}{a}} - e^{-\frac{2h}{a}} + 4h \right) : \left(e^{\frac{h}{a}} - e^{-\frac{h}{a}} \right)$,

cioè dista dalla direttrice di $\frac{1}{4}$ del segmento staccato su y dalla normale ad un estremo. Il **baricentro dell'arco di cicloide** (pag. 41) compreso fra due cuspidi si trova sulla normale al punto medio (vertice) alla distanza dalla curva di $\frac{2}{3} r$. Il baricentro dell'area racchiusa dall'arco stesso di cicloide e dalla congiungente le due cuspidi si trova sulla stessa normale alla distanza $r:6$ dalla curva.

Il baricentro dell'arco di **asteroide** (linea) $x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3}$ posto nel semipiano delle y positive è il punto $x=0, y = \frac{2}{3} r$; il baricentro dell'area racchiusa dal predetto semiasteroide e dall'asse x è il punto $x=0, y = \frac{256}{315} r$.

Il baricentro dell'area racchiusa dalla parabola $y^2 = 2px$ e dalla retta $x = a$ è il punto $x = \frac{3}{5}a$, $y = 0$ il baricentro della metà dell'area precedente che sta nel semipiano delle y positive è $x = \frac{3}{5}a$, $y = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{pa}{2}}$; il baricentro dell'area racchiusa dalla parabola e dalle due rette $x = a$, $x = b$ ($b > a$) è il punto $x = 3(b^{5/2} - a^{5/2}) : 5(b^{3/2} - a^{3/2})$, $y = 0$. Il baricentro della quarta parte dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ che sta nel 1° quadrante è il punto $x = \frac{4}{3} \frac{a}{\pi}$, $y = \frac{4}{3} \frac{b}{\pi}$. Il baricentro dell'ottava parte dell'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ che sta nel 1° ottante è il punto $x = \frac{3}{8}a$, $y = \frac{3}{8}b$, $z = \frac{3}{8}c$; facendo $a = b = c$ si ha il caso della sfera.

Il baricentro dell'ottava parte della sfera (superficie) che sta nel 1° ottante è $x = y = z = r : 2$. Il baricentro di un tronco di cono circolare (volume) di altezza h e i raggi delle cui basi sono a e b ($a > b$) e sull'asse del cono alla distanza $\frac{h}{4} \frac{3a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$ dalla base di raggio b .

Baricentro di un sistema articolato piano. Un sistema articolato piano sia composto di elementi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots$ ciascuno riunito ad un punto dell'elemento che precede e ad uno di quello che segue; dell'elemento σ_k , sia O_k il punto che lo riunisce all'elemento che precede, O_{k+1} quello che lo riunisce all'elemento che segue; in σ_1 ci sia un punto fisso O_1 . Dell'elemento σ_k il baricentro sia un punto G_k di $O_k O_{k+1}$; dicasi **punto principale** di σ_k il punto H_k baricentro della massa di σ_k , delle masse degli elementi che precedono concentrate in O_k e delle masse che seguono concentrate in O_{k+1} : sussiste allora il **teor. di Fischer**: se G il baricentro del sistema articolato piano, si ha la relazione vettoriale $G - O_1 = \Sigma (H_k - O_k)$ cioè il vettore che dal punto O_1 va al baricentro G è il lato

di chiusura di un poligono deformabile i cui lati sono uguali ai vettori che dalle articolazioni iniziali di ciascun elemento vanno ai rispettivi punti principali.

4. — **Momento di inerzia** di un punto P di massa m rispetto ad un asse l , o rispetto ad un piano π , o ad un punto O è il prodotto di m pel quadrato della distanza di P dall'asse l , dal piano π e dal punto O .

Momento di inerzia di un sistema di n punti P_i di massa m_i rispetto all'asse l , o rispetto al piano π , o rispetto al punto O è $\Sigma m_i r_i^2$ ove r_i è la distanza di P_i dall'asse, o dal piano o dal punto. Se di un continuo C è $\rho(x, y, z)$ la densità, momento di inerzia del continuo C è $\int_C \rho(x, y, z) r^2 dC$ ove r è la distanza di un punto di dC dall'asse, dal piano o dal punto. Ad es. se l'asse è l'asse z , il momento è $\int_C \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dC$, se il piano è il piano xy , il momento è $\int_C \rho(x, y, z) z^2 dC$; se il punto è l'origine degli assi $\int_C \rho(x, y, z) (x^2 + y^2 + z^2) dC$. Il momento di inerzia rispetto ad un punto O è detto anche **momento polare** rispetto ad O .

Raggio d'inerzia (o di **girazione**) di un sistema rispetto ad un asse è il numero k per cui $k^2 M$ (M massa totale) eguaglia il momento d'inerzia rispetto all'asse; cioè se I è il momento, $k = \sqrt{I:M}$. È detto anche **giratore**.

Il momento di inerzia I rispetto ad un asse è uguale al momento di inerzia I_g rispetto ad un asse $\parallel$ per il baricentro del sistema più il prodotto della massa totale M pel quadrato della distanza l dei due assi: in simboli $I = I_g + l^2 M$. Se k è il raggio di inerzia rispetto all'asse non passante pel baricentro, k_g quello rispetto all'asse per il baricentro, è $k^2 = k_g^2 + l^2$.

Braccio del momento d'inerzia rispetto ad un piano è il numero j per cui $j^2 M = J$, se J è il momento d'inerzia rispetto al piano.

Il momento di inerzia J di un sistema rispetto ad un piano è uguale al momento di inerzia J_g rispetto ad un piano $\parallel$ pel baricentro del sistema più il prodotto della massa totale M

pel quadrato della distanza l dei due piani, cioè $J = J_g + l^2 M$. Se j, j_g sono i bracci dei momenti J, J_g è $j^2 = j_g^2 + l^2$.

Momento complesso (o **complementare**, o **misto**) di inerzia rispetto a due piani π_1, π_2 è la somma dei prodotti delle masse per le distanze dei punti dai due piani. Se P è il momento complesso di un sistema rispetto a due piani, P_g quello rispetto a due piani paralleli pel baricentro, l_1, l_2 le distanze di queste coppie di piani paralleli è $P = P_g + l_1 l_2 M$.

Raggio medio del momento polare S di un sistema rispetto ad un punto O è il numero s per cui $s^2 M = S$.

Il momento di inerzia di un sistema di punti rispetto al piano $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ (α, β, γ , coseni direttori della $\perp$ al piano) è $J = a \alpha^2 + b \beta^2 + c \gamma^2 + 2 a' \beta \gamma + 2 b' \gamma \alpha + 2 c' \alpha \beta$ ove $a = \sum m_i x_i^2$, $b = \sum m_i y_i^2$, $c = \sum m_i z_i^2$ sono i momenti rispetto ai piani coordinati, $a' = \sum m_i y_i z_i$, $b' = \sum m_i z_i x_i$, $c' = \sum m_i x_i y_i$ sono i momenti complessi rispetto ai piani $xz, xy; xy, xz; yz, xz$ rispettivamente. Il momento polare rispetto all'origine è $S = a + b + c$.

Il momento di inerzia di un sistema di punti $P_i (x_i, y_i, z_i)$ di masse m_i rispetto ad un asse per l'origine di coseni direttori α, β, γ è $I = A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 - 2 A' \beta \gamma - 2 B' \gamma \alpha - 2 C' \alpha \beta$ ove si è posto $A = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$, $B = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2)$, $C = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$ (momenti di inerzia rispetto agli assi x, y, z rispettivamente), $A' = \sum m_i y_i z_i$, $B' = \sum m_i z_i x_i$, $C' = \sum m_i x_i y_i$ (momenti misti di inerzia). Valgono le disuguaglianze $B + C > A$, $C + A > B$, $A + B > C$, in guisa che A, B, C possono essere i lati di un triangolo.

5. — **Momenti di inerzia di alcuni corpi.** Supporremo la densità uguale a 1. Il momento d'inerzia di un **rettangolo** di lati a, b rispetto ad un asse esterno al rettangolo parallelo al lato a , e distante da questo di δ è $I = ab (3 \delta^2 + 3 \delta b + b^2) : 3$; se l'asse è interno, il momento è $I = ab (3 \delta^2 - 3 \delta b + b^2) : 3$ ed è $I = ab^3 : 3$ se l'asse coincide col lato a .

Il momento di inerzia di un **triangolo** rispetto ad un suo lato è $I = A h^2 : b$ se A è l'area del triangolo, h l'altezza rela-

tiva al lato rispetto a cui si vuole il momento; il raggio di inerzia è $k = h : \sqrt{b}$.

Il momento di inerzia di un **triangolo** rispetto ad un asse per un vertice è $I = A (h^2 + h h' + h'^2) : 6$ se A è l'area del triangolo, h, h' le distanze (con segno) degli ulteriori due ver-

tici dall'asse; il raggio d'inerzia è $k = \sqrt{\frac{h^2 + h h' + h'^2}{6}}$.

Il momento di inerzia di un **cerchio** di raggio r rispetto ad un diametro è $I = \pi r^4 : 4$ e il raggio di inerzia è $k = r : 2$.

Il momento di inerzia di un **cerchio** di raggio r rispetto alla normale al piano del cerchio nel centro è $I = \pi r^4 : 2$ ed il raggio d'inerzia $k = r : \sqrt{2}$. Il momento di inerzia di una **ellisse** rispetto all'asse $2a$ è $I = a^3 b \pi : 4$ ed il momento rispetto ad una normale al piano dell'ellisse pel centro è $I = \pi a b (a^2 + b^2) : 4$.

Il momento di inerzia di un **parallelepipedo** di lati a, b, c rispetto all'asse pel lato a è $I = a b c (b^2 + c^2) : 3$ e quello rispetto alla normale alla faccia di lati a, b pel centro di essa, è $I = a b c (a^2 + b^2) : 12$.

Momento di inerzia di un **cilindro circolare** a basi parallele di raggio r e di altezza h è $I = \pi h r^4 : 2$. Momento di inerzia del **solido di rotazione** generato dalla rotazione della curva $y = \varphi(z)$ intorno all'asse z e limitato dai due piani

$z = z_0, z = z_1$ è $I = \frac{\pi}{2} \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)^4 dz$. Momento di inerzia di un

tronco di cono circolare di altezza h a basi parallele di raggi a, b rispetto all'asse del cono è $I = \frac{\pi h}{10} \frac{a^5 - b^5}{a - b}$ ed il raggio

di inerzia è $k = \sqrt{\frac{3}{10} \frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3}}$.

Momento di inerzia di un **ellissoide** di semiasse a, b, c rispetto all'asse $2a$ è $I = \frac{4}{15} \pi a b c (b^2 + c^2)$; il momento di inerzia della **sfera** di raggio a rispetto ad un diametro è

$I = \frac{8}{15} \pi a^5$; quello di uno **strato sferico** di raggio interno a , esterno A , rispetto al diametro è $I = \frac{8}{15} \pi (A^5 - a^5)$; quello di un **toro** generato da un circolo di raggio r che ruota intorno ad un asse che dista dal suo centro di h , rispetto a detto asse è $I = 2 \pi^2 r^2 h (h^2 + \frac{3}{4} r^2)$ e rispetto all'asse equatoriale è $I = \pi^2 r^2 h (h^2 + \frac{5}{4} r^2)$.

Momento di inerzia della **superficie di rotazione** generata dalla rotazione di $y = f(z)$ intorno a z e limitata dai piani $z = z_0, z = z_1$ è dato da $I = 2 \pi \int_{z_0}^{z_1} f(z)^3 \sqrt{1 + f'(z)^2} \cdot dz$.

Momento di inerzia della **superficie laterale del tronco di cono** circolare di altezza h e raggi delle basi r, r' è $I = \frac{1}{2} \pi (r^3 + r^2 r' + r r'^2 + r'^3) \sqrt{h^2 + (r - r')^2}$, della **superficie laterale del cono** di altezza h e raggio alla base r , è $I = \frac{1}{2} \pi r^3 \sqrt{h^2 + r^2}$.

6. — **Ellissoide di inerzia** (o di *Poinsot*). Se A, B, C, A', B', C' , hanno il significato sopra attribuito, il luogo dei punti H che distano dall'origine O delle coordinate di un segmento $\varepsilon: \sqrt{I}$ (ε costante positiva, I momento di inerzia del sistema rispetto alla retta OH) è l'ellissoide $A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 - 2 A' \eta \zeta - 2 B' \zeta \xi - 2 C' \xi \eta = \varepsilon^2$; al variare di ε si hanno tanti ellissoidi omotetici (pag. 105). In particolare si ponga $\varepsilon^2 = 1$, l'ellissoide $A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 - 2 A' \eta \zeta - 2 B' \zeta \xi - 2 C' \xi \eta = 1$ dicesi **ellissoide di inerzia** relativo al punto O . Detta h la lunghezza del raggio vettore OH (punto generico dell'ellissoide) è $h = 1: \sqrt{I}$ ove I è il momento di inerzia rispetto ad OH , cioè il momento di inerzia rispetto ad un qualunque asse pel centro dell'ellissoide è l'inverso del quadrato del segmento dell'asse compreso fra il centro e l'ellissoide. Prendendo per assi coordinati gli assi dell'ellissoide (Cap. IX, § 8), l'equazione dell'ellissoide è $A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 = 1$.

Alcuni chiamano ellissoide di inerzia quello ottenuto facendo $\varepsilon^2 = M$ (massa totale): in questo caso $h = \sqrt{M:I} = 1:k$,

se k è il raggio di inerzia, cioè il raggio di inerzia è l'inverso del segmento dell'asse compreso fra il centro e l'ellissoide.

Assi principali d'inerzia pel punto O diconsi gli assi dell'ellissoide di inerzia relativo al punto O . Una retta qualunque è asse di inerzia solamente per un suo punto, a meno che non passi pel baricentro del sistema nel qual caso, se è principale di inerzia rispetto ad un punto, lo è rispetto a tutti.

Assi centrali si dicono gli assi principali relativi al baricentro. I momenti di inerzia rispetto a tre rette mutuamente ortogonali sommano una costante, cioè $A + B + C$; gli inversi dei momenti rispetto ad una terna di diametri coniugati (pagina 87) sommano una costante, cioè $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$.

Ellissoide di girazione (o di Clebs, o **momentale**) relativo ad un punto O è l'ellissoide trasformato per raggi vettori reciproci (*) dell'ellissoide di Poincot relativo allo stesso punto: riferito agli assi dell'ellissoide la sua equaz. è $\frac{\xi^2}{A} + \frac{\eta^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} = 1$.

Le distanze dei piani tangenti all'ellissoide dall'origine sono le radici quadrate del momento d'inerzia rispetto alla normale al piano tangente pel centro dell'ellissoide. Gli ellissoidi di Poincot e di Clebs si corrispondono in una affinità (Cap. XI, § 1).

Ellissoide di Culmann relativo ad un punto O è l'ellissoide di centro O di equaz. $\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c} = 1$ (riferito ai propri assi) ove a, b, c sono i momenti di inerzia rispetto ai piani yz, zy, xy rispettivam. I suoi assi sono nelle stesse direzioni degli assi dell'ellissoide di Poincot. Le distanze dal centro dei suoi piani tangenti eguagliano le radici quadrate dei momenti di inerzia

(*) Presa una sfera S di raggio 1, ad ogni punto P corrisponde un piano polare π (Cap. IX, § 4); se P appartiene ad una superficie σ , l'involuppo σ' dei piani polari di P dicesi la trasformata di σ per raggi vettori reciproci.

rispetto ai piani paralleli pel centro. Il baricentro del sistema è sempre interno a qualunque ellissoide di Culmann.

Ellissoide di Binet (o di **Chelini**) relativo ad un punto O è il trasformato per raggi vettori reciproci dell'ellissoide di Culmann relativo allo stesso punto. La sua equaz. riferita agli assi dell'ellissoide è $a \xi^2 + b \eta^2 + c \zeta^2 = 1$ od introducendo i momenti principali d'inerzia a $\frac{1}{2} (B + C - A) \xi^2 + \frac{1}{2} (C + A - B) \eta^2 + \frac{1}{2} (A + B - C) \zeta^2 = 1$.

CAPITOLO LXIII.

Il principio di D'Alembert e le equazioni generali della Dinamica

1. — **Principio di D'Alembert.** Se nel punto P di massa m , soggetto a vincoli, è applicata la forza $\mathbf{F}$, il prodotto $m \frac{d^2 P}{dt^2}$ non è uguale a $\mathbf{F}$ come avviene pel punto libero, ma è la forza che applicata a P , supposto libero, produrrebbe lo stesso moto che P ha; essa è detta **forza d'inerzia**. Se $\mathbf{R}$ è la forza sostituibile ai vincoli, $m \frac{d^2 P}{dt^2}$ è la risultante di $\mathbf{F}$ e di $\mathbf{R}$, onde vale il **principio di D'Alembert**: durante il moto di un punto vincolato in ogni istante si fanno equilibrio, in virtù dei vincoli, la forza applicata $\mathbf{F}$ e la forza d'inerzia voltata di segno $\left(- m \frac{d^2 P}{dt^2} \right)$; od anche si può dire, in ogni istante l'azione dei vincoli fa equilibrio a quella della **forza perduta**, dando questo nome a $\mathbf{F} - m \frac{d^2 P}{dt^2}$. Se si ha un sistema di n

punti P_s , vincolati, per ogni punto si può ripetere la considerazione precedente, onde: durante il moto di un sistema vincolato, in ogni istante si fanno equilibrio, in virtù dei vincoli, le forze applicate $\mathbf{F}_s$ e le forze d'inerzia voltate di segno $\left(-m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2}\right)$, od, in altre parole, l'azione dei vincoli fa in ogni istante equilibrio a quella delle forze perdute.

Equaz. generale della Dinamica. La condizione per questo equilibrio è, pel principio dei lavori virtuali (Cap. LIX, § 2), $(1) \sum_s \left(\mathbf{F}_s - m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2} \right) \times \delta P_s \overline{= 0}$, il 1° segno per spostamenti invertibili, il 2° per i non invertibili. Questa è l'equaz. vettoriale generale della Dinamica.

Equaz. di Lagrange nella 1ª forma. Se gli spostamenti degli n punti del sistema sono definiti dalle equaz. (1) del Cap. LIX, § 3, la (1) si scinde nelle $3n$ equaz. $\frac{d^2 x_s}{dt^2} = X_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{is}$ ($s=1, \dots, n$) e analoghe per y_s, z_s , essendo X_s, Y_s, Z_s le proiezioni sugli assi di $\mathbf{F}_s$ e λ_i i moltiplicatori di Lagrange (Cap. LIX, § 4, b); se i vincoli sono dati dalle k equazioni $L_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0$ ($i=1, \dots, k$) (sistema olonomo), la (1) si scinde nelle $3n$ equaz. $(1') \frac{d^2 x_s}{dt^2} = X_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial L_i}{\partial x_s}; \frac{d^2 y_s}{dt^2} = Y_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial L_i}{\partial y_s}; \frac{d^2 z_s}{dt^2} = Z_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial L_i}{\partial z_s}$ ($s=1, 2, \dots, n$).

2. — **Sistemi di n punti liberi.** Su n punti liberi P_s di masse m_s agiscano forze $\mathbf{F}_s$ (risultanti delle forze agenti su P_s) allora in (1) δP_s è perfettamente arbitrario, onde sarà (2)

$\mathbf{F}_s = m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2}$ ($s=1, 2, \dots, n$) che sono le n equaz. del moto.

Nel caso più generale $\mathbf{F}_s$ dipenderà dal tempo, dalle coordinate di P_s e degli altri punti del sistema e dalle velocità dei punti stessi: cartesianamente le (2) danno luogo a $3n$ equaz.

$X_s = m_s \frac{d^2 x_s}{dt^2}, Y_s = m_s \frac{d^2 y_s}{dt^2}, Z_s = m_s \frac{d^2 z_s}{dt^2}$ ($s=1, 2, \dots, n$) del

2° ordine, ove X_s, Y_s, Z_s sono, in generale, funzioni di t , delle coordinate dei punti e delle loro derivate rapporto al tempo; il sistema integrale fornisce le $3n$ coordinate in funzione del tempo t e di $6n$ costanti, la determinazione delle quali si fa mediante le condizioni iniziali (posizioni dei punti P_s e loro velocità all'istante iniziale).

3. — Equazione del moto di un punto su una linea

$f(x, y, z) = 0, \varphi(x, y, z) = 0$ sono $\frac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e 2 analoghe sugli assi y e z . Applicando direttamente il principio di D'Alembert, si ha l'equaz. del moto esprimendo che la componente tangenziale della forza perduta è nulla (Capitolo LVIII, § 6, e) onde (3) $F_t - m \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$, essendo F_t la proiezione di $\mathbf{F}$ sulla tangente.

Moto di un punto pesante su una linea. Se $\mathbf{F}$ è il peso, supposta la curva riferita ad una terna di assi ortogon. di cui z nella direzione e senso opposto della gravità, sarà $F_t = -mg \frac{dz}{ds} = -mg \left(\frac{dz}{dt} : v \right)$ onde la (3) diviene $-g dz = v dv$ ed integrando $2g(h - z) = v^2$ ove $h = z_0 + (v_0^2 : 2g)$, z_0 altezza iniziale, v_0 velocità iniziale di P ; ed anche (4) $dt = ds : \pm \sqrt{2g(h - z)}$, ove si esprimerà ds mediante z , o z mediante s e quindi l'integrazione è ridotta alle quadrature.

Se la curva è chiusa, e se il piano $z = h$ non incontra la curva, il punto la percorre indefinitamente, diventando la velocità minima o massima nei punti più alti o più bassi della curva; se il piano $z = h$ incontra la curva, ivi la velocità si annulla. Se il punto parte dalla posizione più bassa ed A, A' sono 2 punti consecutivi di incontro della curva con $z = h$ che comprendono il punto di partenza, P raggiunge in un tempo finito A e A' ed il moto avviene indefinitamente lungo l'arco AA' , se le tangenti in A, A' non sono orizzontali; se codeste tangenti sono orizzontali ed A, A' punti ordinari della curva, il tempo impiegato a raggiungerli è infinito; se A, A' sono

punti singolari, il tempo *può* essere finito. Se della curva sono date le equaz. parametriche $x = x(q)$, $y = y(q)$, $z = z(q)$ la (4) diviene $dt = \sqrt{x'(q)^2 + y'(q)^2 + z'(q)^2} dq : \pm \sqrt{2g(h - z(q))}$.

Pendolo semplice. Un punto P pesante di massa m si muova su una circonferenza di raggio a in un piano verticale: detto φ l'angolo che il raggio per P fa colla verticale volta in basso è $F_t = -mg \sin \varphi$, $\frac{d^2 s}{dt^2} = a \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$, onde l'equaz. (3)

del moto è $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{a} \sin \varphi$. Integrando e ponendo la co-

stante d'integrazione sotto la forma $\frac{2g}{a} \left(\frac{z}{a} - 1 \right)$ (z costante

arbitraria) si ha (5) $\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{4g}{a} \left(\frac{z}{2a} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$. Se $z < 2a$,

posto $z : 2a = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, l'equazione diventa $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{d\varphi}{dt} = \pm$

$\pm \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$; la $\frac{d\varphi}{dt}$ si annulla per $\varphi = \pm \alpha$; il moto è

oscillatorio. La durata di una oscillazione è data da

$$T = \sqrt{\frac{g}{a}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \text{ posto}$$

$\sin \frac{\alpha}{2} = k$, $\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \vartheta$, che è un'integrale ellittico di 1ª specie (pag. 248).

Se k è molto piccolo, $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, la durata è indipendente dall'ampiezza dell'oscillazione (**isocronismo delle piccole oscillazioni**); in seconda approssimazione $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right)$.

Se $z = 2a$ la (5) diviene $\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = \frac{g}{a} \cos^2 \vartheta$ (posto $2\vartheta = \varphi$); la velocità si annulla solo per $\varphi = \pi$, cioè nel punto più alto del circolo, a raggiungere il quale dal punto più basso occorre il

tempo $\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta} = \left[\sqrt{\frac{a}{g}} \log \operatorname{tg} \frac{\pi + \varphi}{4} \right]_0^{\pi} = \infty$; il moto dicesi **asintotico**. Durante il moto, il tempo impiegato dalla posizione più bassa ad una generica è $t = \sqrt{\frac{a}{g}} \log \operatorname{tg} \frac{\pi + \varphi}{4}$. Se $z > 2a$, la (4), posto $2a : z = k^2$, $\varphi = 2\vartheta$, diviene $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}$; il moto è **rivolutivo** perchè il 2° membro non si annulla mai. La durata di una intera rivoluzione è $T = 2 \sqrt{\frac{g}{a}} k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$.

Pendolo cicloidale. Un punto pesante P di massa m si muove lungo una cicloide (Cap. V, § 2) generata da un circolo di raggio a che rotola in un piano verticale sopra una orizzontale mantenendovisi al di sotto; preso a orizzontale e z verticale per uno dei punti più bassi della cicloide, è $ds = \sqrt{2a : z} dz$ onde la (4) integrata diviene $t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{zh - z^2}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{2z - h}{h} - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{2z_0 - h}{h} \right\}$. Se il punto parte senza velocità iniziale da $z_0 (= h)$ il tempo impiegato ad arrivare al punto O più basso è $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ cioè indipendente da z_0 ; il moto è **tautocrono** ed O è il **punto di tautocronismo**. Se si considera la cicloide C' evoluta della data cicloide C (pag. 317) e si immagina un filo lungo $4a$ fissato ad una cuspide di C' che porta all'altro estremo il punto pesante P e inizialmente appoggiato a C' in guisa che P sia in una cuspide di C , abbandonando P al proprio peso, descrive la C con la legge di moto indicata.

Moto di un punto su una linea sollecitato da una forza che deriva da un potenziale, vedi Cap. LXIV § 9.

4. — Equaz. del moto di un punto su una superficie

$$f(x, y, z) = 0 \text{ sono (6) } m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Moto di un punto sopra una superficie non soggetto a forze. Se $X = Y = Z = 0$, moltiplicando le (6) ordinatamente per $2 \frac{dx}{dt}, 2 \frac{dy}{dt}, 2 \frac{dz}{dt}$, sommando ed integrando si ha $mv^2 = \text{costante}$, cioè $v = h$ (costante). Ne segue che l'acceleraz. è tutta normale (pag. 420) onde $\frac{d^2 x}{dt^2} : \frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} : \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} : \frac{d^2 z}{ds^2}$ e per le (6) $\frac{d^2 x}{ds^2} : \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d^2 y}{ds^2} : \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d^2 z}{ds^2} : \frac{\partial f}{\partial z}$ che sono le equaz. delle geodetiche della superficie $f(x, y, z) = 0$ (pag. 342); si conclude che il moto avviene lungo la geodetica determinata dalla posizione iniziale e dalla direzione della velocità iniziale.

Pendolo sferico. Un punto pesante P deve muoversi su una sfera di raggio a : le (6), posto l'asse z nella direzione e nel senso della gravità, sono $\frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda \frac{x}{a}; \frac{d^2 y}{dt^2} = \lambda \frac{y}{a}; \frac{d^2 z}{dt^2} = \lambda \frac{z}{a} + g$. Moltiplicandole ordinatam. per $2 \frac{dx}{dt}, 2 \frac{dy}{dt}, 2 \frac{dz}{dt}$ integrando e sommando si ha (7) $v^2 = 2gz + h$ (h costante) (integrale della forza viva); dalle prime due si ritrae $x \frac{dy}{dx} - y \frac{dx}{dy} = c$ od in coord. polari (8) $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c$. La velocità areolare nel moto proiettato sul piano xy è costante (integrale delle aree). Assumendo un sistema di coordinate cilindriche (pag. 16) la (7) diviene (7') $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2gz + h$: eliminando r fra la (7') la (8) e l'equaz. della sfera $r^2 + z^2 = a^2$ si trae $dt = a dz : \pm \sqrt{F(z)}$; $d\vartheta = dz : \pm (a^2 - z^2) \sqrt{F(z)}$ ove

$F(z) = (a^2 - z^2) (2gz + h) - c^2$; gli integrali a cui si perviene sono ellittici (pag. 248). Gli intervalli di tempo in cui al radicale si deve premettere il segno $+$ o $-$ sono separati dagli istanti in cui $F(z) = 0$.

Se z_0 è l'altezza iniziale, le radici di $F(z)$ sono reali, una α compresa fra a e z_0 , un'altra β per z_0 e $-a$, la terza $< -a$. P non può oltrepassare i due paralleli $z = a$, $z = \beta$ dei quali uno almeno è dalla banda di z positivo; se $a > 0$, $\beta > 0$, P oscilla fra i due paralleli che tocca successivamente. Se uno dei paralleli è dalla banda negativa di z ed il vincolo permette il distacco di P dalla sfera verso il centro, questo avviene se nel moto ascendente $gz + v^2$ diventa negativo prima di raggiungere il parallelo.

Moto su una superficie di rotazione di un punto pesante o di un punto sollecitato da una forza incidente o || all'asse di rotazione, dipendente da un potenziale, (vedi Cap. LXIV, § 9).

5. — **Forza viva od energia cinetica di un sistema di n punti** P_s di masse m_s in movimento, è $T = \frac{1}{2} \sum_1^n m_s v_s^2$ indicando con v_s la velocità di P_s . Se x_s, y_s, z_s sono le coordinate cartesiane di P_s e con l'accento si indica la derivazione rapporto al tempo, è $T = \frac{1}{2} \sum m_s (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 + \dot{z}_s^2)$.

Se il dato sistema di n punti è soggetto a k vincoli $L_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) siano $q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}$ dei parametri atti a definire ogni configurazione del sistema compatibile coi vincoli (**coordinate lagrangiane del sistema**, cfr. Cap. LIX, § 4, c), in guisa che le coordinate cartesiane x_s, y_s, z_s siano legate alle coordinate lagrangiane dalle relazioni (9) $x_s = x_s(q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}, t)$, $y_s = y_s(q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}, t)$, $z_s = z_s(q_1, \dots, q_{3n-k}, t)$ (le quali soddisfano identicamente le equaz. $L_i = 0$ dei vincoli). In queste ipotesi (10) $T = \frac{1}{2} \sum_s \left[m_s \left\{ \left(\frac{\partial x_s}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_s}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial t} \right)^2 \right\} \right] + \sum_s \left[m_s \sum_r \left(\frac{\partial x_s}{\partial t} \frac{\partial x_s}{\partial q_r} + \frac{\partial y_s}{\partial t} \frac{\partial y_s}{\partial q_r} + \right. \right.$

$$+ \frac{\partial z_s}{\partial t} \frac{\partial z_s}{\partial q_r} \Big) q_r' \Big] + \frac{1}{2} \sum_s \left[m_s \left\{ \left(\sum_r \frac{\partial x_s}{\partial q_r} q_r' \right)^2 + \left(\sum_r \frac{\partial y_s}{\partial q_r} q_r' \right)^2 + \left(\sum_r \frac{\partial z_s}{\partial q_r} q_r' \right)^2 \right\} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n; r = 1, \dots, 3n - k) \text{ e ove } q_r' \text{ in-}$$

dica la derivata di q_r rapporto al tempo. Essa è della forma

$$T = \frac{1}{2} a_0 + (a_1 q_1' + a_2 q_2' + \dots + a_{3n-k} q_{3n-k}') + \frac{1}{2} (P_{11} q_1'^2 + P_{22} q_2'^2 + \dots + P_{3n-k, 3n-k} q_{3n-k}'^2 + 2 P_{12} q_1' q_2' + \dots + 2 P_{1,3} q_1' q_3' + 2 P_{2,3} q_2' q_3' + \dots + 2 P_{3n-k-1, 3n-k} q_{3n-k-1}' q_{3n-k}') \text{ ove } a_0, a_1, \dots, P_{11}, \dots, P_{12}, \dots \text{ dipendono solo dalla distribuzione delle masse e dalle coordinate } q_r.$$

Se con p_r si indica la derivata parziale di T rapporto a q_r' , sarà (11) $p_r = a_r + \sum_{i=1}^{3n-k} P_{ri} q_i'$ ($r = 1, \dots, 3n - k$) cioè le

$p_r = \frac{\partial T}{\partial q_r'}$, sono funzioni lineari nelle q_i' . Dal sistema (11) si possono anche ricavare le q_i' in funzione lineare delle p_r .

Componenti generali della velocità si dicono le derivate q_r' delle coordinate del sistema rapporto al tempo.

Componenti dell'impulso del sistema diconsi le p_r : onde gli ultimi risultati possono enunciarsi dicendo che in un sistema olonomo le componenti dell'impulso sono funzioni lineari delle componenti generali delle velocità e viceversa che le componenti generali delle velocità sono funzioni lineari delle componenti dell'impulso.

Se i vincoli non dipendono dal tempo la (10) si riduce a

$$(10') \quad T = \frac{1}{2} \sum_s \left[m_s \left\{ \left(\sum_r \frac{\partial x_s}{\partial q_r} q_r' \right)^2 + \left(\sum_r \frac{\partial y_s}{\partial q_r} q_r' \right)^2 + \left(\sum_r \frac{\partial z_s}{\partial q_r} q_r' \right)^2 \right\} \right]$$

funzione quadratica omogenea nelle q_r' .

Teor. di Koenigs. I punti P_s di un sistema si riferiscano ad una terna di assi fissi $O(x, y, z)$ e ad una terna di assi mobili $O_1(x_1, y_1, z_1)$ pel baricentro del sistema che si mantengono ||

ai fissi. L'energia cinetica del sistema è $T = \frac{1}{2} \sum m_s \left\{ \left(\frac{d P_s}{d t} \right)_1 + \frac{d O_1}{d t} \right\}^2 = \frac{1}{2} \sum m_s \left(\frac{d P_s}{d t} \right)_1^2 + \left(\frac{d O_1}{d t} \right)^2 \sum m_s$, giacchè $\frac{d O_1}{d t} \times$

$\times \Sigma m_s \left(\frac{d P_s}{d t} \right)_1 = 0$, essendo $\Sigma m_s \left(\frac{d P_s}{d t} \right)_4 = \left[\frac{d}{d t} \Sigma m_s (P_s - O_1) \right]_1$ e $\Sigma m_s (P_s - O_1) = 0$ perchè O_1 è il baricentro del sistema. La formula trovata esprime che la energia cinetica di un sistema è la somma dell'energia cinetica del sistema nel moto rispetto al baricentro con l'energia cinetica di tutta la massa concentrata nel baricentro. Se il moto è di sola traslazione l'energia cinetica si riduce a quest'ultima.

6. — **Equazioni di Lagrange nella 2ª forma.** Supponiamo che n punti P_s , di masse m_s , siano soggetti al k vincoli, le loro coordinate sono esprimibili mediante $3n - k$ coordinate lagrangiane dalle equaz. (9) del § precedente, e siano soggetti a forze F_s di proiezioni X_s, Y_s, Z_s sugli assi. Moltiplicando le (1') ordinatamente per $\frac{\partial x_s}{\partial q_r}, \frac{\partial y_s}{\partial q_r}, \frac{\partial z_s}{\partial q_r}$ e sommando le $3n$ equaz. si ha

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \left[\frac{d^2 x_s}{d t^2} \frac{\partial x_s}{\partial q_r} + \frac{d^2 y_s}{d t^2} \frac{\partial y_s}{\partial q_r} + \frac{d^2 z_s}{d t^2} \frac{\partial z_s}{\partial q_r} \right] &= \sum_{s=1}^n \left[X_s \frac{\partial x_s}{\partial q_r} + \right. \\ &+ Y_s \frac{\partial y_s}{\partial q_r} + Z_s \frac{\partial z_s}{\partial q_r} \left. \right] + \sum_{i=1}^k \left\{ \lambda_i \sum_{s=1}^n \left[\frac{\partial L_i}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial q_r} + \frac{\partial L_i}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial q_r} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\partial L_i}{\partial z_s} \frac{\partial z_s}{\partial q_r} \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Ora si dimostra che il 1° membro equaglia $\frac{d}{d t} \left(\frac{\partial T}{\partial q_r'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r}$, indicando come sopra con T la forza viva del sistema

e con q_r' la derivata rapporto al tempo di q_r ; $\sum_{s=1}^n \left[X_s \frac{\partial x_s}{\partial q_r} + Y_s \frac{\partial y_s}{\partial q_r} + Z_s \frac{\partial z_s}{\partial q_r} \right]$ è il coefficiente di δq_r nella espressione

del lavoro virtuale delle forze applicate F_s e come altrove (pag. 453) lo indicheremo con Q_r ; l'ultimo termine è nullo, perchè le (9) soddisfano identicamente le equazioni dei vincoli $L_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots k$). Lo stesso potendosi ripetere per ognuno dei $3n - k$ parametri, si hanno le $3n - k$ equazioni (12)

$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r$ ($r = 1, 2, \dots, 3n - k$) che diconsi **equaz. di Lagrange nella 2^a forma**. Sono in numero uguale al grado di libertà del sistema e valgono pei sistemi olonomi; per la loro formazione occorre la conoscenza della T in funzione delle q_r e q_r' e quella del lavoro virtuale delle forze sollecitanti. Le Q_r si dicono le componenti generali della forza secondo le coordinate q_r .

Esempi. Pel **pendolo semplice** (pag. 487) si ha $y = a \cos \varphi$, $x = a \sin \varphi$; $T = \frac{1}{2} m a^2 \varphi'^2$; $\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = m a^2 \varphi'$; $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = m a^2 \varphi''$; $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, $Q_\varphi = -m g a \sin \varphi$, donde l'equaz. $\varphi'' = -\frac{g}{a} \sin \varphi$, già trovata.

Pel **pendolo sferico** (pag. 489) detta φ la longitudine, ϑ la colatitudine, si ha $x = a \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = a \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = a \cos \vartheta$; $T = \frac{1}{2} m a^2 (\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta)$; $\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = m a^2 \varphi' \sin^2 \vartheta$; $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = m a^2 \vartheta'$; $\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = m a^2 \varphi'^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$; il lavoro virtuale del peso è $-m g a \sin \vartheta \delta \vartheta$, onde le 2 equazioni: $\vartheta'' - \varphi'^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = -\frac{g}{a} \sin \vartheta$, $\frac{d}{dt} (\varphi' \sin^2 \vartheta) = 0$.

Caso in cui le forze dipendono da un potenziale, vedi Cap. LXIV, § 6.

7. — Equaz. di Hamilton. Se nell'espressione dell'energia cinetica T sostituiamo a q_r' le loro espressioni in funzione delle $p_r = \left(\frac{\partial T}{\partial q_r'} \right)$ che si ricavano dal sistema (11) del § 5, le equaz. (12) prendono la forma $\frac{d p_r}{d t} = Q_r + \frac{\partial T}{\partial q_r}$ ($r = 1, 2, \dots, 3n - k$) ed allora le $2(3n - k)$ equaz. (13) $p_r = \frac{\partial T}{\partial q_r'}$, $\frac{d p_r}{d t} = Q_r + \frac{\partial T}{\partial q_r}$ ($r = 1, 2, \dots, 3n - k$) costituiscono un sistema di $2(3n - k)$ equaz. del 1° ordine fra le p_r e q_r equivalenti al sistema (12). Si introduca la funzione $\Theta = \sum_r p_r q_r' - T$, che è quadratica

nelle p_r e nelle q_r' a seconda che q_r' e T si esprimono per le p_r o le p_r e T si esprimono per le q_r' . Dando alle p_r e q_r accrescimenti arbitrari δp_r e δq_r (essendo invariabile t) si ha

$$\delta \Theta = \sum_r \left[p_r \delta q_r' + q_r' \delta p_r - \frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r - \frac{\partial T}{\partial q_r'} \delta q_r' \right] =$$

$$= \sum \left(q_r' \delta p_r - \frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r \right), \text{ ricordando la definizione delle } p_r \text{ (§ 6).}$$

Allora è $\frac{\partial \Theta}{\partial p_r} = q_r'$, $\frac{\partial \Theta}{\partial q_r} = -\frac{\partial T}{\partial q_r}$ onde al sistema (12) cioè al

(13) si può sostituire il sistema delle $2(3n - k)$ equazione (14)

$$\frac{d q_r}{d t} = \frac{\partial \Theta}{\partial p_r}, \frac{d p_r}{d t} = Q_r - \frac{\partial \Theta}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \dots, 3n - k) \text{ che sono dette}$$

le **equaz. di Hamilton**. Esse sono in numero doppio del grado di libertà del sistema olonomo dato, ma sono di primo ordine nelle q_r e p_r .

Caso in cui i vincoli non dipendono dal tempo. Se i vincoli sono indipendenti dal tempo la (10') mostra che la energia cinetica T è una funzione quadratica omogenea nelle q_r' onde (teor. di Eulero, pag. 237) $2T = \sum_r \frac{\partial T}{\partial q_r'} q_r' = \sum_r p_r q_r'$. In questo

$$\text{caso } \Theta = T \text{ e le (14) divengono } \frac{d q_r}{d t} = \frac{\partial T}{\partial p_r}, \frac{d p_r}{d t} = Q_r - \frac{\partial T}{\partial q_r}.$$

Pel **pendolo sferico**, detta q_1 la longitudine, q_2 la colatitudine, si ha $p_1 = m a^2 q_1'$, $p_2 = m a^2 q_2' \sin^2 q_1$, $2T = \frac{1}{m a^2} \left(p_1'^2 + \frac{p_2'^2}{\sin^2 q_1} \right)$ onde le 4 equazioni di Hamilton sono

$$q_1' = \frac{p_1}{m a^2}, q_2' = \frac{p_2}{m a^2 \sin^2 q_1}, p_1' = -m g a \sin q_1 + \frac{p_2 \cos q_1}{m a^2 \sin^2 q_1}, p_2' = 0.$$

Caso che le forze dipendano da un potenziale, vedi Capitolo LXIV, § 6).

8. — **Percosse sopra un sistema di punti.** Al § 3 del Cap. LXI è stata data la definizione di forza di percossa. Siano $\mathcal{P}_i$ delle forze di intensità grandissima agenti sui punti P_s del

sistema per un intervallo piccolissimo di tempo $t_0 \mapsto t_0 + \varepsilon$ in guisa che i loro impulsi $\Phi_s = \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \psi_s dt$ siano vettori di modulo finito. Durante l'intervallo $t_0 \mapsto t_0 + \varepsilon$ sono trascurabili, all'effetto di determinare la velocità acquisita dai punti del sistema, supposte note le velocità all'istante in cui la percossa agisce, le forze finite agenti sul sistema. Se integriamo fra t_0 e $t_0 + \varepsilon$ l'equaz. fondamentale della Dinamica (§ 1)

$$\sum_{s=1}^n \left(\psi_s - m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2} \right) \times \delta P_s \geq 0 \text{ che sussiste nell'intervallo}$$

detto, si ha, supponendo gli spostamenti virtuali δP_s indipendenti dal tempo, $\sum_s \left[\int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \left(\psi_s - m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2} \right) dt \right] \times \delta P_s \geq 0$

$$\text{cioè } \sum_s \left[\Phi_s + m_s \left(\frac{d P_s}{dt} \right)_{t_0} - m_s \left(\frac{d P_s}{dt} \right)_{t_0 + \varepsilon} \right] \times \delta P_s \geq 0, \text{ equaz.}$$

che esprime che v'ha equilibrio, in virtù dei vincoli, fra Φ_s , la quantità di moto prima della percossa e la quantità di moto dopo la percossa cambiata di segno.

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (pag. 451), supposte $L_i(x_1, y_1, z_1, \dots) = 0$, ($i = 1, 2, \dots, k$) le equaz. dei vincoli, e denotate con X_s, Y_s, Z_s le proiezioni di Φ_s si

$$\text{hanno le } 3n \text{ equaz. (15) } m_s \left[\left(\frac{d x_s}{dt} \right)_{t_0} - \left(\frac{d x_s}{dt} \right)_{t_0 + \varepsilon} \right] = X_s +$$

$$+ \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial L_i}{\partial x_s}, m_s \left[\left(\frac{d y_s}{dt} \right)_{t_0} - \left(\frac{d y_s}{dt} \right)_{t_0 + \varepsilon} \right] = Y_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial L_i}{\partial y_s},$$

$$m_s \left[\left(\frac{d z_s}{dt} \right)_{t_0} - \left(\frac{d z_s}{dt} \right)_{t_0 + \varepsilon} \right] = Z_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial L_i}{\partial z_s} \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{dalle quali e dalle } L_i = 0 \text{ si possono ricavare le } \left(\frac{d x_s}{dt} \right)_{t_0 + \varepsilon},$$

$$\left(\frac{d y_s}{dt} \right)_{t_0 + \varepsilon}, \left(\frac{d z_s}{dt} \right)_{t_0 + \varepsilon} \text{ cioè le velocità dei punti dopo la percossa,}$$

supposte note quelle all'istante in cui avviene la percossa.

Se $q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}$ sono le coordinate del sistema mediante le quali le coordin. cartesiane sono espresse per le (9)

del § 5, le equaz. si riducono alle $3n - k$ seguenti (16)

$\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right)_{t_0+\varepsilon} - \left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right)_{t_0} = Q_r \quad (r=1, 2, \dots, 3n - k)$ ove T è l'energia cinetica e $Q_r = \sum \left(X_s \frac{\partial x_s}{\partial q_r} + Y_s \frac{\partial y_s}{\partial q_r} + Z_s \frac{\partial z_s}{\partial q_r} \right)$ il coeffic. di δq_r nell'espressione del lavoro delle Φ_s .

CAPITOLO LXIV.

Teoremi generali sul moto di un sistema e loro applicazioni

1. — **Lavoro effettivo elementare** di un sistema di forze F_s agenti su un sistema di n punti P_s è $\sum_{s=1}^n F_s \times dP_s$ lo spostamento effettivo di P_s nell'intervallo di tempo dt .

Lavoro totale delle stesse forze nel passaggio da una configurazione A_1 del sistema ad una configurazione A_2 è $\mathfrak{L}_{A_1 A_2} = \int_{A_1}^{A_2} \sum_{s=1}^n F_s \times dP_s = \int_{A_1}^{A_2} \sum_{s=1}^n (X_s dx_s + Y_s dy_s + Z_s dz_s)$, se X_s, Y_s, Z_s sono le proiezioni di F_s , dx_s, dy_s, dz_s quelle di dP_s sugli assi cartesiani. Se il sistema ha $3n - k$ gradi di libertà, e le coordinate x_s, y_s, z_s sono legate da $3n$ equaz. alle $3n - k$ coordinate (lagrangiane) $q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}$ del sistema (le (9) della pag. 490, soddisfacenti identicamente le k equazioni dei vincoli), espresse le X_s, Y_s, Z_s per le q_r (ed eventualmente per le q_r' se le F_s dipendono dalle velocità dei punti del sistema), sostituiti i dx_s, dy_s, dz_s con i differenziali delle (9)

stesse, sarà $\Sigma (X_s dx_s + Y_s dy_s + Z_s dz_s) = \Sigma_r Q_r dq_r$, posto, come alla pag. 453, $Q_r = \sum_{s=1}^n \left(X_s \frac{\partial x_s}{\partial q_r} + Y_s \frac{\partial y_s}{\partial q_r} + Z_s \frac{\partial z_s}{\partial q_r} \right)$ ed allora l'espressione del lavoro totale è $\mathfrak{L}_{A_1 A_2} = \int_{A_1}^{A_2} \Sigma Q_r dq_r$.

Per la valutazione del lavoro occorre, in generale, la conoscenza del moto (cfr. pag. 464); ma se il lavoro elementare è il differenziale di una funzione U delle variabili che individuano la posizione del sistema, allora è $\mathfrak{L}_{A_1 A_2} = U(A_2) - U(A_1)$, cioè la differenza fra il valore che U assume nella configurazione A_2 d'arrivo e quello che assume nella configurazione A_1 di partenza. Il lavoro non dipende dalle posizioni intermedie occupate dal sistema, ed è nullo se la posizione terminale coincide colla iniziale.

Funzione potenziale dicesi la funzione U ; se U è funzione delle coordinate cartesiane $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ è $X_s = \frac{\partial U}{\partial x_s}$, $Y_s = \frac{\partial U}{\partial y_s}$, $Z_s = \frac{\partial U}{\partial z_s}$ ($s = 1, 2, \dots, n$); se U è funzione delle coordinate lagrangiane del sistema $q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}$ (supposti k i vincoli) è $Q_r = \frac{\partial U}{\partial q_r}$ ($r = 1, 2, \dots, 3n-k$). Si dice che le forze dipendono da un potenziale; ed il sistema di forze dicesi **conservativo**.

Energia potenziale (o di posizione) dicesi la funzione — U . Il lavoro eguaglia il decremento dell'energia potenziale.

2. — **Esempi di sistemi conservativi.** a) Se un sistema di punti P_s è soggetto alla sola azione del peso, esiste la funzione potenziale — $g \Sigma m_s z_s$, posto l'asse z secondo la verticale e volta in alto.

b) Se ogni punto P_s di un sistema è sollecitato da una forza F_s dipendente da un potenziale $U_s(x_s, y_s, z_s)$ (pag. 465) esiste pel sistema di forze il potenziale $\sum_s U_s(x_s, y_s, z_s)$.

c) Due punti P_1, P_2 di masse m_1, m_2 siano attratti o respinti da una forza che ha per linea d'azione la congiungente

i due punti, è proporzionale alle masse ed è funzione della sola distanza r dei due punti, $m_1 m_2 \varphi(r)$, ove riterremo $\varphi(r) > 0$ se i 2 punti si respingono e $\varphi(r) < 0$ se si attraggono. Se $\mathbf{I}$ è un vettore $\parallel$ alla retta $P_1 P_2$, nel senso da P_1 a P_2 la forza che si esercita su P_1 è $\mathbf{F}_{12} = -m_1 m_2 \varphi(r) \mathbf{I}$, quella su P_2 è $\mathbf{F}_{21} = m_1 m_2 \varphi(r) \mathbf{I}$ onde il lavoro elementare $\mathbf{F}_{12} \times dP_1 + \mathbf{F}_{21} \times dP_2 = m_1 m_2 \varphi(r) \mathbf{I} \times d(P_2 - P_1) = m_1 m_2 \varphi(r) dr$ essendo $P_2 - P_1 = r \mathbf{I}$; epperò esiste la funzione potenziale $U(r) = m_1 m_2 \int \varphi(r) dr$.

d) Dati n punti $P_1, P_2, \dots, P_n$ che si attraggono a due a due colla legge precedente la risultante $\mathbf{F}_i$ delle forze agenti sul punto P_i è $\mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \dots + \mathbf{F}_{i,i-1} + \mathbf{F}_{i,i+1} + \dots + \mathbf{F}_{in}$, onde ammette la funzione potenziale $\sum m_i m_j \int \varphi(r_{ij}) dr_{ij}$ la somma estesa a $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$; il sistema di forze ammette la funzione potenziale $\frac{1}{2} \sum_{i,j} m_i m_j \int \varphi(r_{ij}) dr_{ij}$ la somma estesa a tutte le coppie disuguali di numeri i, j fra 1 ed n .

3. — **Differenziale dell'energia cinetica di un sistema olonomo.** Differenziando l'energia cinetica $T = \frac{1}{2} \sum_s m_s (x_s'^2 + y_s'^2 + z_s'^2)$ di un sistema di n punti P_s soggetti a forze $\mathbf{F}_s$ e a k vincoli $L_i(x_1, y_1, z_1, \dots, t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) si ha $dT = \sum_s m_s (x_s' x_s'' + y_s' y_s'' + z_s' z_s'') dt$ e per le equaz. del moto (formule (1') della pag. 485) $dT = \sum_s (x_s' X_s + y_s' Y_s + z_s' Z_s) dt + \sum_s \left[\sum_i \lambda_i \left\{ \frac{\partial L_i}{\partial x_s} x_s' + \frac{\partial L_i}{\partial y_s} y_s' + \frac{\partial L_i}{\partial z_s} z_s' \right\} \right] dt$. Ma differenziando le equaz. dei vincoli si ha $\sum_s \left(\frac{\partial L_i}{\partial x_s} x_s' + \frac{\partial L_i}{\partial y_s} y_s' + \frac{\partial L_i}{\partial z_s} z_s' \right) dt = - \frac{\partial L_i}{\partial t} dt$ onde $dT = \sum_s (X_s dx_s + Y_s dy_s + Z_s dz_s) - \sum_i \frac{\partial L_i}{\partial t} dt$. Se i vincoli sono indipendenti dal tempo, l'ultima somma è nulla, onde $dT = d\mathfrak{L}$, indicando con $d\mathfrak{L}$ il lavoro elementare delle forze.

Se la T è espressa mediante le coordinate lagrangiane q_r del sistema e loro derivate q_r' rapporto al tempo, si giunge allo stesso risultato. È $d T = \sum_r \left(\frac{\partial T}{\partial q_r} d q_r + \frac{\partial T}{\partial q_r'} d q_r' \right) + \frac{\partial T}{\partial t} d t$, ma, indicando con T_2 la parte quadratica omogenea in q_r' di T (pag. 491), T_1 la parte lineare, T_0 la parte indipendente da q_r' ,

$\sum \frac{\partial T}{\partial q_r'} q_r' = 2 T_2 + T_1$ e differenziando $\sum d \left(\frac{\partial T}{\partial q_r'} \right) q_r' +$
 $+ \sum \frac{\partial T}{\partial q_r'} d q_r' = 2 d T_2 + d T_1 = 2 d T - d T_1 - 2 d T_0$. Dall'equaz. del moto (formule (12) della pag. 493) si ricava moltiplican-

dole per q_r' e sommandole $\sum_r \frac{\partial T}{\partial q_r} d q_r = \sum d \left(\frac{\partial T}{\partial q_r} \right) q_r' - \sum Q_r d q_r$,

perciò $d T = \sum Q_r d q_r + 2 d T_0 + d T_1 - \frac{\partial T}{\partial t} d t$; se i vincoli sono

indipendenti dal tempo $T_0 = T_1 = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ epperò $d T = \sum Q_r d q_r = d \mathfrak{L}$.

4. — **Principio della conservazione dell'energia.** Se le forze agenti sul sistema dipendono da un potenziale, è $d \mathfrak{L} = d U$ (pag. 497) onde sarà pure $d T = d U$: nel passaggio da una configurazione A_0 ad una generica A è $T - T_0 = U - U_0$ od anche $T - U = T_0 - U_0$, equaz. che esprime che la somma delle energie cinetica e potenziale è costante. Durante il moto l'una energia si trasforma nell'altra.

L'equaz. (1) $T - U = h$ (h costante uguale al valore di $T - U$ all'istante iniziale) è un integrale primo delle equaz. differenziali del moto.

Se il sistema dipende da un unico parametro q esso è integrabile mediante quadratura; invero la T sarà della forma $\varphi(q) q'^2$ ed allora la (1) dà $q' = \pm \sqrt{(h + U(q)) : \varphi(q)}$.

In particolare si applica nello studio del moto di un sistema che ruota intorno ad un asse fisso nel caso che le forze dipendano da un potenziale (ad es. un corpo soggetto al solo peso).

5. — **Stabilità dell'equilibrio.** Si dice che una posizione d'equilibrio è stabile, quando prefissati due numeri positivi ε piccolo ad arbitrio ed η finito, esistono due altri numeri positivi ε' ed η' tali che se si rimuovono i punti dalla posizione d'equilibrio in modo che le variazioni, in valore assoluto, delle coordinate siano $< \varepsilon'$ e le velocità date ai punti siano vettori di modulo $< \eta'$, il moto assunto dal sistema fa assumere variazioni alle coordinate che rimangono, in valore assoluto, minori di ε e velocità di modulo $< \eta$. Quando ciò non avvenga la posizione di equilibrio si dice instabile.

Teor. di Dirichlet. Al Cap. LIX, § 4, c) si è visto che espresso il lavoro virtuale mediante le $3n - k$ coordinate lagrangiane del sistema, dev'essere per l'equilibrio $Q_r = 0$, o se le forze dipendono da un potenziale, dovrà essere $\frac{\partial U}{\partial q_r} = 0$ ($r = 1, \dots, 3n - k$). Dove la U ha un massimo ed un minimo, ivi annullandosi le $\frac{\partial U}{\partial q_r}$ (pag. 282), si avrà una posizione d'equilibrio; di più sussiste il teor. di Dirichlet: le posizioni in cui l'energia potenziale raggiunge un minimo sono le posizioni di equilibrio stabile. E sotto condizioni estesissime vale il **teor. di Liapunof**: le posizioni in cui l'energia potenziale raggiunge un massimo sono posizioni d'equilibrio instabile.

Teor. di Torricelli. Per un sistema di punti pesanti la energia potenziale, posto l'asse z secondo la verticale volta in alto, è $g \sum m_s z_s = g \zeta \sum m_s$ se ζ è la coordinata z del baricentro del sistema; onde (caso particolare del teor. di Dirichlet): un sistema di punti pesanti è in equilibrio stabile nelle posizioni in cui il baricentro assume le posizioni più basse, compatibilmente ai legami.

6. — **Forma delle equaz. di Lagrange e di Hamilton se le forze dipendono da un potenziale.** Le equaz. (12) della pag. 493 nel caso che le forze dipendano da un potenziale diventano $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r}$ ($r = 1, 2, \dots, 3n - k$); ma se po-

niamo $T + U = L$ (L dicesi **funzione di Lagrange**) poichè

$$\frac{\partial L}{\partial q_r'} = \frac{\partial T}{\partial q_r'}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{\partial T}{\partial q_r} + Q_r$$
 le stesse equazioni divengono (2)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_r'} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0.$$

Se Θ è la funzione introdotta alla pag. 493 per stabilire le equaz. di Hamilton, poniamo $H = \Theta - U$; le equaz. (13) (della stessa pagina) di Hamilton diventano $\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}$,
 $\frac{\partial p_r}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial q_r}$ ($r = 1, 2, \dots, 3n - k$). Se i vincoli non dipendono dal tempo $\Theta = T$, onde $H = T - U$.

Se avviene che L sia indipendente da una q_r , allora $\frac{\partial L}{\partial q_r} = 0$, onde da (2) si trae $\frac{\partial L}{\partial q_r'} = c_r$ (costante) che è un integrale primo lineare nelle q_r' .

7. — **Risultante delle quantità di moto.** Le quantità di moto dei punti P_i di massa m_i di un generico sistema, all'istante t cioè $m_i \frac{dP_i}{dt}$ hanno una risultante (3) $\mathbf{Q} = \sum m_i \frac{dP_i}{dt}$ detto anche **impulso** del sistema all'istante t . Se ζ è il baricentro del sistema, poichè è $(G - O) \sum m_i = \sum m_i (P_i - O)$ (pagina 475) essendo O l'origine di una terna di assi fissi di riferimento, derivando rapporto al tempo, si ha (4) $\frac{dG}{dt} \sum m_i = \mathbf{Q}$; cioè la risultante delle quantità di moto del sistema eguaglia la quantità di moto del baricentro se in esse si suppongono concentrate le masse del sistema stesso. Derivando le (3) rispetto al tempo $\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2}$. Se i punti del sistema sono liberi, il 2° membro è la risultante $\mathbf{F}$ delle forze applicate, onde (5) $\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}$; per la (4) si trae (5) $\frac{d^2 G}{dt^2} \sum m_i = \mathbf{F}$, cioè il baricentro si muove come un punto libero di massa uguale alla massa del sistema, soggetto alla risultante delle forze applicate ai vari punti del sistema. Se $\mathbf{F} = 0$, G si muove di moto rettilineo ed uniforme, od è in riposo.

Il sistema di punti sia vincolato, ma sia suscettibile di una traslazione d'insieme (cioè come se fosse rigido) parallela ad un asse l . Allora sono spostamenti virtuali invertibili quelli per cui $\delta P_s = \delta h \mathbf{I}$, essendo δh un segmento infinitesimo arbitrario e $\mathbf{I}$ un vettore unitario parallelo ad l , e l'equaz. del moto $\sum_s \left(\mathbf{F}_s - m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2} \right) \times \delta P_s = 0$ diviene $\delta h \mathbf{I} \times \sum_s \left(\mathbf{F}_s - m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2} \right)$ od anche $\mathbf{I} \times \mathbf{F} = \mathbf{I} \times \frac{d^2 G}{dt^2} \sum m_s$, indicando con $\mathbf{F}$ la risultante delle forze $\mathbf{F}_s$ ed essendo $\sum m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2} = \frac{d^2 G}{dt^2} \sum m_s$; quest'equaz. mostra che la proiezione di G sull'asse l si muove come se G fosse un punto libero di massa $\sum m_s$ e soggetto ad $\mathbf{F}$. Se il sistema è suscettibile di una *qualunque* traslazione di insieme, sarà $\mathbf{F} = \frac{d^2 G}{dt^2} \sum m_s$, cioè (teor. della conservazione del moto del baricentro) il baricentro si muove come un punto libero di massa $\sum m_s$ e soggetto alla risultante delle forze applicate ai punti del sistema. E reciprocamente se il moto del baricentro avviene come sopra è detto, i vincoli permettono al sistema una traslazione parallela ad $\mathbf{I}$ nel primo caso e qualunque nel secondo.

Se $\mathbf{F} = 0$, G si muove di moto uniforme e rettilineo od è in riposo; sussistono cioè i tre integrali $\sum m x = a_1 t + a_2$, $\sum m y = b_1 t + b_2$, $\sum m z = c_1 t + c_2$ ove a_2, b_2, c_2 sono le coordinate iniziali di G , e a_1, b_1, c_1 le proiezioni della velocità iniziale di G sugli assi. Se il sistema potesse subire sole traslazioni d'insieme || all'asse x , vale solo il primo integrale, se traslazioni || al piano xy i primi due.

8. — **Momento risultante delle quantità di moto.** Il momento risultante delle quantità di moto dei punti P_s rispetto ad O (centro di una terna di assi fissi) è $\mathbf{K} = \sum_s (P_s - O) \wedge m_s \frac{d P_s}{dt}$; esso dicesi anche **coppia d'impulso** del sistema; la sua deri-

vata rapporto al tempo è $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \Sigma (P_s - O) \wedge m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2}$. Se i punti del sistema sono liberi, si ha ancora (6) $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \Sigma (P_s - O) \wedge \mathbf{F}_s = M - O$ se è $M - O$ il momento risultante delle forze rispetto ad O ; se $M - O = 0$ è $\mathbf{K}$ un vettore costante.

Sia il sistema vincolato, ma sia suscettibile di una rotazione d'insieme (cioè come se fosse rigido) intorno ad un asse l per O ; sono allora spostamenti virtuali invertibili quelli per cui $\delta P_s = \delta \vartheta \mathbf{I} \wedge (P_s - O)$, essendo $\mathbf{I}$ un vettore unitario $\parallel$ ad l e $\delta \vartheta$ un angolo infinitesimo arbitrario; ne segue che l'equaz. del moto $\Sigma_s \left(\mathbf{F}_s - m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2} \right) \times \delta P_s = 0$ diviene $\delta \vartheta \mathbf{I} \times \Sigma (P_s - O) \wedge \left(\mathbf{F}_s - m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2} \right) = 0$ ossia $\mathbf{I} \times (M - O) = \mathbf{I} \times \Sigma (P_s - O) \wedge m_s \frac{d^2 P_s}{dt^2}$, se $M - O$ è il momento risultante delle $\mathbf{F}_s$ rispetto ad O . E poichè il 2° membro è uguale a $\mathbf{I} \times \frac{d}{dt} \Sigma \left\{ (P_s - O) \wedge m_s \frac{d P_s}{dt} \right\} = \mathbf{I} \times \frac{d\mathbf{K}}{dt}$ si ha (7) $\mathbf{I} \times \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{I} \times (M - O)$ cioè la proiezione su l della derivata rapporto al tempo del momento risultante delle quantità di moto (ossia della coppia d'impulso) eguaglia il momento risultante delle forze rispetto ad l (pag. 402). Se il 2° membro è nullo, è (7') $\mathbf{I} \times \mathbf{K} = \text{cost.}$

Se i vincoli permettono una *qualunque* rotazione intorno ad O , è allora $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = M - O$, cioè la derivata rapporto al tempo del momento risultante delle quantità di moto rispetto ad O è uguale al momento delle forze applicate rispetto pure ad O . E viceversa se sussistono queste due proprietà relative alla coppia d'impulso, i vincoli permettono nel 1° caso una rotazione d'insieme intorno ad l , nel secondo una qualsivoglia rotazione intorno ad O .

Se, in particolare, $M - O = 0$ è $\mathbf{K}$ un vettore costante, onde si hanno i tre integrali primi delle equazioni del moto

$$\Sigma m_s \left(y_s \frac{dz_s}{dt} - z_s \frac{dy_s}{dt} \right) = k_1, \quad \Sigma m_s \left(z_s \frac{dx_s}{dt} - x_s \frac{dz_s}{dt} \right) = k_2,$$

$$\Sigma m_s \left(x_s \frac{dy_s}{dt} - y_s \frac{dx_s}{dt} \right) = k_3. \quad \text{Ricordando che la proiezione}$$

di P_s sul piano yz ha la velocità areolare $\frac{1}{2} \left(y_s \frac{dz_s}{dt} - z_s \frac{dy_s}{dt} \right)$

che si può indicare con $\frac{1}{2} \frac{dS_{s,x}}{dt}$, i tre integrali di $\frac{1}{2}$ d'anziani

$$\text{possono scriversi } \Sigma m_s \frac{dS_{s,x}}{dt} = 2k_1, \quad \Sigma m_s \frac{dS_{s,y}}{dt} = 2k_2,$$

$$\Sigma m \frac{dS_{s,z}}{dt} = 2k_3 \text{ da cui si deducono gli integrali } \Sigma m_s S_{s,x} =$$

$$= 2k_1 t + h_1, \quad \Sigma m_s S_{s,y} = 2k_2 t + h_2, \quad \Sigma m_s S_{s,z} = 2k_3 t + h_3, \text{ che}$$

si dicono gli **integrali delle aree**. Se si proietta il punto P_s sopra un piano qualunque, ad es. su un piano $\perp$ alla direzione di coseni α, β, γ la velocità areolare della proiezione (prendendo

per polo la proiezione di O) è $\frac{dS_s}{dt} = \frac{dS_{s,x}}{dt} \alpha + \frac{dS_{s,y}}{dt} \beta +$

$$+ \frac{dS_{s,z}}{dt} \gamma, \text{ onde } \Sigma m_s \frac{dS_s}{dt} = 2(k_1 \alpha + k_2 \beta + k_3 \gamma) \text{ ove il se-}$$

condo membro è il doppio della proiezione di $\mathbf{K}$ sulla normale al piano considerato; vale cioè il teor. delle aree sopra un piano qualunque; in particolare vale sul piano $\perp$ a $\mathbf{K}$ (**piano invariabile**) relativamente al quale la costante del 2° membro è massima. Se è nullo solamente il momento risultante rispetto all'asse x sussiste solo il primo di questi integrali.

Osserviamo che per un punto libero, se la forza $\mathbf{F}$ è incidente ad un asse, ad es. l'asse z , il momento di $\mathbf{F}$ rispetto a z è nullo, onde vale l'integrale dell'aree $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \text{costante}$; se $\mathbf{F}$ è una forza centrale, mandati pel punto O , pel quale passano le linee d'azione delle forze, 3 assi, valgono oltre l'integ-

grale precedente gli altri due analoghi sopra gli altri due piani coordinati.

Se un punto P si muove sopra una superficie, perchè valga l'integrale (7') è necessario che la superficie sia di rotazione intorno ad un asse l contenente $\mathbf{I}$; se questo è z , sussiste l'integrale $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \text{cost.}$ od in coordinate polari $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \text{cost.}$

9. — Moto di un punto sopra una linea fissa soggetto ad una forza dipendente da un potenziale. Se P , di massa m , si muove sopra una linea $x = x(q)$, $y = y(q)$, $z = z(q)$, ed è sollecitato da una forza dipendente da un potenziale $U(q)$, il principio della conservazione dell'energia dà $m(x'(q)^2 + y'(q)^2 + z'(q)^2) - 2U(q) = h$ (costante). Come caso particolare si ha il moto d'un punto pesante sopra una linea (pag. 486).

Moto di un punto sopra una superficie di rotazione soggetto ad una forza dipendente da un potenziale ed incidente o || all'asse di rotazione. *a)* Sia (8) $z = f(r)$ l'equaz. in coordinate cilindriche (pag. 16) della superficie di rotazione intorno all'asse z ; un punto P , di massa m , si muove sulla superficie, soggetto ad una forza $\mathbf{F}$ incidente all'asse z e dipendente dal potenziale $U(x, y, z)$. Per l'incidenza di $\mathbf{F}$ all'asse z è $y \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial y} = 0$, onde sarà U funzione di z e di $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, cioè $U(r, z)$ (Capitolo L, § 2, c). Il principio della conservazione dell'energia dà $mv^2 - 2U(r, f(r)) = h$ ed esprimendo v^2 mediante le coordinate cilindriche $m \left\{ \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} - 2U(r, f(r)) = h$. Ma sussiste nel piano xy l'integrale delle aree $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c$, onde, osservando anche che $\frac{dz}{dt} = f'(r) \frac{dr}{dt}$, si ha l'equaz. $m \left\{ (1 + f'(r)^2) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{c^2}{r^2} \right\} - 2U(r, f(r)) = h$ che si integra mediante una qua-

dratura. Fatta l'integrazione, la (8) dà z e dall'integrale delle aree con una nuova quadratura si ha ϑ , espressa in funzione del tempo.

b) Se F è || all'asse z e dipende dal potenziale $U(z)$ si ha $m v^2 - 2 U(z) = h$; sussiste ancora l'integrale delle aree; se dall'equaz. della superficie si ricava $r = \varphi(z)$, con che $\frac{dr}{dt} = \varphi'(z) \frac{dz}{dt}$, l'equaz. precedente diviene $m(1 + \varphi'(z)^2) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{c^2}{\varphi(z)^2} - 2 U(z) = h$ che si integra con una quadratura. In particolare ciò vale se P è soggetto al solo peso.

10. — **Azione del sistema.** Un sistema olonomo sia soggetto a vincoli qualunque e le forze ammettano il potenziale U ; integrate le equazioni del moto, si può formare la funzione $V = \int_{t_0}^t (T + U) dt$ che è detta da Hamilton **azione** compiuta dal sistema nel passaggio dalla posizione che corrisponde all'istante t_0 a quella che corrisponde all'istante t . Immaginando che le traiettorie dei punti del sistema varino infinitamente poco coll'attribuire uno spostamento virtuale conciliabile con

i vincoli a ciascun punto, la variazione di V sarà $\delta V = \int_{t_0}^t \sum_r \left\{ \frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial T}{\partial q'_r} \delta q'_r + \frac{\partial U}{\partial q_r} \delta q_r \right\} dt$. Ma (pag. 491) $\frac{\partial T}{\partial q'_r} = p_r$ e (pag. 387)

$\delta q'_r = \frac{d}{dt} \delta q_r$, epperò $\int_{t_0}^t \frac{\partial T}{\partial q'_r} \delta q'_r dt = [p_r \delta q_r]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \frac{dp_r}{dt} \delta q_r dt$ e

quindi (9) $\delta V = [p_r \delta q_r]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{\partial U}{\partial q_r} \right\} \delta q_r dt$ e per

le equaz. di Lagrange (12) della pag. 493, è $\delta V = [p_r \delta q_r]_{t_0}^t$ che esprime che la variazione dell'azione dipende solo dalle posizioni estreme occupate dal sistema (**teor. dell'azione variante**): in particolare se le traiettorie e le variate hanno comuni le posizioni estreme è $\delta V = 0$, cioè l'azione non ha variato (**teor. dell'azione stazionaria**). Viceversa dall'essere nulla la varia-

zione (9), nell'ipotesi ultima, si deduce $\int_{t_0}^t \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{\partial U}{\partial q_r} \right\} \delta q_r dt = 0$ e per essere i δq_r arbitrari $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r}$ ($r = 1, 2, \dots, 3n - k$, se $3n - k$ sono le coord. del sistema), cioè si deducono le equaz. di Lagrange.

Principio della minima azione. Se sussiste il principio della conservazione dell'energia (pag. 499) $T - U = h$, la δV diviene $\delta V = \delta \int_{t_0}^t 2T dt = \delta \sum_i \int_{A_0}^A m_i v_i ds_i = 0$ (A_0 configurazione all'istante t_0 , A all'istante t), cioè le funzioni q_r dal tempo t costituenti gli integrali del moto rendono nulla la variazione prima dell'integrale $\int_{t_0}^t 2T dt = \sum_i \int_{A_0}^A m_i v_i ds_i$ e, in generale (pag. 388) minimo l'integrale stesso.

CAPITOLO LXV.

Dinamica dei sistemi rigidi

1. — **Energia cinetica di un sistema rigido in movimento.** Se O_1 è l'origine di una terna di assi connessa al sistema rigido mobile, ω la rotazione istantanea della terna, T l'energia cinetica del sistema, è (pag. 496) $2T = \sum_s m_s \left(\frac{dO_1}{dt} + \omega \wedge (P_s - O_1) \right) \times \left(\frac{dO_1}{dt} + \omega \wedge (P_s - O_1) \right) = \left(\frac{dO_1}{dt} \right)^2 \sum m_s + \omega^2 I_\omega + 2 \frac{dO_1}{dt} \wedge \omega \times (G - O_1) \sum m_s$ ove I_ω è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di ω , G il baricentro. Se gli

assi collegati al sistema rigido passano per G , si ha $2 T = \left(\frac{d G}{d t}\right) 2 \Sigma m + \omega^2 I_{\omega} = (u^2 + v^2 + w^2) \Sigma m + A p^2 + B q^2 + C r^2 - 2 A' q r - 2 B' r p - 2 C' p q$, se u, v, w sono le proiezioni sugli assi mobili delle velocità del baricentro, p, q, r quelle di ω ; A, B, C, A', B', C' i momenti d'inerzia definiti alla pag. 480; se per assi collegati al corpo si prendono gli assi centrali (Cap. LXII, § 6) $2 T = (u^2 + v^2 + w^2) \Sigma m + A p^2 + B q^2 + C r^2$. Se il corpo ha un punto fisso, preso questo per O_1 , $2 T = \omega^2 I_{\omega} = A p^2 + B q^2 + C r^2 - 2 A' q r - 2 B' r p - 2 C' p q$ e se gli assi collegati al corpo sono gli assi principali d'inerzia relativi ad O_1 , $2 T = A p^2 + B q^2 + C r^2$; se ha un asse fisso, ω è su di esso, e $2 T = \omega^2 I_{\omega}$.

Impulso (o quantità di moto) del sistema rigido: $\Sigma m_s P_s = \Sigma m_s \left(\frac{d O_1}{d t} + \omega \wedge (P_s - O_1) \right) = \left\{ \frac{d O_1}{d t} + \omega \wedge (G - O_1) \right\} \Sigma m = \frac{d G}{d t} \Sigma m$ (G baricentro) cioè uguale a quello del baricentro in cui sia condensata la massa totale. Le proiezioni sugli assi sono $U = \frac{\partial T}{\partial u}$, $V = \frac{\partial T}{\partial v}$, $W = \frac{\partial T}{\partial w}$.

Coppia d'impulso (o momento risultante dalla quantità di moto) del sistema: $\sum_s m_s (P_s - O_1) \wedge P_s' = \sum_s m_s (P_s - O_1) \wedge \left\{ \frac{d O_1}{d t} + \omega \wedge (P_s - O_1) \right\} = \left\{ (G - O_1) \wedge \frac{d O_1}{d t} \right\} \Sigma m_s + \sum_s m_s (P_s - O_1) \wedge \{ \omega \wedge (P_s - O_1) \}$; il 1° membro è la coppia d'impulso della massa totale concentrata nell'origine. Se si prende $O_1 \equiv G$ (baricentro), la coppia d'impulso diviene $\sum_s m_s (P_s - G) \wedge \{ \omega \wedge (P_s - G) \}$ e le proiezioni sugli assi collegati al corpo sono $P = \frac{\partial T}{\partial p} = A p - C' q - B' r$, $Q = \frac{\partial T}{\partial q} = B q - A' r - C' p$, $R = \frac{\partial T}{\partial r} = C' r - B' p - A' q$. Pel teor. d'Eulero (pa-

gina 237) $2 T = u U + \dots + p P + \dots + r R$, e se O_1 è un punto fisso $2 T = p P + q Q + r R =$ al prodotto scalare della coppia d'impulso per la rotazione istantanea. È poi sempre $u = \frac{\partial T}{\partial U}, v = \frac{\partial T}{\partial V}, w = \frac{\partial T}{\partial W}, p = \frac{\partial T}{\partial P}, q = \frac{\partial T}{\partial Q}, r = \frac{\partial T}{\partial R}$.

Chiamando U, V, W, P, Q, R le coordin. dell'impulso e u, v, w, p, q, r le coordinate del moto istantaneo si trova dunque che le derivate parziali della forza viva rispetto alle coordin. del moto istantaneo sono le coordin. dell'impulso e le derivate parziali rispetto alle coordin. dell'impulso sono le coordin. del moto istantaneo. Le proiezioni della coppia d'impulso sugli assi connessi al corpo si riducono ad Ap, Bq, Cr se detti assi sono i centrali o, avendo il corpo un punto fisso O_1 , gli assi sono i principali d'inerzia per O_1 .

2. — Moto di un corpo rigido intorno ad un asse fisso.

Assumiamo l'asse fisso per asse x ; il sistema ha un grado di libertà; per coordin. lagrangiana si prenda l'angolo φ che un piano π per x connesso al corpo fa col piano xy . Detto I il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso, è $2 T = I \varphi'^2$ (§ 1); se si tien conto che sono spostamenti invertibili i soli spostamenti di rotazione intorno ad x , il lavoro virtuale delle forze è $Q_\varphi \delta \varphi$ ove Q_φ è il momento delle forze rispetto ad x (pag. 449) ($= \Sigma (y Z - z Y)$) il quale sarà, in generale, funzione di φ, φ', t ; l'equaz. (di Lagrange della 2^a forma) del moto è (1) $I \varphi'' = Q_\varphi$, integrabile per quadratura, se Q_φ dipende solo da φ , o da φ' , o da t . Alla stessa equaz. si perviene se si nota che essendo ω diretto secondo x , la proiezione su x del momento risultante delle quantità di moto è $I \varphi'$ (§ 1), e valendo rispetto all'asse x il teor. espresso dalla (7) della pag. 503, è $I \varphi'' = Q_\varphi$. Infine, se le forze applicate dipendono da un potenziale $U(\varphi)$, il principio della conservazione dell'energia dà (2) $I \varphi'^2 - 2 U(\varphi) = h$, equaz. integrabile per quadratura.

Determinazione della reazione dell'asse. Il corpo si può

considerare libero se si aggiunge la reazione (X_1, Y_1, Z_1) di O_1 (origine) e la reazione (X_2, Y_2, Z_2) di un punto $O_2(h, 0, 0)$ dell'asse fisso; scriviamo le equaz. del moto proiettando sugli assi le (5') e (6) delle pag. 501, 503. A quest'uopo osserviamo che se r è la distanza del baricentro G dall'asse x , ϑ l'angolo che il piano per x e per G fa con π , le coordinate di G sono (3) $\xi = \text{costante}$, $\eta = r \cos(\vartheta + \varphi)$, $\zeta = r \sin(\vartheta + \varphi)$, onde $\xi'' = 0$, $\eta'' = -(\eta \varphi'^2 + \zeta \varphi'')$, $\zeta'' = (-\zeta \varphi'^2 + \eta \varphi'')$; se X, Y, Z sono le proiezioni della risultante delle forze applicate, la (5') citata dà (4) $X + X_1 + X_2 = 0$, $Y + Y_1 + Y_2 + (\eta \varphi'^2 + \zeta \varphi'') \Sigma m = 0$, $Z + Z_1 + Z_2 + (\eta \varphi'' - \zeta \varphi'^2) \Sigma m = 0$. Se osserviamo che le coordin. x, y, z di un punto generico del corpo si esprimono per φ in modo analogo alle (3), le proiezioni sugli assi della derivata rapporto al tempo della coppia d'impulso sono rispettivamente $\Sigma m (y z'' - z y'') = \varphi'' \Sigma m (x^2 + y^2) = I \varphi''$; $-\Sigma m z'' x = \varphi'^2 \Sigma m x z - \varphi'' \Sigma m x y$; $\Sigma m x y'' = -\varphi'^2 \Sigma m x y - \varphi'' \Sigma m x z$; onde indicando con L, M, N i momenti rispetto agli assi delle forze, la (6) della pag. 503 dà (5) $L - I \varphi'' = 0$, $M - h Z_2 + \varphi'' \Sigma m x y - \varphi'^2 \Sigma m x z = 0$, $N + h Y_2 + \varphi'' \Sigma m x z + \varphi'^2 \Sigma m x y = 0$. Le (4) e (5) sono le equaz. del moto; la 1^a delle (5) è l'equaz. pura (1) già stabilita; le rimanenti servono a determinare $X_1 + X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$, cioè la reazione dell'asse fisso.

Casi speciali notevoli. Se l'asse fisso è l'asse principale d'inerzia del corpo per O_1 è $\Sigma m x z = \Sigma m x y = 0$ e se il momento risultante delle forze applicate è $\parallel$ a x , è $M = N = 0$ onde $Y_2 = Z_2 = 0$. Se l'asse fisso è asse centrale è anche $\eta = \zeta = 0$, onde la reazione dell'asse è indipendente dalle variazioni di velocità angolare.

Se il sistema di forze applicate è equivalente ad un'unica forza applicata in un punto dell'asse, assunto questo come origine O_1 , sarà nullo il suo momento rispetto ad O_1 , e quindi la (1) dà $\varphi' = \text{costante}$ cioè il corpo seguita a ruotare uniformemente intorno all'asse fisso. In queste ipotesi dalle (5) si

trae, se $\Sigma m x z = \Sigma m x y = 0$, che la reazione di O_2 è nulla, e viceversa se questa è nulla, è $\Sigma m x z = \Sigma m x y = 0$, onde: se un corpo rigido mobile intorno ad un punto fisso è soggetto ad una forza passante per quel punto e se ruota inizialmente intorno ad un asse principale d'inerzia relativo al punto fisso, seguita a ruotare uniformemente intorno all'asse; per questa proprietà gli assi principali d'inerzia si dicono **assi permanenti di rotazione**; ciò avviene in particolare se il corpo non è soggetto a forze. In quest'ultima ipotesi, se l'asse intorno a cui ruota inizialmente il corpo è asse centrale, non v'ha reazione sull'asse (e viceversa); onde: se un corpo rigido libero non soggetto a forze ruota inizialmente intorno ad un asse centrale d'inerzia seguirà a ruotare uniformemente intorno all'asse, come se fosse fisso; per questa proprietà gli assi centrali si dicono **assi spontanei di rotazione**.

Pendolo composto dicesi un corpo rigido pesante sospeso ad un asse orizzontale (**asse di sospensione**). Sia φ l'angolo che il piano per l'asse di sospensione (asse x) e pel baricentro G forma con il piano verticale xz (z volto in basso); l'energia potenziale del sistema è $-g \Sigma m z = -g \zeta \Sigma m$, ove ζ (ordinata di G) $= l \cos \varphi$ se l è la distanza di G dall'asse di sospensione; epperò la (2) diviene $I \varphi'^2 - 2gl \cos \varphi \Sigma m = \text{cost.}$ Se k è il raggio d'inerzia del corpo (pag. 479) l'equaz. del moto diviene $\varphi'^2 = (2gl : k^2) \cos \varphi + \text{cost.}$ la quale confrontata con quella del pendolo semplice (pag. 487) fa vedere che un pendolo composto oscilla come uno semplice di lunghezza $a = k^2 : l$.

Asse di oscillazione è la retta $\parallel$ all'asse di sospensione distante da questo di a nel piano pel baricentro e per l'asse di sospensione; è il luogo dei punti del corpo che oscillano come se fossero punti liberi. Il baricentro G giace fra gli assi di sospensione e di oscillazione e dista da questi rispettiv. di l e di $k_1^2 : l$, se k_1 è il raggio d'inerzia rispetto ad un asse $\parallel$ per G . Se il corpo si sospende per l'asse di oscillazione, quello primitivo di sospensione diviene di oscillazione (**teor. di Huygens**).

Se si prendono come assi di sospensione 2 orizzontali nel piano del baricentro e dell'asse primitivo di sospensione da bande opposte di G e ad esse corrispondono uguali lunghezze pei pendoli semplici sincroni, la distanza delle 2 rette è a . (**Pendolo reversibile di Kater**).

3. — Moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso.

Il corpo sia riferito ad una terna fissa coll'origine nel punto fisso O ed a una terna di assi mobili coincidenti cogli assi principali d'inerzia relativi ad O .

Se $\mathbf{K}$ è la coppia d'impulso, $M - O$ il momento risultante delle forze applicate, vale il teorema della coppia d'impulso, cioè $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = M - O$ e riferendoci alla terna connessa al corpo

(Cap. LVII, § 1) (6) $\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_1 + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K} = M - O$, che proiettata

sugli assi stessi dà (7) $A \frac{dp}{dt} + (C - B) q r = L_1$; $B \frac{dq}{dt} + (A - C) r p =$

$= M_1$; $C \frac{dr}{dt} + (B - A) p q = N_1$, ove A, B, C sono i momenti

principali d'inerzia, L_1, M_1, N_1 , proiezioni di $M - O$ sugli assi connessi al corpo, le quali sono, in generale, funzioni del tempo, delle coordinate dei punti, dei 9 coseni degli assi principali e delle loro derivate prime (eliminabili mediante le formule di Poisson, Cap. LVII, § 1). Ma codeste quantità (Cap. LVII, § 4) sono esprimibili mediante gli angoli Euleriani φ, ϑ, ψ e loro derivate: allora le (7), aggiunte alle (9) della pag. 439, danno le 6 equaz. del moto (del 1° ordine in $p, q, r, \varphi, \vartheta, \psi$); l'integrale generale contiene 6 costanti che si determinano data la posizione iniziale del corpo ($\varphi_0, \vartheta_0, \psi_0$) e lo stato di moto iniziale (p_0, q_0, r_0).

Moto di un corpo pesante sospeso per il baricentro. È

qui $M - O = 0$, e le (7) diventano (7') $A \frac{dp}{dt} = (B - C) q r$,

$B \frac{dq}{dt} = (C - A) r p$, $C \frac{dr}{dt} = (A - B) p q$. Esiste l'integrale

$\mathbf{K}$ = vettore costante, cioè (8) $A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2$ ($K = \text{mod } \mathbf{K} = \text{costante}$) (cfr. § 1) e l'altro integrale $A p^2 + B q^2 + C r^2 = h^2$ esprime che la forza viva è costante. La proiezione di ω su $\mathbf{K}$ è la costante $\mu = h^2 : K$; se si pensano ω e $\mathbf{K}$ applicati in O il 2° estremo H di ω giace sul piano $\pi \perp$ a $\mathbf{K}$ nel suo 2° estremo. Ponendo $D = K : h^2$ i 2 integrali primi divengono (9) $A p^2 + \dots = D \mu^2$, $A^2 p^2 + \dots = D^2 \mu^2$; dal primo si rileva che l'ellissoide $A x_1^2 + B y_1^2 + C z_1^2 = D \mu^2$, omotetico all'ellissoide d'inerzia, è sempre tangente a π in H ; durante il moto quest'ellissoide rotola (senza strisciamento, perchè H è polo di rotazione) su π ; ogni ellissoide omotetico rotola senza strisciamento sopra piani $\perp$ a $\mathbf{K}$; in particolare l'ellissoide d'inerzia $A x_1^2 + B y_1^2 + C z_1^2 = M$ (M massa totale) rotola su un piano $\perp$ a $\mathbf{K}$ alla distanza da O di $\sqrt{M : D}$.

Il luogo di H sul piano π è l'**erpoloide** (pag. 438, linea 34), il luogo di H sull'ellissoide è la **poloide**, curva algebrica del 4° ordine; da alcuni è detto *poloide* il luogo del punto comune all'asse di ω e all'ellissoide d'inerzia ed erpoloide il luogo dello stesso punto sul piano a cui l'ellissoide rimane tangente nel moto; le considerazioni che seguono possono riferirsi con evidenti modificazioni all'una o all'altra coppia di curve.

Se $A > B > C$, si riconosce $A \geq D \geq C$; l'eliminazione di μ fra le (9) dà luogo a (10) $A(A - D)p^2 + B(B - D)q^2 + C(C - D)r^2 = 0$ la quale (poichè p, q, r sono le coordinate di H) fa vedere che $A(A - D)x_1^2 + B(B - D)y_1^2 + C(C - D)z_1^2 = 0$ è il cono degli assi mobili di istantanea rotazione (pag. 438). In quest'equaz. solo D dipende dalle condizioni iniziali; per $D = A$ il cono si riduce all'asse x_1 , asse di momento d'inerzia minimo intorno a cui il corpo ruota indefinitamente (giacchè la (10) non può essere soddisfatta che da $q = r = 0$) ed uniformemente (perchè $A p^2 = h^2$). Se $A > D > B$ la poloide consta di 2 curve (simmetriche) che si chiudono intorno all'asse x_1 , tanto più piccola quanto più D è vicino ad A ; se $B = D$ il cono si scinde in 2 piani per l'asse y_1 (asse di momento d'inerzia medio)

e la poloide in 2 ellissi; il corpo se inizialmente ruota intorno a y_1 può seguitare a ruotare indefinitam. perchè le equaz. (7) sono soddisfatte da $p = r = 0$, $q = q_0$; ma da (10) non si deduce, dall'ipotesi $B = D$, che necessariamente debba essere $p = r = 0$. Infine se $B > D > C$ la poloide si compone di due curve che si chiudono intorno all'asse z_1 (asse di momento di inerzia massimo) e se $D = C$ la rotazione avviene costantemente e uniform. intorno a z_1 . Gli assi principali d'inerzia sono assi permanenti di rotazione (Cfr. § 2). Il moto studiato si dice **moto per inerzia**.

Integrazione del sistema (7). Supposto $D < B$ si ponga $A(A-C)p^2 = D\mu^2(D-C)\cos^2\sigma$, $B(B-C)q^2 = D\mu^2(D-C)\sin^2\sigma$:

dalle (9) si ricava $r^2 = D\mu^2 \frac{A-B}{C(A-C)} (1 - a^2 \sin^2 \sigma)$ posto $a^2 = (D-C)(A-B): (A-D)(B-C) (< 1)$. Sostituendo in una delle (7) si ha (11)
$$\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \sigma}} = \pm \int \frac{D\mu^2(A-D)(B-C)}{A B C} dt,$$

l'integrale del cui primo membro è ellittico (Cap. XLIV, § 9) ed il segno del secondo è $+$ o $-$ a seconda che σ cresce o diminuisce col tempo; r non si annulla mai, p e q si annullano rispettiv. per $\sigma = \pi:2$ e $\sigma = 0$. Se $D > B$ si pone $B(B-A)q^2 = D\mu^2(D-A)\sin^2\sigma$, $C(C-A)r^2 = D\mu^2(D-A)\cos^2\sigma$ si ricava dalle (9) p^2 e si procede come sopra. Se $D = B$ il 1° membro di (11) diviene $\frac{d\sigma}{\cos\sigma}$ di cui $\log \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right)$

è integrale; se t tende all' ∞ , p e r tendono a 0, q tende a $\pm \mu$. Per determinare ϑ, φ, ψ in funzione di σ (e quindi di t) si assume per asse z quello che contiene K , allora (12) $\cos(z x_1) = A p: K = \sin \varphi \sin \vartheta$, $\cos(z y_1) = B q: K = \cos \varphi \sin \vartheta$, $\cos(z z_1) = C r: K = \cos \vartheta$ da cui $\tan \varphi = A p: B q$ epperò φ e ϑ sono espresse per p, q, r e quindi per σ ; di più essendo $p \sin \varphi + q \cos \varphi = \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta$ si ricava $\frac{d\psi}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = D\mu \frac{D\mu^2 - Cr^2}{D^2\mu^2 - C^2r^2}$.

Caso in cui l'ellissoide d'inerzia è di rotazione. Sia $A = B$;

le (7) si riducono a $r = r_0$ (valore iniziale di r), $A \frac{dp}{dt} =$

$$= (A - C) r_0 q, A \frac{d q}{d t} = (C - A) r_0 p$$
 da cui $p = p_0 \cos (\lambda r_0 t) + q_0 \sin (\lambda r_0 t)$; $q = q_0 \cos (\lambda r_0 t) - p_0 \sin (\lambda r_0 t)$ posto $\lambda = (A - C) : A$. Si deduce $\omega^2 = \omega_0^2$ (costante) e se diciamo γ l'angolo di ω con z_1 è $r = \omega \cos \gamma$, si deduce la costante di γ , cioè il luogo mobile degli assi istantanei di rotazione è un cono rotondo $\mathbf{C}_1$ intorno all'asse principale d'inerzia z_1 ; dalle (12) si trae $\vartheta = \text{costante}$ (cioè costante l'angolo di $\mathbf{K}$ con z_1), $\text{tg } \varphi = p : q = \text{cotg } (\lambda r_0 t - \alpha)$ (posto $\alpha = \text{arc tg } (p_0 : q_0)$) cioè $\varphi = (\pi : 2) + \alpha - \lambda r_0 t$; $\frac{d \psi}{d t} = K : A$ e quindi $\psi = (K : A) t + \text{costante}$.

L'angolo che ω fa con $\mathbf{K}$ è costante ed $= \vartheta \pm \gamma$, cioè il luogo fisso degli assi istantanei di rotazione è un cono rotondo $\mathbf{C}$ intorno all'asse di $\mathbf{K}$. Durante il moto $\mathbf{C}_1$ rotola uniformemente sopra $\mathbf{C}$ (moti di precessione).

Moto di un giroscopio, cioè di un corpo rigido soggetto alla sola gravità sospeso per un suo punto, distinto dal baricentro. Per assi mobili prendiamo ancora gli assi principali d'inerzia pel punto fisso O_1 e per fissi una terna di cui z verticale volto in alto; siano ξ_1, η_1, ζ_1 le coordin. del baricentro G rispetto agli assi d'inerzia x_1, y_1, z_1 ; α, β, γ gli angoli che z forma cogli stessi assi. Poichè L_1, M_1, N_1 sono i momenti del peso $\mathbb{P}$ rispetto agli assi principali d'inerzia, le (7) divengono

$$\begin{aligned}
 A \frac{d p}{d t} + (C - B) q r &= \mathbb{P} (\beta \zeta_1 - \gamma \eta_1); B \frac{d q}{d t} + (A - C) r p = \\
 &= \mathbb{P} (\gamma \xi_1 - \alpha \zeta_1); C \frac{d r}{d t} + (B - A) p q = \mathbb{P} (\alpha \eta_1 - \beta \xi_1)
 \end{aligned}$$

a cui debbesi aggiungere $\alpha = \sin \varphi \sin \vartheta$, $\beta = \cos \varphi \sin \vartheta$, $\gamma = \cos \vartheta$ che esprimono α, β, γ per gli angoli euleriani. L'integrale della conservazione dell'energia dà $A p^2 + B q^2 + C r^2 + 2 \mathbb{P} (\alpha \xi_1 + \beta \eta_1 + \gamma \zeta_1) = h$ e poichè è nullo il momento del peso rispetto alla verticale, è costante la componente della coppia d'impulso rispetto alla verticale, cioè $A p \alpha + B q \beta + C r \gamma = k$. Il problema è riducibile alle quadrature nel caso che l'ellissoide di inerzia sia di rotazione ($A = B$) ed il baricentro G sia sul-

l'asse di rotazione ($\xi_1 = \eta_1 = 0$); il giroscopio è detto **simmetrico** e l'asse di rotazione dell'ellissoide si dice **asse di figura**: allora è $r = r_0$ e gli integrali primi precedenti divengono (13) $A(p^2 + q^2) + \lambda \gamma = h - C r^2$ (posto $\lambda = 2 \mathfrak{P} \zeta_1$), $A(p\alpha + q\beta) + C r_0 \gamma = k$. Per le (9) del § 4, Cap. LVII, $p^2 + q^2 = \vartheta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \vartheta$, $p\alpha + q\beta = \sin \vartheta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) = \psi' \sin^2 \vartheta$ (col-l'accento si indicano le derivate rapporto al tempo). Sostituendo negli integrali primi ed eliminando ψ' si trae $\vartheta' = f(\vartheta)$, poi $\psi'^2 = (h - \lambda \cos \vartheta - A \vartheta'^2) : A \sin^2 \vartheta$ ed infine dalla 3^a delle citate (9) del Cap. LVII, $\varphi' = r_0 - \psi' \cos \vartheta$: il problema è ricondotto dunque alle quadrature. Nel caso particolare che inizialmente il corpo ruoti intorno all'asse di figura, primitivamente inclinato di ϑ_0 sulla verticale, cioè per $t = 0$, sia $p = q = 0$, $r = r_0$, e quindi $\vartheta' = \psi' = 0$, $\varphi' = r_0$, gli integrali (13) divengono (14) $A \psi'^2 \sin^2 \vartheta + \vartheta'^2 = \lambda (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)$, $A \psi' \sin^2 \vartheta = C r_0 (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)$ da cui, supposto $\lambda > 0$, si deduce che ϑ non è mai inferiore a ϑ_0 durante il moto e ψ' ha il segno di r_0 , cioè il moto di precessione avviene nel senso del moto di rotazione intorno all'asse di figura (se $\lambda < 0$ nel senso opposto); di più $|\lambda : C r_0| > |\psi'|$. Se r_0 è molto grande, ψ' è dell'ordine di grandezza di $|1 : r_0|$ cioè il moto di precessione è lentissimo e poichè per la seconda delle (14) è $A \psi' > C r_0 (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)$ si deduce che ϑ differisce sempre di pochissimo da ϑ_0 , cioè l'asse di figura cambia di pochissimo l'inclinazione sulla verticale.

4. — **Percossa in un corpo rigido avente un asse fisso.** L'asse fisso ed il parametro sono quelli fissati a principio del § 2. Con X, Y, Z indichiamo le proiezioni sugli assi della percossa $\Phi = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \psi dt$ applicata in (a, b, c) , con $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2$ le proiezioni delle percosse $\Phi_1 = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \psi_1 dt$ in O_1 (origine) ed $\Phi_2 = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \psi_2 dt$ in $O_2(h, 0, 0)$ che sostituiscono le azioni dei punti fissi O_1, O_2 . La (5') della pag. 561 integrata fra t_0 e $t_0 + \varepsilon$ dà nel caso

attuale $\left\{ \left(\frac{dG}{dt} \right)_{t_0+\varepsilon} - \left(\frac{dG}{dt} \right)_{t_0} \right\} \Sigma m = \Phi + \Phi_1 + \Phi_2$ e proiet-

tando sugli assi, indicando con ξ, η, ζ le coordin. del baricentro G , si ha (15) $0 = X + X_1 + X_2, -(\varphi'_{t_0+\varepsilon} - \varphi'_{t_0}) \zeta \Sigma m = Y + Y_1 + Y_2, (\varphi'_{t_0+\varepsilon} - \varphi'_{t_0}) \eta \Sigma m = Z + Z_1 + Z_2$. Le proiezioni sugli assi della coppia d'impulso (osservando che per le coordin. di ogni punto si hanno formule analoghe alle (3) della pag. 510) sono rispettivamente. $I\varphi', -\varphi' \Sigma m x y, -\varphi' \Sigma m x z$ (I momento d'inerzia rispetto all'asse x), onde in posto della (6) della pag. 503 si hanno le 3 equaz. (16) $(\varphi'_{t_0+\varepsilon} - \varphi'_{t_0}) I = bZ - cY, -(\varphi'_{t_0+\varepsilon} - \varphi'_{t_0}) \Sigma m x y = cX - aZ - hZ_2, -(\varphi'_{t_0+\varepsilon} - \varphi'_{t_0}) \Sigma m x z = aY - bX + hY_2$.

La prima delle (16) dà la variazione della velocità angolare dovuta alla percossa; dalle altre si può determinare $X_1 + X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$.

Perchè le percosse in O_1, O_2 siano nulle, dev'essere $X = 0$, cioè la percossa $\perp$ ad x ; se il piano $z y$ contiene la percossa a cui z è $\perp$, è $Z = 0, a = 0$, allora è $\Sigma m x y = \Sigma m x z = 0$ cioè l'asse di rotazione x dev'essere principale d'inerzia per O_1 , poi $\eta = 0$; dalla 1^a delle (16), $(\varphi'_{t_0+\varepsilon} - \varphi'_{t_0}) I = -cY$ e dalla 2^a delle (15), $(\varphi'_{t_0+\varepsilon} - \varphi'_{t_0}) \Sigma m = -Y$ donde $c = I : \zeta \Sigma m$ od anche $c = k^2 : \zeta$, se k è il raggio d'inerzia rispetto all'asse x .

Centro di percossa è il punto d'applicazione della percossa nel caso precedente, che è sul piano xz alla distanza $k^2 : \zeta$ da x cioè sull'asse di oscillazione (pag. 511).

Pendolo balistico. Una lamina materiale è sospesa ad un asse fisso orizzontale e nella sua posizione d'equilibrio è colpita da un punto di massa m e velocità v normalmente alla lamina in un suo punto P distante di c dall'asse di sospensione. Se si indica con ω la velocità angolare con cui comincia la lamina a ruotare, è $\Phi = m(v - c\omega)$ onde se I è il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse di sospensione (Cap. LXII, § 4), per la 1^a delle (16) si ha $I\omega = mc v - m c^2 \omega$ da cui $\omega = mc v : (I + m c^2)$. Se P è sulla $\perp$ all'asse di sospensione contenente il baricentro G della lamina, distante di l dell'asse stesso, il massimo scostamento angolare ϑ dalla posizione di equilibrio

è dato da $4 g (l M + c m) \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{m^2 c^2 v^2}{I + m c^2}$ se M è la massa della lamina. Da questa formula, nota ϑ si determina la v , o viceversa.

Percossa in un corpo rigido con un punto fisso. Detta Φ , come dianzi, la percossa, Φ_1 la percossa nel punto fisso O_1 (centro delle coordinate) si ha $\left\{ \left(\frac{dG}{dt} \right)_{t_0+\varepsilon} - \left(\frac{dG}{dt} \right)_{t_0} \right\} \Sigma m = \Phi + \Phi_1$.

Dalla (6) della pag. 503 si deduce, sugli assi principali d'inerzia connessi al corpo, $A(p_{t_0+\varepsilon} - p_{t_0}) = L_1$, $B(q_{t_0+\varepsilon} - q_{t_0}) = M_1$, $C(r_{t_0+\varepsilon} - r_{t_0}) = N_1$, ove A, B, C sono i momenti principali d'inerzia, p, q, r , le proiezioni della rotazione istantanea, L_1, M_1, N_1 i momenti rispetto ai detti assi della Φ . Se all'istante t_0 il corpo è in riposo è $A p_{t_0+\varepsilon} = L_1$, $B q_{t_0+\varepsilon} = M_1$, $C r_{t_0+\varepsilon} = N_1$; discende (pag. 87) che il piano della coppia di percossa è coniugato all'asse di istantanea rotazione rispetto all'elissoide d'inerzia; pei soli assi principali d'inerzia l'asse della coppia di percossa coincide con quello di rotazione.

5. — Moto di un corpo rigido libero. Se G è il baricentro, M la massa totale, F la risultante delle forze, sussiste l'equaz. (Cap. LXIV, § 7) (17) $M \frac{d^2 G}{dt^2} = F$; posto $\frac{dG}{dt} = V$, è

$\frac{d^2 G}{dt^2} = \left(\frac{dV}{dt} \right)_1 + \omega \wedge V$ (Cap. LVII, § 1) la prima derivata

essendo fatta rispetto alla terna collegata col corpo, che supponiamo costituita dagli assi centrali; dette allora u, v, w le componenti di V o X_1, Y_1, Z_1 quelle di F sugli assi detti, la

(17) si scinde nelle 3 equaz. (17') $M \left(\frac{du}{dt} + qw - rv \right) = X_1$,

$M \left(\frac{dv}{dt} + ru - pw \right) = Y_1$, $M \left(\frac{dw}{dt} + pv - qu \right) = Z_1$, a cui

debbonsi aggiungere (18) $u = \xi' a_1 + \eta' a_2 + \zeta' a_3$, $v = \xi' b_1 + \eta' b_2 + \zeta' b_3$, $w = \xi' c_1 + \eta' c_2 + \zeta' c_3$, ove $\xi' \eta' \zeta'$ sono le derivate rapporto a t delle coordin. di G rispetto agli assi fissi. Sussistono poi le equaz. (7) della pag. 512 e le (9) della pag. 439; in tutto si hanno

le 12 equaz. differenziali del moto del corpo rigido libero fra $u, v, w, p, q, r, \xi, \eta, \zeta, \varphi, \vartheta, \psi$. Se L_1, M_1, N_1 non dipendono da $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$, le ultime 6 si integrano a parte, cioè il moto del corpo intorno al baricentro è indipendentemente dal moto di quest'ultimo.

Moto di un corpo rigido pesante libero. Il baricentro si muove di moto parabolico come un punto pesante (Capitolo LV, § 5, *g*); il corpo intorno al baricentro con le leggi del moto d'inerzia (pag. 514) perchè il momento del peso rispetto al baricentro è nullo.

Percossa in un corpo rigido libero. La percossa Φ abbia sugli assi centrali del corpo le componenti X_1, Y_1, Z_1 . Dalla (17) per il principio fondamentale della percossa (pag. 495) si ricava $\{u_{t_0+\varepsilon} - u_{t_0}\} M = X_1, \{v_{t_0+\varepsilon} - v_{t_0}\} M = Y_1, \{w_{t_0+\varepsilon} - w_{t_0}\} M = Z_1$, ove, u, v, w sono le componenti della velocità di G ; e dal teor. della coppia d'impulso (pag. 503) $\{p_{t_0+\varepsilon} - p_{t_0}\} A = L_1, \{q_{t_0+\varepsilon} - q_{t_0}\} B = M_1, \{r_{t_0+\varepsilon} - r_{t_0}\} C = N_1$, ove A, B, C sono i momenti principali d'inerzia e L_1, M_1, N_1 i momenti di Φ sugli assi centrali.

Se inizialmente il corpo è in riposo, $u_{t_0+\varepsilon} = X_1 : M$, $v_{t_0+\varepsilon} = Y_1 : M$, $w_{t_0+\varepsilon} = Z_1 : M$; $p_{t_0+\varepsilon} = L_1 : A$, $q_{t_0+\varepsilon} = M_1 : B$, $r_{t_0+\varepsilon} = N_1 : C$ che definiscono l'asse del moto elicoidale (o vite) intorno a cui il corpo comincia a ruotare e lungo cui comincia a scorrere. Esistono 6 diname (pag. 444) che coincidono con le corrispondenti viti; queste dinami e viti diconsi **principali d'inerzia**.

6. — **Sull'urto di due corpi.** Due corpi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, di masse m_1, m_2 , a superficie levigate (si prescinde perciò dall'attrito) e convesse vengono ad urtarsi in un punto comune H in cui sono tangenti. L'urto equivale per $\mathcal{C}_1$ ad una forza di percossa Φ diretta secondo la normale n_1 a $\mathcal{C}_1$ in H volta verso l'interno di $\mathcal{C}_1$ e per $\mathcal{C}_2$ alla stessa forza diretta secondo la normale n_2 a $\mathcal{C}_2$ in H , volta verso l'interno di $\mathcal{C}_2$. Siano $u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1$ le proiezioni della velocità di traslazione e di rotazione di $\mathcal{C}_1$ prima dell'urto (all'istante t_0) sugli assi centrali di $\mathcal{C}_1$; e indichiamo con $u'_1, v'_1, w'_1, p'_1, q'_1, r'_1$ le stesse quantità dopo l'urto

(all'istante $t_0 + \varepsilon$); analoghi significati per $\mathcal{C}_2$ abbiano $u_2, v_2, w_2, p_2, q_2, r_2; u'_2, v'_2, w'_2, p'_2, q'_2, r'_2$. Siano $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ le coordin. dell'asse n_1 (pag. 401) rispetto agli assi centrali di $\mathcal{C}_1$ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ le coordin. dell'asse n_2 rispetto agli assi centrali di $\mathcal{C}_2$. Allora le equaz. del § precedente danno luogo alle 12 equaz. (19) $m_1(u'_1 - u_1) = \Phi \alpha_1, m_1(v'_1 - v_1) = \Phi \beta_1, m_1(w'_1 - w_1) = \Phi \gamma_1, A_1(p'_1 - p_1) = \Phi \lambda_1, B_1(q'_1 - q_1) = \Phi \mu_1, C_1(r'_1 - r_1) = \Phi \nu_1, m_2(u'_2 - u_2) = \Phi \alpha_2, m_2(v'_2 - v_2) = \Phi \beta_2, m_2(w'_2 - w_2) = \Phi \gamma_2, A_2(p'_2 - p_2) = \Phi \lambda_2, B_2(q'_2 - q_2) = \Phi \mu_2, C_2(r'_2 - r_2) = \Phi \nu_2$ (ove A_1, B_1, C_1 sono i momenti principali d'inerzia di $\mathcal{C}_1$, e A_2, B_2, C_2 quelli di $\mathcal{C}_2$) fra le 13 incognite $u'_1, v'_1, w'_1, p'_1, q'_1, r'_1, u'_2, v'_2, w'_2, p'_2, q'_2, r'_2, \Phi$ ($\equiv \text{mod } \Phi$). Se il corpo è perfettamente **elastico** l'energia cinetica prima dell'urto eguaglia quella dopo l'urto, epperò eguagliando i loro doppi sarà (§ 1) $m_1(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2 + m_2(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) + A_2 p_2^2 + B_2 q_2^2 + C_2 r_2^2 = m_1(u'_1^2 + v'_1^2 + w'_1^2) + A_1 p'_1^2 + B_1 q'_1^2 + C_1 r'_1^2 + m_2(u'_2^2 + v'_2^2 + w'_2^2) + A_2 p'_2^2 + B_2 q'_2^2 + C_2 r'_2^2$ od anche tenendo conto delle equaz. precedenti $\Phi [\alpha_1(u'_1 + u_1) + \beta_1(v'_1 + v_1) + \gamma_1(w'_1 + w_1) + \lambda_1(p'_1 + p_1) + \mu_1(q'_1 + q_1) + \nu_1(r'_1 + r_1)] + \alpha_2(u'_2 + u_2) + \beta_2(v'_2 + v_2) + \gamma_2(w'_2 + w_2) + \lambda_2(p'_2 + p_2) + \mu_2(q'_2 + q_2) + \nu_2(r'_2 + r_2)] = 0$ che è la 13^a equaz. Se indichiamo con V_1 e V'_1 le velocità di H come appartenente a $\mathcal{C}_1$ secondo la normale esterna a $\mathcal{C}_1$ prima e dopo l'urto e con V_2, V'_2 le velocità di H come appartenenti a $\mathcal{C}_2$ secondo la normale esterna a $\mathcal{C}_2$ prima e dopo l'urto, l'ultima equaz. (prescindendo dal fattore Φ) dà $V_1 + V'_1 + V_2 + V'_2 = 0$, perchè $-V'_1 - V_1 = \alpha_1(u'_1 + u_1) + \dots + \lambda_1(p'_1 + p_1) + \dots$ ed analogamente per $-V'_2 - V_2$.

L'energia cinetica totale è $-\frac{1}{2} \Phi (V_1 + V'_1 + V_2 + V'_2)$, nulla nel caso dei corpi perfettamente elastici, negativa negli altri casi. Nel caso dei corpi **anelastici**, dopo l'urto sarà $V'_1 + V'_2 = 0$ (13^a equaz.); non essendo i corpi nè perfettamente elastici nè anelastici, l'esperienza porta ad ammettere (20) $V'_1 + V'_2 = -\varepsilon (V_1 + V_2)$ con ε coefficiente compreso fra 0 ed 1 variabile per ogni coppia di corpi, detto **coefficiente d'elasticità all'urto**.

Quest'ultima è la 13^a equaz. occorrente. Dalle (19) si trae $u'_1 = u_1 + \frac{a_1}{m_1} \Phi, \dots p'_1 = p_1 + \frac{\lambda_1}{A_1} \Phi, \dots$ e analoghe per l'indice 2, quindi $V'_1 = V_1 - \Phi \left(\frac{1}{m_1} + \frac{\lambda_1^2}{A_1} + \frac{\mu_1^2}{B_1} + \frac{v_1^2}{C_1} \right)$, $V'_2 = V_2 - \Phi \left(\frac{1}{m_2} + \frac{\lambda_2^2}{A_2} + \frac{\mu_2^2}{B_2} + \frac{v_2^2}{C_2} \right)$ ed indicando con k la somma dei 2 coefficienti di Φ , dalla (20) si trae $\Phi = (1 + \varepsilon)(V_1 + V_2) : k$. Perchè la velocità di rotazione non subisca cambiamento dall'urto, è necessario che la linea d'azione della percorsa passi pei due barincentri (**urto centrale**). Per 2 sfere animate da un moto di traslazione || ad x , se l'urto è centrale, $\Phi = (1 + \varepsilon)(u_1 + u_2) : \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$, $u'_1 = u_1 + (\Phi : m_1)$, $u'_2 = u_2 + (\Phi : m_2)$.

CAPITOLO LXVI.

Moto ed equilibrio relativo

1. — **Equaz. del moto relativo.** Un sistema di n punti P_i di masse m_i soggetti alle forze F_i sia riferito a 2 terne di assi, l'una $O(xyz)$ fissa, l'altra $\Omega(\xi\eta\zeta)$ dotata di un moto noto rispetto alla prima: le equaz. dei vincoli $L_h(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0$ si esprimano mediante le coordin. della terna mobile $A_h(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n, t) = 0$ ($h = 1, \dots, k$). Poichè $\frac{d^2 P_i}{dt^2}$ è somma dell'accelerazione relativa j_{ri} , di strascinato j_{si} e complementare j_{ci} (pag. 432), l'equaz. generale del moto (pag. 485) si scrive (1) $\Sigma \{ (F_i - m_i j_{si} - m_i j_{ci}) - m_i j_{ri} \} \times \delta P_i = 0$, la quale, denotando con E_i, H_i, Z_i le componenti su ξ, η, ζ di $\Phi_i = F_i - m_i j_{si} - m_i j_{ci}$,

si scinde nelle $3n$ equaz. (2) $m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = E_i + \sum_1^k \lambda_s \frac{\partial A_s}{\partial \xi_i}$,
 $m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = H_i + \sum_1^k \lambda_s \frac{\partial A_s}{\partial \eta_i}$, $m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = Z_i + \sum_1^k \lambda_s \frac{\partial A_s}{\partial \zeta_i}$, equaz.
 (di Lagrange nella 1^a forma) del moto relativo del sistema
 rispetto a $\Omega (\xi \eta \zeta)$. La Φ_i che tiene il posto della forza appli-
 cata nel moto assoluto è la risultante della forza applicata e
 delle contrarie alle **forze di strascino** ($m_i \dot{j}_{si}$) e **comple-**
mentare ($m_i \dot{j}_{ci}$) (o di Coriolis).

Casi particolari. Se la terna $\Omega (\xi \eta \zeta)$ è animata da moto
 traslatorio uniforme, $\frac{d^2 P_i}{dt^2} = \dot{j}_{vi}$, onde le equaz. del moto sono
 $m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = E_i + \sum \lambda_s \frac{\partial A_s}{\partial \xi_i}$ e analoghe, ove E_i, H_i, Z_i sono le
 componenti di F_i . Se il moto di $\Omega (\xi, \eta, \zeta)$ è traslatorio qua-
 lunque manca la forza di Coriolis (pag. 432). Se il moto di
 $\Omega (\xi, \eta, \zeta)$ è rotatorio uniforme intorno ad un asse l per Ω è
 (pag. 433 linea 3) — $m_i \dot{j}_{si} = m_i \omega^2 (P_i - Q_i)$ se Q_i è la proie-
 zione di P_i su l , detta **forza centrifuga**, diretta normalmente ad l ,
 nel senso di $P_i - Q_i$. Se il moto di $\Omega (\xi, \eta, \zeta)$ è rototraslatorio
 (traslazione e rotazione uniformi) la — $m_i \dot{j}_{si}$ è ancora la forza
 centrifuga.

Equaz. dell'equilibrio relativo. La (1) è l'equaz. dell'equi-
 librio se vi si suppongono ξ, η, ζ costanti, con che $\dot{j}_{vi} = \dot{j}_{ci} = 0$;
 onde l'equaz. dell'equilibrio relativo è $\sum (F_i - m_i \dot{j}_{si}) \times \delta P_i = 0$
 ossia le $3n$ cartesiane $E_i + \sum_1^k \lambda_s \frac{\partial A_s}{\partial \xi_i} = 0$, $H_i + \sum_1^k \lambda_s \frac{\partial A_s}{\partial \eta_i} = 0$,
 $Z_i + \sum_1^k \lambda_s \frac{\partial A_s}{\partial \zeta_i} = 0$ ove E_i, H_i, Z_i sono le proiezioni sugli assi
 ξ, η, ζ della risultante della forza applicata F_i e della forza di
 strascino $m_i \dot{j}_{si}$ cambiata di segno.

Se il moto della terna $\Omega (\xi, \eta, \zeta)$ è traslatorio uniforme, è
 $\dot{j}_{si} = 0$, onde le condizioni d'equilibrio si identificano a quelle
 dell'equilibrio assoluto; in particolare un punto P pesante sia in
 equilibrio appoggiato ad un corpo C ; se questo abbandonato al
 proprio peso cade di moto traslatorio, il punto P seguita ad

essere in equilibrio rispetto a C . Se il moto di $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ è rotatorio uniforme od anche rototraslatorio uniforme, le condizioni d'equilibrio si determinano aggiungendo alle forze applicate le forze centrifughe sopra definite.

2. — **Caduta dei gravi nel vuoto, tenuto conto della rotazione della terra.** Supposta la terra sferica, sia $O(\xi, \eta, \zeta)$ una terna di assi con essa connessi per un suo punto O di latitudine boreale λ ; sia ζ verticale, ξ tangente al parallelo verso Est, η tangente al meridiano verso Sud. Un grave in riposo in O è in equilibrio relativo; il suo peso è la risultante dell'attrazione terrestre e della forza centrifuga (vedi sopra). Si abbandonino il grave dall'altezza $\zeta = h$, senza velocità iniziale. La rotazione della terra intorno all'asse polare è un vettore ω diretto da Nord a Sud di modulo $2\pi : 86400$; la $m\mathbf{j}_c = 2m\omega \wedge \mathbf{v}_r$ (forza centrifuga composta, o di Coriolis) ha su ξ, η, ζ le proiezioni. $2m\omega \left(\sin \lambda \frac{d\zeta}{dt} + \cos \lambda \frac{d\eta}{dt} \right), -2m\omega \cos \lambda \frac{d\xi}{dt}, -2m\omega \sin \lambda \frac{d\xi}{dt}$.

Le equaz. del moto sono $\frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\omega \left(\frac{d\eta}{dt} \cos \lambda + \frac{d\zeta}{dt} \sin \lambda \right)$;
 $\frac{d^2\eta}{dt^2} = 2\omega \frac{d\xi}{dt} \cos \lambda$; $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 2\omega \frac{d\xi}{dt} \sin \lambda - g$. Integrandole col trascurare ω^2 , si ha $\xi = (g\omega t^3 \sin \lambda) : 3, \eta = 0, \zeta - h = -gt^2 : 2$; il grave si muove nel piano verticale secondo il parallelo e devia dalla verticale verso Est; la traiettoria è la parabola semicubica $9g\xi^2 = 8\omega^2 \sin^2 \lambda (h - \zeta)^3$.

3. — **Equilibrio e moto di un punto pesante sopra una curva in un piano verticale animato di moto traslatorio orizzontale uniformemente vario.** Fissati nel piano, mobile 2 assi ξ (orizzontale) e η (verticale volto in basso) siano $\xi = \xi(q), \eta = \eta(q)$ le equaz. della curva, g_1 l'accelerazione del moto traslatorio (in grandezza e segno). L'equaz. dell'equilibrio si ha eguagliando a zero la somma delle proiezioni sulla tangente del peso ($mg\eta'(q) : \sqrt{\xi'(q)^2 + \eta'(q)^2}$) e della forza di strascimento vol-tata di segno ($-mg_1\xi'(q) : \sqrt{\xi'(q)^2 + \eta'(q)^2}$), cioè $g\eta'(q) - g_1\xi'(q) = 0$. L'equaz. del moto si ha eguagliando a zero la somma delle

proiez. sulla tangente del peso, delle forze di trascinamento e di inerzia relativa, voltate queste 2 di segno. Poichè la componente tangenziale dell'acceleraz. relativa è $\left[(\xi'(q)\xi''(q) + \eta'(q)\eta''(q)) \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + (\xi'(q)^2 + \eta'(q)^2) \frac{d^2q}{dt^2} \right] : \sqrt{\xi'(q)^2 + \eta'(q)^2}$, l'equaz. del moto è

$$-g\eta'(q) + g_1\xi'(q) + (\xi'(q)\xi''(q) + \eta'(q)\eta''(q)) \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + (\xi'(q)^2 + \eta'(q)^2) \frac{d^2q}{dt^2} = 0.$$

Per un pendolo semplice, indicando con q , l'angolo che il raggio che dal punto di sospensione va al punto mobile P forma con l'asse η è $\xi = a \sin q$, $\eta = a \cos q$, onde la condizione d'equilibrio è $g \sin q + g_1 \cos q = 0$, ossia $\operatorname{tg} q = -g_1 : g$; l'equaz. del moto è $g \sin q + g_1 \cos q = a \frac{d^2q}{dt^2}$ od anche posto $\alpha = \operatorname{arctg} (-g_1 : g)$ e $q - \alpha = \vartheta$, $\frac{-g}{a \cos \alpha} \sin \vartheta = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$: il pendolo oscilla intorno alla retta inclinata di α sulla verticale come un pendolo semplice ordinario di lunghezza $a \cos \alpha$ intorno alla verticale.

Equilibrio e moto di un punto pesante sopra una curva di un piano verticale ruotante uniformemente intorno ad un asse verticale. Sia $\eta = f(\xi)$ l'equaz. della curva riferita a 2 assi ξ, η nel piano che ruota intorno ad η (verticale e volto positivamente in alto) con velocità angolare ω costante. L'equaz. dell'equilibrio si ottiene eguagliando a zero la somma delle proiezioni sulla tangente del peso $(-mg f'(\xi) : \sqrt{1 + f'(\xi)^2})$ e della forza centrifuga $(m\omega^2 \xi (1 : \sqrt{1 + f'(\xi)^2}))$; cioè $\omega^2 \xi - g f'(\xi) = 0$.

Se la curva taglia l'asse di rotazione in un punto K ed ivi ha tangente orizzontale, K è posizione d'equilibrio; un altro punto K della curva è d'equilibrio se, detto K_1 la proiezione di K sull'asse η , la normale in K taglia η in un punto H al

di sopra di K_1 per cui sia $K_1 H = g : \omega^2$. In particolare se la curva è la parabola $\eta = \frac{\omega^2}{2g} \xi^2$, ogni suo punto è di equilibrio.

L'equazione del moto si ha esprimendo che è nulla la somma delle proiezioni sulla tangente del peso, della forza centrifuga e della forza d'inerzia relativa voltata di segno; essendo $\left[f'(\xi) f''(\xi) \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + (1 + f'(\xi)^2) \frac{d^2\xi}{dt^2} \right] : \sqrt{1 + f'(\xi)^2}$ la componente tangenziale dell'accelerazione relativa, la detta equazione è $\omega^2 \xi - g f'(\xi) - f'(\xi) f''(\xi) \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 - (1 + f'(\xi)^2) \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$.

4. — **Pendolo di Foucault.** Un punto pesante si muova su una sfera di raggio a tangente alla terra e con lei connessa; se gli assi sono quelli a principio del § 2, le equaz. del moto sono $\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mu \xi - 2\omega \left(\frac{d\eta}{dt} \cos \lambda + \frac{d\zeta}{dt} \sin \lambda \right)$; $\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu \eta + 2\omega \frac{d\xi}{dt} \cos \lambda$; $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mu (\zeta - a) + 2\omega \frac{d\xi}{dt} \sin \lambda - g$ (μ multipl. di Lagrange) che ammettono l'integrale $v^2 = h - 2g\zeta$. Se la sfera è tangente al polo, $\lambda = 0$, e le equaz. ammettono l'integrale $\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} - \omega (\xi^2 + \eta^2) = \text{cost}$; il moto è identico a quello che si avrebbe se la sfera non ruotasse con la terra intorno al suo asse. Se il pendolo è semplice, il suo piano d'oscillazione gira intorno all'asse terrestre in senso inverso al moto diurno della terra e compie un giro in un giorno. Se si considerano le piccolissime oscillazioni di un pendolo semplice in un piano verticale alla colatitudine boreale $\lambda \neq 0$, potendosi trascurare $\frac{d\zeta}{dt}$, sussiste l'integrale $\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} - \omega \cos \lambda (\xi^2 + \eta^2) = \text{cost.}$; il piano d'oscillaz. gira in senso contrario al moto diurno della terra con velocità angolare $\omega \cos \lambda$. Alla latitudine di 45° il piano d'oscillazione si sposta di circa 15 ogni secondo.

5. — **Moto relativo di 2 punti che si attraggono con una forza proporzionale alle masse e funzione della distanza.** Il punto P di massa m ed il punto O di massa M si attraggono con una forza proporzionale alle masse e funzione della distanza loro, cioè di intensità $m M f(r)$; si vuole il moto di P rispetto ad una terna di assi per O che si mantiene || a se stessa. La forza che agisce su P è $F = m M f(r) \frac{O - P}{r}$ (ove mod $(O - P) = r$); l'accelerazione di strascinamento è l'accelerazione di O cioè $-\frac{F}{M}$ e poichè è nulla l'accelerazione complementare (pag. 432), l'equaz. del moto relativo cercata è $(m + M) f(r) \frac{O - P}{r} = \left(\frac{d^2 P}{dt^2} \right)_1$, che coincide con quella del moto di un punto di massa 1 attratto da un punto fisso con una forza di intensità $(m + M) f(r)$; la integrazione è data al Cap. LXI, § 7, V, d) ove si porrà $\mu = m + M$. Se $f(r) = k^2 : r^2$ l'integrazione è fatta allo stesso § (pag. 473, linea 4), ove si porrà $\mu = k^2 (m + M)$.

6. — **Moto dei pianeti intorno al Sole.** Esso soddisfa alle 3 **leggi di Keplero**, da lui dedotte in seguito alle osservazioni di Tycho-Brahé: 1° Le orbite dei pianeti intorno al sole sono ellissi di cui un fuoco è occupato dal Sole. 2° I raggi vettori che dal Sole vanno al pianeta descrivono aree proporzionali al tempo. 3° I quadrati delle durate delle rivoluzioni dei pianeti stanno fra loro come i cubi dei grandi assi. Newton dedusse la legge della forza che produce il movimento. Essendo un moto piano per cui vale l'integrale delle aree (pagina 504), la forza è centrale. Se $r = p: (1 + e \cos \vartheta)$ è l'equaz. dell'ellisse, per la formula di Binet (pag. 473), la proiezione della forza sul raggio vettore è $F = -\frac{m c^2}{r^2 p}$, ove m è la massa del pianeta, c la costante delle aree (formula (6) pag. 472), p il parametro dell'ellisse (pag. 57) $= b^2 : a$ se a e b sono gli assi

($a > b$). Indicando con T la durata di un'intera rivoluzione, $c = 2 \pi a b : T$ onde $c^2 : p = 4 \pi^2 (a^3 : T^2) = \text{costante}$, per la 2ª legge. Indicando la costante con ν è $F = - \frac{m \nu}{r^2}$. Se M è la massa del sole, questo è attratto dal pianeta con forza d'intensità $-\frac{M \lambda}{r^2}$, onde per la 3ª legge di Newton $m \nu = M \lambda$ ossia $\frac{\nu}{M} = \frac{\lambda}{m} = f$, con f costante; epperò $F = - f \frac{M m}{r^2}$ cioè varia in ragione diretta del prodotto delle masse e in ragione inversa al quadrato della distanza.

Legge universale di attrazione o gravitazione è l'estensione della legge precedente all'attrazione di due elementi materiali qualunque, a distanza finita. La f dicesi **costante di gravitazione** (o di Gauss) e nel sistema *C. G. S.* ha il valore $6, 6576 : 10^8$. Data l'estrema piccolezza di f , l'attrazione di due masse m, m_1 distanti fra loro di r , cioè $f \frac{m m_1}{r^2}$ diviene sensibile se è rilevante il prodotto $m m_1$ o assai piccolo r .

CAPITOLO LXVII.

Attrazione newtoniana

1. — Attrazione newtoniana di un corpo su un punto.

Sia V il volume occupato da un corpo, $\mu(a, b, c)$ la densità in un punto (a, b, c) di V , talchè μdV sarà la massa dell'elemento dV . Se in $P(x, y, z)$ è concentrata una massa unitaria, l'attrazione newtoniana di μdV su P è una forza diretta da P all'elemento dV di intensità $f \mu dV : r^2$ (vedi sopra), posto $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ ove a, b, c sono le coordinate di un punto

di dV ; le proiezioni sugli assi dell'attrazione $\mathbf{F}$ della massa totale di V su P (punto potenziato) sono $X = f \int_V \frac{\mu (a-x)}{r^3} dV$, $Y = f \int_V \frac{\mu (b-y)}{r^3} dV$, $Z = f \int_V \frac{\mu (c-z)}{r^3} dV$, cioè le derivate parziali della funz. $U(x, y, z) = f \int_V \frac{\mu (a, b, c) dV}{r}$. È dunque $\mathbf{F} = \text{grad } U$; ossia la $\mathbf{F}$ dipende dal potenziale U , funzione che è finita, continua, annullantesi all'infinito, soddisfacente all'equaz. di Laplace $\Delta_2 U = 0$ (pag. 409) nello spazio esterno a V (infatti $\text{div. } \mathbf{F} = \Delta_2 U = f \int_V \mu \Delta_2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = 0$, perchè $\Delta_2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$). Le derivate prime di U sono pure continue in tutto lo spazio; le derivate seconde sono continue nello spazio esterno a V , sono continue entro V , ma attraversando la superficie σ limite di V si ha una discontinuità; infatti entro V è $\text{div } \mathbf{F} = \Delta_2 U = -4\pi f \mu$ (equaz. di Poisson). La U e le sue derivate prime si mantengono pure finite e continue se le masse formano anzichè un volume una superficie materiale.

2. — **Attrazione di uno strato sferico omogeneo.** Lo strato sia limitato da 2 sfere concentriche di raggi a e b ($b > a$) e di centro O . Sia P esterno alla sfera maggiore: posto $\overline{OP} = R$, $\overline{OQ}$ (Q punto di un elemento μdV attraente) $= r_1$, ϑ l'angolo di OP e OQ , φ l'angolo del piano OPQ con un piano fisso per OP , è $U = f \mu \int_a^b r_1^2 dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos \vartheta}} = \frac{4}{3} \pi f \mu (b^3 - a^3) \frac{1}{R} = f \frac{M}{R}$ indicando con M la massa totale dello strato. Le proiezioni di $\mathbf{F}$ sugli assi sono $-f \frac{M}{R^2} \frac{x}{R}$, $-f \frac{M}{R^2} \frac{y}{R}$, $-f \frac{M}{R^2} \frac{z}{R}$, cioè l'attrazione è uguale a quella di una massa M concentrata nell'origine (teor. di Newton). Per la sfera piena vale lo stesso risultato; basta fare $a = 0$.

Se P è interno alla sfera minore, $U = 2\pi f\mu(b^2 - a^2)$ cioè costante, epperò l'attrazione è nulla.

Se $a = 0$ e P è interno alla sfera attraente, si può riguardare P esterno alla sfera di centro O e raggio $R = \overline{OP}$, e interno alla sfera vuota dello strato sferico limitato dalle sfere di raggio R e b ; quindi $U = 2\pi f\mu(b^2 - \frac{1}{3}R^2)$ e le componenti di $\mathbf{F}$ sono $X = -\frac{4}{3}\pi f\mu R \frac{x}{R}$ e analoghe; mod $\mathbf{F} = \frac{4}{3}\pi f\mu R$, cioè proporzionale ad R .

3. — **Attrazione di una superficie sferica omogenea.** Sia P un punto interno alla sfera σ e si consideri un cono di vertice P che intercetta sulla sfera due areole $d\sigma, d\sigma'$; le attrazioni degli elementi materiali di masse $\mu d\sigma, \mu d\sigma'$ su P si fanno equilibrio; di qui risulta che l'attrazione di tutta la sfera

su P è nulla, onde il potenziale $U = f \int_{\sigma} \frac{\mu d\sigma}{r}$ è costante in

tutto lo spazio interno a σ ed uguale a $f \frac{m}{R}$ se m è la massa della sfera e R il raggio. Sia il punto P potenziato esterno; sulla congiungente P col centro O di σ si prenda il punto P' in guisa che posto $\overline{OP} = \varrho$, $\overline{OP'} = \varrho'$, sia $\varrho \varrho' = R^2$. Se Q è un generico punto di σ , $r = \overline{PQ}$, $r' = \overline{P'Q}$, risulta $\frac{1}{r'} = \frac{R}{\varrho} \frac{1}{r}$

epperò in P il potenziale $U = f \int_{\sigma} \frac{\mu d\sigma}{r}$ ha il valore $U =$

$= \frac{R}{\varrho} f \int_{\sigma} \frac{\mu d\sigma}{r'}$, ma $f \int_{\sigma} \frac{\mu d\sigma}{r'}$ è il potenziale in P' , uguale a

$f \frac{m}{R}$ epperò $U = f \frac{m}{\varrho} =$ al potenziale, rispetto a P , di una massa m concentrata in O .

Ai risultati del § 2 sull'attrazione di uno strato sferico o di una sfera piena, ci si può giungere pensando decomposto

lo strato o la sfera, mediante tanti strati di spessore infinitesimo, assimilabili perciò a superficie sferiche materiali, ed applicare i risultati di questo paragrafo.

4. — **Omeoide elementare omogeneo** dicesi uno strato infinitamente sottile omogeneo compreso fra 2 ellissoidi concentrici simili e similmente posti.

Attrazione di un omeoide elementare omogeneo. I 2 ellissoidi abbiano i semiassi $h a, h b, h c$ l'uno e $a (h - d h), b (h - d h), c (h - d h)$ l'altro, r il raggio vettore al 1° , r_1 quello al 2° , μ la densità, è $U = f \frac{\mu}{2} \int (r^2 - r_1^2) d\omega$ ove $d\omega$ rappresenta l'elemento superficiale di una sfera di raggio 1 a cui l'integrazione va estesa, od anche, se ϑ e φ sono la latitudine e la longitudine di r e r_1 nel solito sistema di coordin.

polari (pag. 15), $8 f h \mu d h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \varphi}{A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi}$
(posto $A = \cos^2 \vartheta (a^2 + c^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta) : a^2 c^2$, $B = \cos^2 \vartheta (b^2 + c^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta) : b^2 c^2$)

che si riduce a $4 \pi f \mu a b c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \vartheta d \vartheta}{\cos^2 \vartheta \sqrt{(a^2 + c^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta)(b^2 + c^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta)}}$.

Posto $c \operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{u}$ è $U = 2 \pi f \mu a b c \int_0^\infty \frac{d u}{\sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}}$
(integrale ellittico, pag. 248).

Attrazione di un omeoide qualunque. Gli ellissoidi che lo limitano corrispondano ai valori h_0, h_1 di h (vedi sopra); l'omeoide sia decomponibile in omeoidi elementari omogenei, ma di densità diversa. Se il punto P potenziato è interno all'ellissoide minore,

$$U = 2 \pi f a b c \int_{h_0}^{h_1} \mu h d h \int_0^\infty \frac{d u}{\sqrt{\Theta}} \text{ ove } \Theta = (a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u).$$

Sia P esterno all'ellissoide maggiore; pel teor. di Chasles (pag. 532) l'attrazione su P dell'omeoide che corrisponde ad h e $h - d h$ eguaglia l'attrazione di un omeoide di ugual massa formato da 2 ellissoidi confocali a quelli dell'omeoide precedente e di cui il più esterno passa per P . L'equazione di quest'ultimo è

$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = h^2$, determinato λ in guisa che passi per P ; allora è $U = 2\pi f a b c \int_{h_0}^{h_1} \mu h d h \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d u}{\sqrt{\Theta}} =$
 $= \pi f a b c \left[\varphi(1 - h_0^2) \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{d u}{\sqrt{\Theta}} - \varphi(1 - h_1^2) \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d u}{\sqrt{\Theta}} - \right.$
 $\left. - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \varphi(1 - h^2) \frac{d u}{\sqrt{\Theta}} \right]$ posto $\varphi(1 - h^2) = 2 \int_h^1 \mu h d h$, e λ_0, λ_1
 valori di λ corrispondenti ai valori h_0, h_1 di h .

Se P è interno all'omeoide, $U = \pi f a b c \left[\varphi(1 - h_0^2) \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{d u}{\sqrt{\Theta}} - \right.$
 $\left. - \varphi(1 - h_1^2) \int_0^{\infty} \frac{d u}{\sqrt{\Theta}} + \int_0^{\lambda_0} \varphi(1 - h^2) \frac{d u}{\sqrt{\Theta}} \right]$ formula che si
 stabilisce mediante le due precedenti considerando l'omeoide di-
 viso in 2 mediante l'ellissoide omotetico a quelli che limitano
 l'omeoide dato e passante per P .

Attrazione di un ellissoide. Facendo $h_0 = 0, h_1 = 1$ si ha il
 caso dell'ellissoide pieno; se P è esterno $U = \pi f a b c \int_{\lambda}^{\infty} \varphi(1 - h^2) \frac{d u}{\sqrt{\Theta}}$
 e se P è interno $U = \pi f a b c \int_0^{\infty} \varphi(1 - h^2) \frac{d u}{\sqrt{\Theta}}$ ove $h^2 =$
 $\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u}$.

Se l'ellissoide è omogeneo $\varphi(1 - h^2) = (1 - h^2) \mu$ e quindi
 pel punto P esterno $U = \pi f a b c \mu \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \right.$
 $\left. - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} \right) \frac{d u}{\sqrt{\Theta}}$ e se è interno $\lambda = 0$. In quest'ultimo caso,
 posto, $\mathbf{I} = \int_0^{\infty} \frac{d u}{\sqrt{\Theta}}$ è $U = f \pi a b c \mu \left(\mathbf{I} + 2 x^2 \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial a^2} + 2 y^2 \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial b^2} + \right.$
 $\left. + 2 z^2 \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial c^2} \right)$ e pel calcolo di $\mathbf{I}$ vedi pag. 248, 296. Se P è
 esterno si ottiene per U una espressione analoga alla prece-
 dente rimpiazzando $\mathbf{I}$ con $\mathbf{I}_1$ che è $\mathbf{I}$ ove si è posto $a^2 + \lambda,$
 $b^2 + \lambda, c^2 + \lambda$ in luogo di a^2, b^2, c^2 .

Due ellissoidi omofocali e omogeneamente stratificati esercitano su punti esterni attrazioni proporzionali alle masse e dirette secondo la stessa retta (**teor. di Mac-Laurin**).

Le superficie equipotenziali interne per un ellissoide omogeneo sono ellissoidi concentrici, le esterne sono superficie trascendenti dette **plintoidi**.

Le superficie equipotenziali esterne di un omeoide elementare sono ellissoidi omofocali e la F in un punto P esterno è $\perp$ all'ellissoide omofocale passante per P . Due omeoidi elementari di ugual massa esercitano la stessa attrazione in tutti i punti esterni (**teor. di Chasles**). L'attrazione di un omeoide elementare su un punto esterno eguaglia quella della sua ellisse focale (pag. 99) supposta di uguale massa.

5. — **Attrazioni di alcune altre figure speciali.** a) L'attrazione di un'asta AB rettilinea di densità μ costante su un punto P distante di h dall'asta è diretta secondo la bisettrice dell'angolo $\widehat{APB}$ ed è di modulo $f \frac{2\mu}{h} \sin \frac{\widehat{APB}}{2}$. Le superficie equipotenziali sono ellissoidi generati dalla rotazione intorno ad AB dell'ellisse di fuochi A, B .

b) L'attrazione di un disco circolare di raggio a e di densità μ costante su un punto P della $\perp$ al disco nel centro e alla distanza h da questo ha l'intensità $2\pi f\mu (\sqrt{p^2+a^2}-p) : \sqrt{p^2+a^2}$.

c) L'attraz. di un cilindro circolare retto di raggio a e di altezza l su un punto dell'asse distante dalla base di h , ha l'intensità $2\pi f\mu [\sqrt{a^2+h^2} - \sqrt{a^2+(h+l)^2} + l]$.

d) La porzione di solido omogeneo generato dalla rotazione della curva $y=\varphi(x)$ intorno ad x , limitata dai piani $x=0, x=l$ esercita su un punto dell'asse distante da $x=l$ di h un'attrazione di intensità $2\pi f\mu \left[l - \int_h^{h+l} \frac{x dx}{\sqrt{\varphi(x)^2+x^2}} \right]$.

e) Il solido di rotazione di volume dato che esercita sul punto O in cui l'asse di rotazione incontra il corpo la massima

attrazione è quello generato dalla rotazione della curva di equaz. polare $r^2 = c^2 \cos \vartheta$ intorno all'asse polare che coincide con quello di rotazione (polo O).

6. — **Alcuni teor. generali sull'attrazione.** a) Se U è il potenziale di un sistema di masse esterne ad una sfera σ di raggio a , il valore di U nel centro della sfera è $(\int_{\sigma} U d\sigma) : 4\pi a^2$, cioè la media dei valori di U su σ .

b) Se σ è una superficie chiusa, M la somma delle masse racchiuse da σ , il flusso di forza attraverso a σ (pag. 413) cioè $\int_{\sigma} \mathbf{F} \times \mathbf{n} d\sigma$ ($\mathbf{F}$ forza d'attrazione, $\mathbf{n}$ vettore unitario $\perp$ a σ e volto verso l'interno) è uguale a $4\pi fM$.

c) Il teor. della divergenza (pag. 413), detto S lo spazio racchiuso dalla superficie chiusa σ , dà $\int_S \operatorname{div} \mathbf{F} = -\int_{\sigma} \mathbf{F} \times \mathbf{n} d\sigma = -4\pi f \int \mu dS$ pel teor. precedente se μ è la densità nei punti di S , da cui $\operatorname{div} \mathbf{F} = \Delta_2 U = -4\pi f\mu$; nello spazio libero da masse $\operatorname{div} \mathbf{F} = \Delta_2 U = 0$.

d) Il potenziale non ha nè massimi nè minimi assoluti nello spazio libero da masse.

Attrazione di un corpo su punti lontani. Se δ è la minima distanza fra 2 punti del corpo potenziente S e la distanza ϱ del punto potenziato P da un generico punto O del corpo S è tanto grande da potersi ritenere trascurabile il rapporto $\delta : \varrho$, l'attrazione si comporta come se tutta la massa m di S fosse concentrata in O , cioè ha l'intensità $\frac{fm}{\varrho^2}$ ed è diretta secondo

PO ; il potenziale è $\frac{fm}{\varrho}$.

Se il rapporto $\delta : \varrho$ pur essendo piccolo non è trascurabile, ma ne sono trascurabili le potenze a cominciare da un certo ordine, all'espressione $\frac{fm}{\varrho}$ bisogna aggiungere dei termini correttivi, perchè le derivate forniscano le componenti dell'attrazione nei limiti della convenuta approssimazione. Sia Q un punto di S e Q' la proiezione ortogonale di Q su OP , ponendo $r = QP$, $\varrho = OP$, $\delta = OQ$, $q = OQ'$, $l = QQ'$, e tra-

scurando termini del 3° ordine rispetto al rapporto $\delta : \varrho$, si ha

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho} + \frac{q}{\varrho^2} + \frac{\delta^2}{\varrho^3} - \frac{3}{2} \frac{l^2}{\varrho^3} \text{ onde il potenziale } U = f \int_S \frac{\mu}{r} dS$$

diviene $\frac{fm}{\varrho} + \frac{f}{\varrho^2} \int_S \mu q dS + \frac{f}{\varrho^3} \int_S \mu \delta^2 dS - \frac{3}{2} \frac{f}{\varrho^3} \int_S \mu l^2 dS$;

ma $\int_S \mu q dS = m q_o$, essendo q_o la proiezione su OP del segmento che congiunge O col baricentro di S ; $\int_S \mu \delta^2 dS$ è il momento polare di S rispetto ad O (pag. 479) e $\int_S \mu l^2 dS$ è il momento d'inerzia di S rispetto all'asse OP .

Se le coordinate di P rispetto ad una terna di assi per O coincidenti cogli assi principali d'inerzia sono x, y, z , e k_1, k_2, k_3 sono i raggi d'inerzia rispetto agli stessi assi, posto $c_1 = -2k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$, $c_2 = k_1^2 - 2k_2^2 + k_3^2$, $c_3 = k_1^2 + k_2^2 - 2k_3^2$ si ha

$$\frac{f}{\varrho^3} \int_S \mu \delta^2 dS - \frac{3}{2} \frac{f}{\varrho^3} \int_S \mu l^2 dS = \frac{fm}{2\varrho^5} (c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 z^2).$$

CAPITOLO LXVIII.

Statica dei fluidi

1. — **Corpi fluidi** si dicono i corpi liquidi o gassosi.

Viscosità. Se sopra un fluido agiscono forze tendenti a far scorrere le molecole le une sulle altre, questo scorrimento avviene, per piccole che siano le forze; tuttavia esso avviene, con minore o maggiore lentezza a seconda della natura dei fluidi: la resistenza allo scorrimento mutuo delle molecole dicesi **viscosità**.

Fluidi perfetti diconsi dei fluidi (ipotetici, che si sostituiscono in una prima approssimazione ai naturali) privi di viscosità. Nel seguito ci riferiremo sempre a fluidi perfetti.

Pressione in un punto. In una massa fluida in equilibrio immaginiamo tracciata una superficie chiusa σ e tolto il fluido esterno; supponiamo possibile ristabilire l'equilibrio, in tal modo turbato, applicando su ogni elemento $d\sigma$ una forza $\perp$ a $d\sigma$, proporzionale all'elemento $d\sigma$, ma indipendente (pel **principio di Pascal**) dall'orientamento di $d\sigma$ stesso. Preso un punto P interno al fluido e $d\sigma$ un elemento piano a cui appartiene P , la pressione delle particelle a contatto di $d\sigma$ è una forza $p d\sigma$ ove p è funzione numerica di P (Capitolo LIII, § 3) e dicesi **grandezza specifica della pressione**; riferita al centimetro quadrato si misura ordinariamente in chilogrammi.

2. — **Equazioni d'equilibrio.** Sopra ogni elemento $d m$ di massa agisca una forza $\mathbf{F} d m$ dell'ordine di grandezza di $d m$ e se v'ha qualche superficie libera, ogni suo elemento $d \Omega$ sia soggetto ad una forza $\boldsymbol{\psi} d \Omega$; sotto l'azione di queste forze l'equilibrio sussista. Considerata una superficie σ chiusa, interna al fluido, deve sussistere l'equilibrio del fluido interno a σ sotto l'azione delle dette forze e delle pressioni esercitate lungo σ dal fluido esterno che denoteremo con $p \mathbf{n} d \sigma$, $\mathbf{n}$ essendo un vettore unitario $\perp$ a $d \sigma$ e rivolto verso l'interno di σ . Tolto il fluido esterno, aggiunte le pressioni $p \mathbf{n} d \sigma$, per un postulato della statica (Cap. LVIII, § 2) devono valere per l'equilibrio della porzione di fluido interno a σ le equaz. per l'equilibrio di un corpo rigido libero (pag. 445) cioè, posto $d m = \varrho d S$, ove ϱ è la densità (pag. 475), $d S$ l'elemento del volume S racchiuso da σ , si avrà (1) $\int_S \varrho \mathbf{F} d S + \int_{\sigma} p \mathbf{n} d \sigma = 0$, (2) $\int_S \varrho (P - O) \wedge \mathbf{F} d S + \int_{\sigma} (Q - O) \wedge p \mathbf{n} d \sigma = 0$, Q essendo un punto generico di σ . Ma (pag. 413) $\int_{\sigma} p \mathbf{n} d \sigma = - \int_S \text{grad } p d S$ onde la (1) diviene $\int_S (\varrho \mathbf{F} - \text{grad } p) d S = 0$ la quale dev'essere soddisfatta qualunque sia il volume S , ciò che esige sia (3) $\varrho \mathbf{F} - \text{grad } p = 0$. Pel teor. della rotazione (pag. 413) applicato al 2° termine, la (2) diviene $\int_S [\varrho (P - O) \wedge \mathbf{F} + \text{rot } p (P - O)] d S$, la quale dovendo sussistere qualunque sia S , porta (4) $\varrho (P - O) \wedge \mathbf{F} +$

$+ \operatorname{rot} p (P - O) = 0$; ma $\operatorname{rot} p (P - O) = \operatorname{grad} p \wedge (P - O)$ onde la (4) diviene $(P - O) \wedge (\varrho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p) = 0$ soddisfatta in virtù della (3); cioè le (1) e (2) si compendiano in (3) la quale è detta **equaz. indefinita d'equilibrio**, che dev'essere verificata in ogni punto del fluido. Cartesianamente, la (3) si scinde nelle $\varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $\varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, se X, Y, Z sono le proiezioni sugli assi di $\mathbf{F}$. Sulla superficie Ω limite del fluido, $\boldsymbol{\psi} d\Omega$ dovrà essere $\perp$ a $d\Omega$ e contraria alla pressione $p \mathbf{n} d\Omega$ esercitata dal fluido su $d\Omega$, cioè (5) **$\boldsymbol{\psi} = p \mathbf{n}$, equaz. al limite**, che dev'essere verificata in ogni punto di Ω . Cartesianamente la (5) si scinde in $A = p \cos(\mathbf{n}, x)$, $B = p \cos(\mathbf{n}, y)$, $C = p \cos(\mathbf{n}, z)$, se A, B, C sono le proiezioni sugli assi di $\boldsymbol{\psi}$. La (3) mostra che $\varrho \mathbf{F}$ deriva da un potenziale che è l'incognita pressione p . Da (3) segue che (6) $\operatorname{rot} \varrho \mathbf{F} = 0$ ossia $\varrho \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{grad} \varrho \wedge \mathbf{F} = 0$ e moltiplicando scalarmente per $\mathbf{F}$ (7) $\mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, cioè: affinché l'equilibrio sussista è necessario che $\mathbf{F}$ e $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ siano $\perp$ (cartesianamente, $X \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + Y \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + Z \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0$). Verificata per le forze questa condizione e per la densità ϱ se la (6) sussiste, da (3), integrando, si deduce $p = \int \varrho \mathbf{F} \times d\mathbf{P} + c$, in cui si determina la c , data la pressione in un punto. I valori di p sulla superficie limite Ω debbono verificare la (5). Se la forza $\mathbf{F}$ dipende da un potenziale, cioè $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u$, la (7) è soddisfatta e la (6) diviene (8) $\operatorname{grad} \varrho \wedge \operatorname{grad} u = 0$.

Le superficie $p = \text{costante}$ sono le superficie di egual pressione o **superficie isobariche**. Qualora $\mathbf{F}$ dipenda da un potenziale, la (8) mostra, essendo $\operatorname{grad} \varrho \parallel \operatorname{grad} u$, che le superficie $\varrho = \text{cost}$ (**superficie di egual densità**) coincidono colle $u = \text{cost}$. (**superficie equipotenziali**). Segue $\varrho = f(u)$ e, posto $\varphi(u) = \int f(u) du$ $\operatorname{grad} \varphi(u) = f(u) \operatorname{grad} u$, cioè anche le superficie isobariche coincidono colle equipotenziali.

3. — **Fluidi incompressibili.** Nei fluidi naturali esiste una relazione fra la pressione p la densità ϱ e la temperatura τ di un elemento, $f(p, \varrho, \tau) = 0$. I liquidi sono poco compressibili; considerando i liquidi come fluidi perfetti, ammetteremo che siano incompressibili, cioè la ϱ è indipendente dalla p .

Leggi di Boyle-Mariotte e di Gay-Lussac. Ammetteremo che i gas, come fluidi perfetti, soddisfino le leggi di Boyle-Mariotte e Gay-Lussac compendiate in $p = \frac{p_0}{\varrho_0} (1 + \alpha \tau)$ ove p_0 e ϱ_0 sono la pressione e la densità a 0° di temperatura e α il coefficiente di dilatazione: 0,00365.

Fluidi soggetti alla sola gravità. Considereremo, per semplicità, la temperatura costante. Preso l'asse z verticale volto in basso, le proiezioni di $\varrho \mathbf{F}$ sugli assi sono $X = 0, Y = 0, Z = \varrho g$; la (3) dà $p = \varrho \mathbf{F} \times dP = \varrho g dz$. Se il fluido è un liquido, ϱ è costante, onde (9) $p = p_0 + g \varrho (z - z_0)$ (p_0 pressione all'altezza iniziale z_0). Le superficie isobariche sono piani orizzontali. Se il fluido è un gas, $p = \varrho a$ (con a costante, avendo ammessa costante la τ) e la (3) dà $d p = g \frac{p}{a} dz$ cioè integrando $\log \frac{p}{p_0} = \frac{g}{a} (z - z_0)$. Le superficie isobariche sono ancora piani orizzontali.

Se un gas e un liquido sono a contatto, la superficie di separazione è un piano orizzontale.

Equilibrio relativo di un liquido pesante in un vaso che ruota uniformemente intorno ad un asse verticale. Si tratta di determinare la forma della superficie libera. L'equilibrio relativo sussiste sotto l'azione della gravità e della forza centrifuga (pag. 522); assunta una terna di assi collegata al vaso in cui z sia verticale e volto positivamente in alto, la prima dipende dal potenziale $-g z$, la seconda dal potenziale $\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$, onde la superficie libera, dovendo avere una superficie equipotenziale, si otterrà eguagliando ad un'opportuna

costante $-g z + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$; è perciò un paraboloide di rotazione (pag. 92) intorno a z .

Pressione di un liquido pesante in equilibrio sopra una parete piana. Se nella (9) $z = z_0$ è la superficie libera a contatto con l'atmosfera, p_0 la pressione atmosferica, posto $g \varrho = \beta$ e $z_1 = z_0 - (p_0 : \beta)$ la (9) diviene $p = \beta (z - z_1)$. Se Ω è la parete piana, G il suo baricentro, x, y, z le coordinate di un punto di $d\Omega$, la coordinata z di G è $\zeta = \frac{1}{\varrho g \Omega} \int_{\Omega} g \varrho z d\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} z d\Omega$. Le pressioni su Ω hanno per risultante $\mathbb{P} = \int_{\Omega} p d\Omega = \beta \int_{\Omega} (z - z_1) d\Omega = \beta (\zeta - z_1) \Omega$ cioè il prodotto dell'area Ω della parete per la pressione nel baricentro $\beta (\zeta - z_1)$. È $\mathbb{P}$ uguale al peso di un cilindro di liquido di base Ω e di altezza uguale alla distanza del baricentro di Ω dal piano $z = z_1$, detto **piano di carica**.

Centro di pressione dicesi il punto d'applicazione della risultante delle pressioni ($\perp$ ad Ω) e si determina colle formule che danno il centro di forze parallele (pag. 445).

Pressione su una superficie curva. Se invece di una superficie piana, Ω è una superficie curva, il complesso delle pressioni, non si riduce, in generale, ad una sola forza, ma ad una forza e ad una coppia. Se Ω è un pezzo di sfera, le pressioni passando tutte pel centro della sfera, si riducono ad una unica forza pel centro che dicesi ancora centro delle pressioni. Se Ω appartiene ad una superficie curva, ma il suo contorno l è piano, si consideri la superficie piana Ω_1 che ha per contorno l ; se il volume racchiuso da Ω e Ω_1 è tutto interno al fluido, le pressioni che si esercitano su Ω e Ω_1 equivalgono ad un'unica forza F_1 che è la spinta idrostatica (§ 4) applicata nel baricentro G del liquido spostato; le pressioni su Ω_1 equivalgono (caso precedente) ad un'unica forza applicata F_2 nel baricentro G_1 di Ω_1 ; le pressioni esercitate su Ω_1 equivalgono alle due forze F_1 applicata in G e $-F_2$ applicata in G_1 .

4. — **Corpo pesante immerso in un fluido.** Un corpo S sul quale agisce la sola gravità sia immerso in un fluido e sia in equilibrio; il fluido pure sia in equilibrio, agendo su ogni suo elemento $q dS$ una forza $q \mathbf{F} dS$; il fluido eserciterà su ogni elemento $d\sigma$ della superficie che limita il corpo una pressione $p d\sigma$, $\perp$ a $d\sigma$. Il sistema di queste pressioni ammetteranno una risultante $\mathbf{R} = \int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma$ ed un momento risultante (rispetto all'origine delle coordin.) $M - O = \int_{\sigma} (P - O) \wedge p \mathbf{n} d\sigma$. Nello spazio occupato dal fluido vale la (3): pensiamo prolungate con continuità entro σ le funzioni $\mathbf{F}$, q , p in modo che la (3) sia verificata anche all'interno di σ : allora $\mathbf{R} = - \int_S \text{grad } p dS = - \int_S q \mathbf{F} dS$, $M - O = \int_S \text{rot } p (P - O) dS = - \int_S (P - O) \wedge q \mathbf{F} dS$, cioè $\mathbf{R}$ e $M - O$ sono la risultante e momento risultante, volutati di segno, delle forze agenti sulla porzione di liquido pensata sostituita colla legge indicata al corpo (porzione che dicesi *liquido spostato*). Si conclude il

Principio d'Archimede generalizzato: un corpo rigido immerso in un fluido subisce un sistema di pressioni le cui coordinate sono uguali e di segno contrario a quelle delle forze esterne agenti sul liquido spostato.

In particolare un corpo rigido immerso in un fluido pesante subisce una pressione uguale ad una forza unica (**spinta idrostatica**) opposta al peso del liquido spostato applicato nel baricentro del liquido spostato (**principio d'Archimede propriamente detto**).

Se G è il baricentro di S e C il baricentro del fluido spostato (se S è omogeneo, $G \equiv C$), il corpo S è in equilibrio quando G e C sono sulla stessa verticale e il peso P del corpo eguaglia il peso Q del liquido spostato. Immergendo S nel liquido in modo che il piano della superficie libera del liquido stacchi da S una porzione di volume $P : a$, a essendo il peso dell'unità di volume del liquido, si realizza la condizione $P = Q$. Ciascuno di questi piani è detto **piano di galleggiamento** e la porzione di S staccata dal piano di galleggiamento **carena**; il baricentro della carena supposta riempita di liquido, **centro**

di carena; il luogo S_C dei centri di carena è detto **superficie dei centri di carena**; essa è convessa. In ogni punto C di S_C il piano tangente è $\parallel$ al piano di galleggiamento corrispondente a C . Perchè G e C siano sulla stessa verticale bisogna che la normale condotta da G a S_C sia verticale: tante sono le posizioni d'equilibrio quante sono le normali che si possono condurre da G a S_C . Perchè una data posizione d'equilibrio sia di equilibrio stabile è necessario che il baricentro sia al disotto del più vicino a C dei 2 centri di curvatura di S_C in C (**piccolo metacentro**).

CAPITOLO LXIX.

Dinamica dei fluidi

1. — **Equaz. del moto dei fluidi perfetti.** Se sopra ogni elemento del fluido (perfetto) di massa $dm = \rho dS$ agisce una forza $\rho F dS$, l'equaz. del moto si deduce col principio di D'Alembert (pag. 484) dall'equaz. d'equilibrio (la (3) della p. 535), cioè indicando con P un punto dell'elemento si ha l'**equaz. indefinita** (valida cioè per ogni punto) (1) $\frac{d^2 P}{dt^2} = F - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p$ (cartesianam. (1') $= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ e 2 analoghe); se F dipende da un potenziale U , l'equaz. (1) diventa: (2) $\frac{d^2 P}{dt^2} = \text{grad } U - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p$. Se il fluido è incompressibile ρ è costante e si suppone noto, se no, fra p e ρ passerà una relazione (3) $p = f(\rho)$ (equaz. caratteristica del fluido); posto allora $\pi = \int \frac{dp}{\rho}$ con

che $\frac{1}{\varrho} \text{grad } p = \text{grad } \pi$, la (2) diviene: (4) $\frac{d^2 P}{dt^2} = \text{grad } \Phi$, ove $\Phi = U - \pi$. La Φ dicesi **potenziale delle accelerazioni**.

Le (1') e (3) non bastano alla determinazione di x, y, z, ϱ, p ; una 5^a equaz. è offerta dalla invariabilità della massa di una qualunque porzione di fluido. Sia S_0 il volume occupato da una porzione di fluido all'istante t_0 , S quello occupato dalla stessa massa all'istante t , ϱ_0 la densità in un punto $P_0(a, b, c)$ di S_0 , ϱ la densità nello stesso punto venuto all'istante t in $P(x, y, z)$; dS_0 il volume dell'elemento individuato da P_0 , dS quello dell'elemento stesso nell'istante t : dovrà essere $\int_{S_0} \varrho_0 dS_0 = \int_S \varrho dS$.

Ma posto $D = \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)}$ è (pag. 267) $\int_S \varrho dS = \int_{S_0} \varrho D dS_0$, onde l'equaz. precedente diviene $\int_{S_0} (\varrho_0 - \varrho D) dS_0 = 0$ ed essendo S_0 arbitrario, $\varrho_0 = \varrho D$ ed anche (5) $\frac{d(\varrho D)}{dt} = 0$, che è detta **equaz.**

di continuità.

2. — **Equaz. di Lagrange.** Volendo seguire il moto di un elemento che inizialmente ha le coordin. a, b, c bisogna esprimere x, y, z in funz. di a, b, c, t . Moltiplicando le (1') per $\frac{\partial x}{\partial a}$,

$\frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$ e sommando, poi per $\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}$ ed infine per $\frac{\partial x}{\partial c},$

$\frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial c}$ si hanno le 3 **equaz. di Lagrange** (6) $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial a},$

$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial a} = X \frac{\partial x}{\partial a} + Y \frac{\partial y}{\partial a} + Z \frac{\partial z}{\partial a} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial a}$ e 2 analoghe cam-

biando a in b e c . In luogo di $\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial a}$ si può mettere $\frac{\partial \pi}{\partial a}$ e se

la F dipende dal potenziale U le (6) divengono (6') $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} +$

$+ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial \Phi}{\partial a}$ e 2 analoghe. Alle (6) o (6') va

aggiunta la (5) e costituiscono un sistema di equaz. alle derivate parziali del 2° ordine.

Se il liquido deve rimanere a contatto con una superficie $f(x, y, z, t) = 0$, dette u, v, w le proiezioni della velocità di un elemento a contatto, dovrà essere $\frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial f}{\partial z}w + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Equaz. di Eulero. Si vogliano determinare le proiezioni u, v, w della velocità con cui le molecole del fluido passano per un punto x, y, z (fissato in seno al fluido) nella successione dei tempi, insieme alla pressione e densità, cioè esprimere u, v, w, p, ϱ

in funzione di x, y, z, t . Poichè (8) $x'' = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w$ le (1') diventano (7) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w = X - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}$ e 2 analoghe, e se la $\mathbf{F}$ dipende da un

potenziale (9) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ (Φ definita

sopra) e 2 analoghe. Alle (9), dette **equaz. d'Eulero**, bisogna aggiungere l'equaz. di continuità che con le nuove variabili di-

viene: (5') $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho w)}{\partial z} = 0$ e l'equaz. (3).

Trovate p, ϱ, u, v, w , si devono poi integrare le 3 equazioni (10) $x' = u(x, y, z, t)$, $y' = v(x, y, z, t)$, $z' = w(x, y, z, t)$ per conoscere il moto del fluido.

Traiettorie delle molecole. L'integrazione del sistema (10) dà x, y, z in funzione di t e di 3 costanti, che possono essere i valori iniziali a, b, c di x, y, z ; l'eliminazione di t dà le traiettorie delle varie molecole del fluido.

3. — **Teor. della circolazione.** Consideriamo una linea chiusa tracciata nel fluido; la linea materiale s formata con le particelle che all'istante t occupano la linea detta, al variare di t varia di posizione e di forma nell'interno del fluido. Sulla configurazione s_0 di s all'istante t_0 , la posizione P_0 occupata da una particella sarà funzione di un parametro λ , la posizione P' che la stessa particella occupa all'istante generico t su s può

considerarsi funzione di t e λ , e per un dato istante t_1 la configurazione di s si avrà facendo variare λ , posto $t = t_1$.

Circolazione relativa alla linea s dicesi l'integrale $C = \int_s \mathbf{V} \times \times dP$, ove $\mathbf{V}$ è la velocità P' di P (pag. 414). Per le considerazioni precedenti, $C = \int_{s_0} P' \times \frac{dP}{d\lambda} d\lambda$ onde $\frac{dC}{dt} = \int_{s_0} P'' \times \times \frac{dP}{d\lambda} d\lambda + \int_{s_0} \frac{d(P'^2)}{d\lambda} d\lambda$. Se F dipende da un potenziale, vale la (4) onde $\frac{dC}{dt} = \int_{s_0} \frac{d}{d\lambda} (\Phi + P'^2) d\lambda = 0$, per essere s_0 una curva chiusa; la circolazione relativa ad una curva s chiusa è costante (**teorema della circolazione**).

Potenziale di velocità e sua conservazione. Ad un istante t_0 la velocità dei punti P del fluido soddisfa alla relazione $\mathbf{V} = \text{grad } \varphi$; dal teor. della circolazione segue che questa è nulla per qualunque linea chiusa, onde (pag. 414) che $\mathbf{V}$ è in qualunque istante il gradiente di una funzione $\varphi(x, y, z, t)$; φ dicesi **potenziale di velocità**. La (11) $\mathbf{V} = \text{grad } \varphi$ equivale alla (12) $\text{rot } \mathbf{V} = 0$.

Moto irrotazionale o non vorticoso, dicesi il moto di un fluido nell'ipotesi (12); **moto vorticoso** quando non esiste il potenziale di velocità (vedi § 5).

Ponendo nelle (8) $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, ecc. e $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = V^2 = (\text{mod } \mathbf{V})^2$ si trae $\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 \right]$, $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 \right]$, $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 \right]$, onde esiste il potenziale delle accelerazioni $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2$. La (4) dà $\text{grad} \left[\pi - U + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 \right] = 0$, cioè (10) $\pi - U + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 = f(t)$, con f funz. arbitraria del tempo. Se alla (13) si aggiunge l'equaz. caratteristica del fluido (3), e l'equaz. di continuità che

prende la forma (14) $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \operatorname{grad} \varphi) = 0$ od anche $\frac{\partial \varphi}{\partial t} +$
 $+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$, si hanno 3 equaz.

atte a determinare φ, p, ϱ , date le condizioni iniziali e ai limiti.

Nel caso dei fluidi incompressibili $\pi = p: \varrho$ e la (14) diviene $\Delta_2 \varphi = 0$ (pag. 409) cioè φ è funzione **armonica**.

4. — **Linee di corrente (o di flusso)** diconsi le ∞^2 linee definite dal sistema $dx:u = dy:v = dz:w$ ove in u, v, w si è fissato un valore di t ; in ogni loro punto P la tangente ha la direzione della velocità della molecola che in quell'istante si trova in P . Se u, v, w sono indipendenti dal tempo, le linee di corrente coincidono con le traiettorie delle molecole.

Moto stazionario (o permanente) dicesi il moto in questo ultimo caso. Se esiste il potenziale delle velocità non dipende da t , onde la (13) diviene (15) $\pi - U + \frac{1}{2} V^2 = \text{costante}$ e nel caso di liquidi omogenei (15') $\frac{p}{\varrho} - U + \frac{1}{2} V^2 = \text{cost.}$

Teor. di Bernouilli. In un moto stazionario (vorticoso o no) lungo ciascuna linea di corrente (o traiettoria) è $\pi - U + \frac{1}{2} V^2 = \text{costante}$, la quale costante varia da linea a linea a meno che il moto non sia irrotazionale.

Moto stazionario irrotazionale di un liquido soggetto alla sola gravità. In questo caso la (15') diviene (15'') $\frac{p}{\varrho} + gz + \frac{1}{2} V^2 = \text{cost}$ (l'asse verticale volto positivamente in alto) od anche indicando con $\mathbf{p}$ il peso ϱg dell'unità del liquido, (16) $z + \frac{p}{\mathbf{p}} + \frac{V^2}{2g} = \text{cost.}$ È $V^2:2g$ l'altezza da cui un grave deve cadere nel moto per acquistare la velocità V e dicesi **altezza** (o quota) **cinetica**; $\frac{p}{\mathbf{p}}$ si dice l'**altezza** (o quota, o colonna) **piezometrica** ed è l'altezza sopra P di una colonna liquida ca-

pace di produrre col suo peso la pressione p in P od anche l'altezza sopra P del piano di carica (pag. 538) supposto il liquido in equilibrio, quando è p la pressione in P . La (16) esprime che la somma dell'altezza effettiva di P , dell'altezza cinetica e della piezometrica è costante in ogni punto di liquido pesante animato da moto stazionario irrotazionale.

Teor. di Torricelli. Un liquido pesante è contenuto in un vaso, ha una superficie libera σ che è mantenuta a livello costante z_0 e sulla quale si esercita la pressione atmosferica; il liquido esce nell'aria per un piccolo orifizio della parete del vaso. Il moto è stazionario; se il livello si abbassa molto lentamente è sensibilmente stazionario; la V in σ è (o si può ritenere) $= 0$. Applicando la (15'') ad una linea di corrente che da σ

va al punto P , centro dell'orifizio, si ha su σ , $\frac{p_0}{\rho} + g z_0 = c$ e

in P , $\frac{p_0}{\rho} + g z + \frac{1}{2} V^2 = c$ onde $V = \sqrt{2 g h}$, ove $h = z_0 - z$

(differenza di livello di σ e P) è detto **battente** o **carico**; ma $\sqrt{2 g h}$ eguaglia la velocità (pag. 425) acquisita da un grave che nel vuoto cade dall'altezza h ; in ciò consiste il **Teor. di Torricelli**.

La pressione p ad un'altezza z è $p = p_0 + \rho g (z_0 - z) - \frac{1}{2} \rho V^2$ minore cioè di quella che alla stessa altezza si ha se il liquido è in equilibrio, che è $p_0 + \rho g (z - z_0)$ (pag. 537).

Contrazione delle vene liquide. Quando un liquido pesante esce da un foro Ω praticato nel fondo di un recipiente, supposto il battente abbastanza grande, si produce una vena che si restringe in sezione fino ad un minimo Ω_1 che dicesi **sezione contratta**; il rapporto $\Omega_1 : \Omega$ dicesi **coefficiente di contrazione** e varia da 0,64 per fori circolari ad un valore intermedio a 0,61 e 0,62 per fori rettangolari. Se il foro ha imboccatura cilindrica interna — **tubo di Borda** — il coefficiente di contrazione è prossimo a 0,5.

5. — **Moto vorticoso** è detto un moto quando non esiste il potenziale di velocità (§ 3), cioè $\text{rot } \mathbf{V} \neq 0$. Dette $2p, 2q, 2r$

le proiezioni sugli assi di $\text{rot } \mathbf{V}$, cioè $2p = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$, $2q = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$, $2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, indichiamo con $u_1(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t)$, $v_1(x + \xi, \dots)$, $w_1(x + \xi, \dots)$ le proiezioni della velocità di un punto P_1 infinitamente vicino a P di velocità $u(x, y, z, t)$, v, w ; sarà, all'infuori di infinitesimi d'ordine superiore, $u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta$, $v_1 = v + \frac{\partial v}{\partial x} \xi + \dots$, $w_1 = w + \frac{\partial w}{\partial x} \xi + \dots$. Posto $\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = a_{22}$, $\frac{\partial w}{\partial z} = a_{33}$, $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2a_{12}$, $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2a_{13}$, $\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2a_{23}$, si trae $u_1 = (u + q\zeta - r\eta) + (a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta)$, $v_1 = (v + r\xi - p\zeta) + (a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta)$, $w_1 = (w + p\eta - q\xi) + (a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}\zeta)$, cioè la velocità di P_1 è la risultante di 2, la 1^a è $\frac{dP}{dt} + \omega \wedge (P_1 - P)$,

posto $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{V}$, cioè la velocità che P_1 avrebbe se appartenesse ad un intorno rigido di P (pag. 431), animato da una traslazione di velocità $\frac{dP}{dt}$ e da una rotazione ω ; la 2^a di proiezioni sugli assi $\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}$ (posto $2\Theta = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{13}\xi\zeta + 2a_{23}\eta\zeta$) normale (pag. 329) alla quadrica $\Theta = \text{cost}$, di centro P e passante per P_1 , velocità dovuta ad un moto intestino (di dilatazione o contrazione) dell'intorno di P_1 .

Rotazione del fluido in P all'istante t è il vettore $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{V}$.

Linee vorticali (o **vorticose**) sono state denominate dall'Helmoltz le linee definite da $dx:p = dy:q = dz:r$ le cui tangenti in un punto hanno la direzione di ω relativo a quel punto.

Vortice si dice il fascio di linee vorticali uscenti dai punti di un'asse σ ; se σ è infinitesima dicesi **vortice elementare**; si dice **vorticoide** una superficie formata da una semplice infinità di linee vorticali.

Poichè $\text{div } \omega = 0$, se ω_n è la proiezione di ω sulla normale interna ad una superficie σ chiusa interna al fluido, il teor. della divergenza (pag. 413) dà $\int_{\sigma} \omega_n d\sigma = 0$. Un tronco di vortice sia limitato da 2 sezioni σ_1 e σ_2 ed s sia la porzione di vorticoide che lo limita lateralmente; poichè la componente di ω normale a s è nulla, sarà $\int_{\sigma_1} \omega_{n_1} d\sigma_1 = \int_{\sigma_2} \omega_{n_2} d\sigma_2$, la normale a quest'ultima diretta nello stesso senso della prima.

Intensità del vortice è il valore costante $\int_{\sigma} \omega_n d\sigma$ per ogni sezione σ del vortice.

Portata di un vortice elementare è il prodotto ω per σ sezione normale; lungo un vortice elementare la portata è costante. Segue che un vortice non può terminare entro il fluido; o termina alla superficie limite del fluido, o si chiude in se stesso (forma anulare) o continua indefinitamente entro il fluido (**Teor. di Helmholtz**).

Se $M_o(a, b, c)$ è la posizione di una molecola che all'istante t ha la posizione $M(x, y, z)$ l'asse di rotazione relativo a M_o (per $t=0$) diventa l'asse di rotazione relativo ad M e le molecole che stanno su di un vortice vi restano sempre.

ABBREVIAZIONI

$\equiv$ posto fra punti, rette, o piani significa coincidenza dei punti, rette o piani.

$\parallel$ significa parallelo.

$\perp$ » perpendicolare.

cartes. = cartesiano, cartesianamente.

coeffic. = coefficiente.

converg. = convergente.

coord., coordin. = coordinate.

cost. = costante.

determ., determin. = determinante.

diverg. = divergente.

equaz. = equazione.

funz. = funzione.

identic. = identicamente.

ortog., ortogon. = ortogonale.

pluck. = pluckeriano.

success. = successione.

teor. = teorema.

ERRATA-CORRIGE.

Pag. 196, riga 13 in luogo di: « sia $-p$ » si legga « sia $-p:3$ ».

INDICE.

GEOMETRIA ANALITICA

Cap. I.	Sistemi di coordinate e loro trasformazioni.	Pag.	3
» II.	Geometria nelle forme di prima specie	»	18
» III.	Rappresentazione analitica delle curve piane, superficie e curve gobbe	»	23
» IV.	La retta nel piano e il punto come involuppo delle rette per esso	»	31
» V.	Curve piane speciali	»	39
» VI.	Le Coniche	»	45
» VII.	Il piano nello spazio e il punto come involuppo di piani per esso. La retta nello spazio.	»	60
» VIII.	Alcune superficie e curve storte speciali	»	72
» IX.	Le Quadriche	»	77
» X.	Proiettività fra forme di 2 ^a specie	»	99
» XI.	Proiettività fra forme di 3 ^a specie	»	104

ALGEBRA.

» XII.	Congruenze	»	111
» XIII.	Calcolo combinatorio e sue applicazioni	»	113
» XIV.	Probabilità	»	117
» XV.	Sostituzioni	»	118
» XVI.	Determinanti	»	121
» XVII.	Sistemi di equazioni lineari.	»	128
» XVIII.	I numeri reali e la corrispondenza fra essi e i segmenti	»	132
» XIX.	Numeri complessi	»	139
» XX.	Limiti	»	145
» XXI.	Le serie.	»	152
» XXII.	Prodotti infiniti e frazioni continue	»	159
» XXIII.	Generalità sulle funzioni	»	163

Cap. XXIV.	Funzioni razionali intere.	Pag. 169
» XXV.	Primi teoremi sulle equazioni algebriche	» 176
» XXVI.	Funzioni simmetriche delle radici	» 178
» XXVII.	Risultato — Eliminazione — Discriminante	» 182
» XXVIII.	Sostituzioni lineari — Trasformazioni nelle equazioni	» 186
» XXIX.	Equazioni binomie, cubiche e biquadratiche	» 195
» XXX.	Risoluzione algebrica delle equazioni	» 199
» XXXI.	Separazione delle radici	» 202
» XXXII.	Risoluzione numerica delle equazioni	» 205

CALCOLO INFINITESIMALE.

» XXXIII.	Altre nozioni generali sulle funzioni — Con- tinuità e discontinuità	» 211
» XXXIV.	Infinitesimi ed infiniti	» 216
» XXXV.	Integrale definito	» 219
» XXXVI.	Derivate e differenziali delle funzioni d'una variabile	» 222
» XXXVII.	Derivate e differenziali delle funzioni di più variabili	» 230
» XXXVIII.	Integrazione indefinita	» 238
» XXXIX.	Integrali di funzioni aventi punti di infinito ed integrali estesi ad intervalli infiniti	» 256
» XL.	Integrali delle funzioni di più variabili.	» 259
» XLI.	Funzioni implicite	» 271
» XLII.	Formule abbreviate del Taylor — Espressioni che si presentano sotto forma indeterminata	» 275
» XLIII.	Crescenza e decrescenza delle funzioni; mas- simi e minimi	» 280
» XLIV.	Serie di funzioni — Serie di potenze — Svi- luppi in serie delle funzioni — Funzioni trascendenti elementari	» 285
» XLV.	Applicazioni del Calcolo alle linee piane	» 299
» XLVI.	Applicazioni del Calcolo alle linee storte	» 319
» XLVII.	Applicazioni del Calcolo alle superficie	» 329
» XLVIII.	Equazioni differenziali	» 353
» XLIX.	Sistemi di equazioni differenziali	» 372
» L.	Equazioni alle derivate parziali	» 378
» LI.	Elementi del Calcolo delle variazioni	» 386

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE.

Cap. LII.	Definizioni ed operazioni sui vettori.	Pag. 395
» LIII.	Punti o vettori funzioni di variabili numeriche Funzioni di un punto	» 404
» LIV.	Applicazioni geometriche ed analitiche della teoria dei vettori.	» 409

MECCANICA RAZIONALE.

» LV.	Cinematica del punto	» 417
» LVI.	Moti finiti di un sistema rigido e loro composizione	» 425
» LVII.	Analisi del moto istantaneo di un sistema rigido — Moto continuo di un sistema rigido	» 430
» LVIII.	Principi fondamentali della Statica	» 440
» LIX.	Il principio dei lavori virtuali	» 448
» LX.	Equilibrio dei sistemi articolati e dei fili	» 454
» LXI.	La Dinamica del punto materiale libero	» 461
» LXII.	Geometria delle masse.	» 474
» LXIII.	Il principio di D'Alembert e le equazioni generali della Dinamica	» 484
» LXIV.	Teoremi generali sul moto di un sistema e loro applicazioni	» 496
» LXV.	Dinamica dei sistemi rigidi	» 507
» LXVI.	Moto ed equilibrio relativo.	» 521
» LXVII.	Attrazione newtoniana	» 527
» LXVIII.	Statica dei fluidi	» 534
» LXIX.	Dinamica dei fluidi	» 540
	Tavola delle abbreviazioni	» 549
	Indice alfabetico-analitico	» 555

INDICE ALFABETICO-ANALITICO

I postulati, principi, teoremi e problemi che si indicano di solito con il nome dell'autore, si trovano sotto il nome stesso; così pure per le curve e superficie.

A

- Abel**, teor. sulle serie numeriche 155, sulle serie di potenze 287.
- Accelerazione** nel moto rettilineo uniform. vario 419, rettilineo in generale 419, curvilineo 419, tangenziale e normale 420, nel moto uniforme 420, di 2° ordine 420, in coordin. polari 421, relativa, di strascinamento, complementare (o di Coriolis), assoluta 432, angolare 433, centripeta 433, potenziale di accelerazione 541.
- Addizione** fra numeri irrazionali 134, numeri complessi 139, delle serie 155, di un punto con un vettore 395, di due o più vettori 396, di forze 443.
- Affinità** piana 100, equivalente 100, omologica 102, ortogonale 102, nello spazio 104.
- Affisso** di un numero complesso 142.
- Aggregato** di numeri reali 145, condensato, limitato o no, 145, derivato 146, numerabile 147, ordinato 146, 148, di numeri complessi 148.
- Agnesi** (visiera di) equaz. 43, area 303.
- Altezza** cinetica e piezometrica 544.
- Ampiezza** di una rotazione 426.
- Amplitudine** 297.
- Anelasticità** dei corpi 520.
- Angoli euleriani** 71, componenti della rotazione istantanea espressa per gli angoli euleriani 439.
- Angolo** di 2 rette nel piano 34, di 2 direzioni nello spazio 13, di 2 rette nello spazio 66, idem in assi non ortogonali 71, di una retta e di un piano 67, di 2 curve 308, 321.
- Anomalia** 5, eccentrica 473.
- Apollonio**, teor. sulle coniche 56.
- Approssimazione** nel calcolo della somma di una serie 157, nel calcolo delle radici razionali di una equaz. 206-208, id. delle radici complesse 208, nelle quadrature 301, 302.
- Apsidi** 473.
- Archimede**, principio di idrostatica 539.
- Area** di un triangolo mediante le coord. dei vertici, nel piano 36, nello spazio 71, di un poligono 36, di una figura piana 299-300 approssimata 301, di alcune curve piane (vedi i nomi delle curve) 302-304, delle superficie gobbe 349, delle superficie di rotazione 349, integrale delle aree 504.

Argomento di un numero complesso 140.

Ascissa sulla retta 3, angolare 5.

Asintoti nelle coniche 50, nelle curve in generale 312, nelle curve algebriche 313.

Asintotiche 341.

Aspettativa matematica 118.

Asse radicale di un fascio di cerchi 41, centrale di un fascio di sfere 73, radicale di una rete di sfere 74, delle coniche a centro 50, della parabola 51, di omologia 101, del circolo osculatore 334, di una coppia 403, centrale di un sistema di di vettori 404, di istantanea rotazione 438, di moto istantaneo elicoidale 439, principale d'inerzia 483, centrale d'inerzia 483, di sospensione e di oscillazione nel pendolo composto 511, permanente e spontaneo di rotazione di un corpo 511, di figura nel giroscopio 516.

Assi cartesiani nel piano 6, nello spazio 12.

Asteroide equaz. 12, area 303, lunghezza 306, evoluta 317, baricentro di metà, come linea e come area 477.

Asteroide di rotazione volume 342, area 352.

Asteroide solido equaz. 75, volume 347.

Attrazione, forza d'a. 466, lavoro e potenziale di una forza d'a. 466, mutua di 2 punti 498, universale 527, attraz. newtoniana di un sistema materiale 527, di uno strato sferico omogeneo 528, della superficie sferica omogenea 529, di un omeoide elementare e di un omeoide qualunque 530, di un ellissoide 531, di alcune figure speciali 532, di un corpo da punti

lontani 533, teor. generali sull'attraz. newtoniana 533.

Attrito 447.

Azimut 72.

Azione d'un sistema materiale 506, teor. dell'azione variante e stazionaria 506, principio della minima azione 507.

B

Baricentro 474, di linee, superficie e volumi speciali 476-478, di un sistema articolato piano 478, conservazione del moto del baricentro 502.

Battente o carico 545.

Bernoulli: lemniscata equaz. 43, area 303, lunghezza 307, curvatura 316, volume di rotazione 348; numeri di B. 292, equaz. differenziale 359, teor. di idrodinamica 544.

Bézout teor. sull'eliminazione 184, metodi per la formazione del risultante 183-184.

Binet teor. sulla moltiplicaz. delle matrici 127, intensità della forza centrale nota la traiettoria 473, ellissoide 484.

Binormale alle linee storte 323, 411.

Birapporto di 4 punti 4, di 4 rette, di 4 piani 6, di 4 soluzioni di un'equazione di Riccati 359.

Borda (tubo di) 545.

Boyle-Mariotte legge sui fluidi 537.

Braccio di una coppia 403, del momento d'inerzia rispetto ad un piano 479.

Budan, teor. sulle equaz. algebriche 203.

C

- Caduta dei gravi** nel vuoto o in un mezzo resistente 470, tenendo conto della rotazione della terra 523.
- Cahen**, criterio di convergenza per le serie 154.
- Calcolo delle variazioni** 386-391.
- Cambiamento** di assi, vedi trasformazione delle coordinate; camb. della variabile indipendente nella derivazione 239, camb. di variabili negli integrali semplici 240, negli integrali multipli 266-268.
- Campo** di definizione delle funzioni 167, perfetto 167, di razionalità 199.
- Cantor** teor. dell'uniforme continuità per le funz. di 1 variabile 212, di più variabili 215.
- Capelli** teor. sulle equaz. lineari 130.
- Caratteristica** di una matrice 122, d'una omologia 101, di una superficie 331, equaz. caratteristica di un'equaz. differenziale lineare 366.
- Cardioide** equaz. 42, area 303, lunghezza 306, area di rotazione 353.
- Carena** di un galleggiante 539.
- Carico** in un vaso contenente liquido 545.
- Cartesio** regola dei segni 203.
- Cassini** ovale (o cassinoide) 43.
- Catenaria** equaz. 44, area 304, lunghezza 306, curvatura 316, evolvente 318, baricentro 477, configurazione d'equilibrio d'un filo omogeneo pesante 458.
- Catenaria d'egual resistenza** equaz. 44, lunghezza 307, curvatura 316.
- Catenoide** equaz. 75, curvatura 339, volume 348, area 353.
- Cauchy** determinante 125, teor. sui limiti 147, 149, metodo pel calcolo delle funz. simmetriche 181, per la formazione del risultante 184, teor. del valor medio generalizzato 275, teor. sulle serie di potenze 287, 289.
- Cavallo-vapore** 467.
- Cayley** curve equipontenziali 410.
- Centro** di un'involuzione 21, radiale di 3 cerchi 41, delle coniche 49, 53, radicale di un sistema di cerchi 74, delle quadriche 86, d'omologia nel piano 101, id. nello spazio 105, di curvatura delle linee piane 316, 411, idem delle linee storte 327, di curvatura principale d'una superficie 343, di riduzione di un sistema di vettori 404, d'istantanea rotazione 435, delle accelerazioni 436, di curvatura delle traiettorie nel moto piano 437, idem delle cicloidi in generale 437, delle forze parallele 445, di percossa 517, di pressione di un liquido sopra una parete piana 538, di carena 540.
- Cerchio** equaz. cartesiana 39, polare e pluckeriana 40, tangente al cerchio 39, C. per 3 punti 40, intersezione di 2 C. 40, potenza di 1 punto rispetto ad un C. 40, fascio di C. asse e centro radicali 41, evolvente del C. 318, area 302, lunghezza 305, C. osculatore alle curve piane 315, id. alle storte 327, C. dei flessi 436, baricentro di un arco o di un settore 477, momenti d'inerzia di un C. rispetto a certi assi 480, C. di convergenza delle serie di potenze 288.
- Charpit** integrazione di equaz. alle derivate parziali 384.

- Chasles** teor. sull'attrazione di omeoidi 532.
- Chellini** (elissoide di) 484.
- Cicloide** equaz. 41, area 303, lunghezza 306, curvatura 316, evoluta 317, volume di rotazione 318, area di rotazione 313, baricentro 477, cicloidi in generale 437.
- Cilindri** equaz. cartesiana 28, 76, equaz. alle derivate parziali a cui soddisfano 380, cilindri quadrici 91.
- Circolazione** di un vettore 416, teor. della circol. (o di Stokes) in un campo vettoriale 414, id. in un fluido 542.
- Circoli storti** 328.
- Cissoide** vedi **Diocle**.
- Clairaut** teor. sulle geodetiche 342, equaz. differenziale 360, equaz. alle derivate parziali 385.
- Classe** di un involuppo algebrico piano di rette 26, di un involuppo algebrico di piani 30, di una permutazione 113.
- Classi contigue** 132.
- Classificazione** delle coniche 48-49, delle quadriche a centro 88, prive di centro 91, delle quadriche mediante i segni degli invarianti 94, delle funzioni 164-165.
- Clebs** (elissoide di) 483.
- Coefficiente** angolare di una retta nel piano 5, 7, 31, d'attrito 447-448, d'elasticità all'urto 520, di contrazione delle vene liquide 545.
- Collineazione** fra 2 piani 99, fra piani sovrapposti 101, fra 2 spazi 105, fra 2 spazi sovrapposti 105, assiale 105.
- Combinazioni** semplici 114, con ripetizione 114, combinaz. integrabili nei sistemi di equaz. differenziali 375.
- Complemento** algebrico in un determinante 123.
- Complessi** (algoritmo dei) nella teoria dei vettori 400.
- Componenti** di un vettore 396, della velocità e accelerazione sul raggio vettore e sulla sua normale 421, tangenziale e normale dell'accelerazione 420, della rotazione istantanea d'una terna mediante gli angoli euleriani 439, dell'impulso di un sistema 491, generali della velocità 491.
- Concavità** delle curve piane 310.
- Concoide** vedi **Nicomede**.
- Congruenza** fra punteggiate 21, fra numeri 111.
- Coni** equaz. cartesiana 28, 76, quadrici 89, cono assintotico di una quadrica 86, equaz. alle derivate parziali a cui soddisfano 380, fisso e mobile degli assi di istantanea rotazione 438, d'attrito 448.
- Coniche** equaz. cartesiana e plucke-riana 45, degenerare 46, per 5 punti o tangente a 5 rette 46, tangente ad una conica e punto di contatto 47, 48, 54, intersezione di una conica con una retta propria 49, id. impropria 48, centro delle C. 49, diametri, diametri coniugati, asintoti, assi 50, polarità subordinata da una conica 51, centro 53, equaz. canonica 53, equaz. delle C. riferite agli assi 53, equaz. parametriche 54, fuoco 54, direttrice, eccentricità 55, proprietà metriche 55, 56, id. focali 56, 57, equaz. in coordin. polari 57, comportamento dell'equaz. delle C. per trasformazioni di coordinate 57, 58, fasci e schiere di coniche 58-60, C. concentriche ed omotetiche 59, omofocali 60, C. focali di una quadrica 99, curvatura delle C. 316.
- Conservazione** dell'energia 467, 499, del potenziale di velocità nel moto di fluidi 543.

Contatto fra curve piane 313.

Continuazione analitica 288, 289.

Continuità delle funzioni 168, 212, delle serie di funzioni continue 286, delle funz. vettoriali 405, equaz. della cont. nella Dinamica dei fluidi 541.

Contrazione delle vene liquide 545.

Convergenza delle serie 152, semplice, incondizionata, assoluta 152, criteri di convergenza 153-155, delle serie di funzioni 285, delle serie doppie 158, dei prodotti infiniti 159, delle frazioni continue 161.

Convessità delle curve piane 310.

Coordinata baricentrica sulla retta 3, 9, birapporto sulla retta 4, birapporto in un fascio di rette o piani 6, proiettive d'un punto sulla retta 4, proiettive omogenee id. 4, tangente nel fascio di rette 5, proiettiva di una retta nel fascio 6, proiettiva omogenea id. 6.

Coordinate cartesiane di 1 punto nel piano 7, cartes. omogenee id. 7, trilineari o trimetriche id. 8, proiettive id. 8, proiettive omogenee id. 8, polari id. 9, bipolari id. 10, triangolari id. 10, pluckeriane di 1 retta nel piano 10, 13, pluckeriane omogenee 11, trilineari o trimetriche id. 11, proiettive id. 11, proiettive omogenee id. 12, polari id. 12, cartesiane di un punto nello spazio 12, cartesiane omogenee id. 15, proiettive id. 15, proiettive omogenee id. 15, polari o geografiche id. 15, pluckeriane di un piano 16, 61, plucker. omogenee id. 17, proiettive id. 17, proiettive omogenee 18, ellittiche 98, curvilinee su una superficie 335, di un asse 401, di un vettore 401, di un sistema di

vettori 402, di un sistema di forze 443, lagrangiane di un sistema di punti 453.

Coppia di vettori 403, di forze 444, d'impulso 502, d'impulso in un sistema rigido 508.

Corpi fluidi vedi **Fluidi**; pesanti immersi nei fluidi 539.

Correlazione fra 2 piani 102, fra piani sovrapposti 102, involutoria 103, fra 2 spazi 106, nulla o focale 107, involutoria o polarità 107.

Corrispondenza fra numeri reali e i punti d'una retta 137, fra numeri complessi e i punti di un piano 141, fra aggregati 163.

Coseno 291, iperbolico 291, amplitudine 298.

Coseni direttori di una retta 13, 33.

Cotes metodo di quadratura approssimata 301.

Covariante di forme algebriche 190, delle forme quadratiche, cubiche, biquadratiche 191.

Cramer risoluzione dei sistemi di equaz. lineari normali 128.

Calmann (ellissoide di) 483.

Curva algebrica piana 24, degenerare 24, simmetrica rispetto ad un punto o ad un asse 25, unicursale o di genere zero 26, gobba o storta 30, logaritmica 309, osculatrice 315, variata nel Calcolo delle variazioni 387, integrale 362, 373, dei ponti sospesi 458.

Curvatura assoluta, media di un arco piano 315, id. in un punto 316, delle coniche 316, media di flessione di un arco di linea storta 324, di flessione di un punto id. 324, media di torsione di un arco di linea storta 325, di torsione in un punto 326, di flessione in una linea su una superficie 339, media (o di Sophie Germain), to-

tale di una superficie 339, di Casorati 340.

Cuspidi nelle curve piane 311.

D

D'Alembert teor. sulle equaz. algebriche 176, equaz. differenziale 360, formula nelle equaz. differenz. lineari omogenee 365, integrazione di un sistema di 2 equaz. differenz. lineari 374, principio della Dinamica 484.

Darboux teor. per le funz. di 1 var. riabile 220, id. di più variabili 259.

Dedekind (postulato di) 133.

Degenerescenza di una curva algebrica 24, di un involuppo algebrico di rette 26, di una superficie algebrica 28, di un involuppo algebrico di piani 30 delle coniche 46, delle quadriche 78.

Delta amplitudine 298.

Densità 475.

Derivata di una funz. razionale intera di 1 variabile 172, di più variabili 175, delle funz. di 1 variabile generali 222, a destra e a sinistra 222, della somma, prodotto e quoziente di funz. 223, di un integrale 223, significato geometrico 223, 231, D. delle funzioni inverse 223, di funz. di funzione 223, successive 227-229, D. parziali delle funz. di più variabili 230, successive 232-233, in una direzione 234-235, delle funz. composte 235, di un determinante 236, del Wronskiano 236, D. successive delle funz. composte 237, D. delle funz. implicite 271-273, di un integrale rispetto ad un parametro 262, di una serie di funzioni 286, di potenze 287, 289, di un punto e di un vettore 405,

di un prodotto scalare e vettoriale 405, 406, D. parziali di un punto o di un vettore 406-407, della coppia d'impulso 503.

Determinanti definizioni 121, minori 122, reciproco 124, simmetrico, gobbo, emisimmetrico 124, delle differenze (di Cauchy o di Vandermonde) 125, circolante 126, speciali 126, ortogonale 127, wronskiano 229, jacobiano o funzionale 191, 238, Hessiano 191, 311, moltiplicazione di determinanti 127.

Diametri delle coniche 50, id. coniugati 50, delle quadriche 86, id. coniugati 87.

Differenziale delle funz. di 1 variabile 228, significato geometrico 228, della somma, prodotto e quoziente di funz. 228, di funz. di funzione 228, parziale o totale delle funz. di più variabili 231, significato geometrico 232, successivi 233-234, delle funz. composte 235, delle funz. implicite 271-274 di un arco di curva piana 304, id. storta 320, id. in coordin. curvilinee 336, D. esatto di una funz. di più variabili 353-354, di un punto o di un vettore 406, della forza viva 498.

Dimensioni delle grandezze fisiche 468.

Diname 444, principali d'inerzia 519.

Dinamica, leggi fondamentali 461, del punto materiale libero 461-474, principio D'Alembert 484, equaz. generale della D. 485, equaz. di Lagrange nella 1^a forma 485, id. nella 2^a forma 492, 500, id. di Hamilton 493, 500, teor. generali sul moto di un sistema e loro applicazioni 496-506, D. del moto relativo 521, dei fluidi 540-547, moti speciali vedi sotto **Moto**.

Dine 468.

Diocle (cissoide di) equaz. 43, area 304, lunghezza 307, asintoti 313.

Diofanto (equaz. di) risoluzione mediante le congruenze 111, mediante le frazioni continue 163.

Direttrice di una conica 55.

Dirichlet teor. sulle serie 155, sulla stabilità dell'equilibrio 500.

Discriminante di una conica 46, di una quadrica 77, di 2 equaz. algebriche 185, di una forma quadratica 188.

Disposizioni semplici o con ripetizione 114.

Distanza di un punto da una retta nel piano 35, id. nello spazio 69, di 2 punti nel piano 36, id. nello spazio 70, di un punto da un piano 63, focale 55, di un punto di una conica da un fuoco 55, minima fra rette sghembe 70.

Divergenza delle serie 152, delle serie doppie 158, dei prodotti infiniti 159, delle frazioni continue 161, di un vettore 408, teor. della divergenza 413.

Divisione fra numeri reali 135, complessi 139, fra funz. razionali 170.

Divisibilità fra funz. razionali intere di 1 variabile 170-171. id. di più variabili 174.

Dupin (indicatrice di) 337.

Duplicazione del cubo 44.

E

Eccentricità delle coniche 55.

Elasticità 520.

Elica circolare equaz. 75, lunghezza 320, flessione e torsione 306.

Elica cilindrica 326.

Elica conica equaz. 75, cilindro-conica 75, lunghezza 320, flessione e torsione 306.

Elicoide sviluppabile 75, a piano direttore 75, 339, asintotiche 342.

Ellisse equaz. cartesiane 53, pluckeriana 54, polare 57, parametriche 54, di gola 90, focale 99, area 302, lunghezza 305, evoluta 317, baricentro della 4^a parte 478, momento d'inerzia rispetto a certi assi 481.

Ellissoide equaz. cartesiana 89, pluckeriana 92, volume 346, area 351, di rotazione 352, baricentro dell'8^a parte 478, momento d'inerzia rispetto a certi assi 481, di inerzia o di Poinsot 482, di girazione o di Clebs 483, di Culmann 483, attrazione di un ellissoide 531.

Energia cinetica vedi **Forza viva**.

Energia potenziale di un punto 467, di un sistema 497, conservazione dell'energia 499.

Eliminazione fra equaz. algebriche 184, 185.

Enneper teor. sulle asintotiche 341.

Epicycloide 41.

Equazione di una curva piana 23, id. algebrica 24, parametriche di una curva piana 25, di un inviluppo piano di rette 26, id. algebrico 26, parametriche di un inviluppo 27, di una superficie 27, id. algebrica 27, di una superficie cilindrica, conica, di rotazione 28, parametriche di una superficie 29, di un inviluppo di piani 29, id. algebrico 30, di una linea gobba 30, parametriche di linea gobba 30.

Equazioni lineari: sistema normale 128, m equaz. omogenee ad n incognite e casi particolari 128-130, sistemi di equaz. non omogenee 130, 131.

Equazioni algebriche: esistenza di una radice 176, di n radice 177,

radici multiple 177, 185, somme delle potenze simili delle radici 179, relazioni fra coefficienti e radici 178, radici comuni a più equazioni e formazione del risultante 182, 184, discriminante 185, trasformazioni delle equaz. algebriche 193-194, equaz. reciproche 193, binomie 195, cubica 196-197, bi-quadratica 197-199, risoluzione algebrica delle equaz. 199-201, separazione delle radici 202-205, risoluzione numerica delle equaz. 205-208, ai quadrati delle differenze delle radici 204.

Equazioni differenziali: generalità 354, del primo ordine 355, esistenza dell'integrale 355, differenziale esatta e fattore integrante 357, a variabili separate 357, omogenea 357, lineare del 1° ordine 358, di Bernouilli, di Riccati 359, non risolte per la derivata 359, di Lagrange (o Monge, o D'Alembert), di Clairant 360, integrazione per approssimazione 360, id. per serie 361, generalità sull'equaz. di ordine 2° 361, 362, idem. di ordine n 363, equaz. lineari omogenee 364-368, id. a coefficienti costanti 366, 368, id. di tipi speciali 368, lineari complete 368, tipi non lineari 369, 371, integrazione per serie 371, generalità sui sistemi di primo ordine 372, due equaz. lineari del primo ordine 374, combinazioni integrabili 375, sistemi di ordini superiori 376, equaz. ai differenziali totali 377.

Equazioni alle derivate parziali lineari del primo ordine 378-381, delle superficie cilindriche, coniche 380, delle superficie di rotazione 381, generali del 1° ordine 381-384, tipi speciali 384-386, me-

todo di integrazione di Lagrange-Charpit 384.

Equilibrio definizioni 441, di un corpo rigido libero, di un corpo con un punto fisso, con un asse fisso 445, di un punto sopra una superficie o linea, di un corpo appoggiato ad uno fisso 445, principio dei lavori virtuali 449, equaz. generale della Statica 451, id. coi moltiplicatori di Lagrange 451, id. in coordinate lagrangiane 453, id. se le forze dipendono da un potenziale 453, equilibrio dei sistemi articolati 454, di un filo vedi **Filo**, stabilità dell'equilibrio 500, equaz. dell'equilibrio relativo 522, id. di un punto pesante sopra una curva di un piano verticale animato di un moto traslatorio 523, idem. animato di moto rotatorio 524, equilibrio dei fluidi vedi **fluidi**.

Equipollenza nel piano 102, nello spazio 106.

Equivalenza fra sistemi di vettori 402, id. di forze 443.

Erg 468.

Erpoloide 438, 513.

Espressioni analitiche 165, irrazionali semplici 200, di forma indeterminata: $\frac{0}{0}$ 277, $\frac{\infty}{\infty}$ 278, 0. ∞ ,

0^0 , 1^∞ , ∞^0 , $\infty - \infty$ 279.

Eulero, relazione fra i 6 segmenti determinati da 4 punti di una retta 18, formazione del risultante 183, risoluzione equaz. di quarto grado 198, teor. sulle funzioni omogenee 237, relazione fra le funz. circolari e l'esponenziale 291, teor. sulla curvatura delle linee su una superficie 338, equaz. nel Calcolo delle variazioni 338, curvatura del luogo dei centri

istantanei di rotazione 437, equaz. moto dei fluidi 542.

Evoluta delle curve piane 316, delle storte 336.

Evolventi delle curve piane 317, delle storte 333.

F

Fascio di raggi di rette 5, di semipiani e di piani 6, 19, 21, 62, di curve 25, di cerchi 41, di coniche 59, di sfere 73, di quadriche 95.

Fattore integrante 357.

Fermat, teoremi 112.

Ferrari, risoluzione equaz. di 4° grado 198.

Filo, soggetto ad un numero finito di forze 455, idem ad una distribuzione continua di forze 457, equaz. indefinita e agli estremi di equilibrio 457, id. interseche 457, casi particolari 458, appoggiato ad una superficie 459, modo di riconoscere se una configurazione del filo è di equilibrio 460.

Flessi 310, 311.

Flessione vedi *curvatura*.

Fluidi perfetti 534, pressione in un punto 535, equaz. d'equilibrio indefinita e al limite 536, incompressibili 537, soggetti alla sola gravità 537, equilibrio relativo di un liquido pesante in un vaso che ruota 537, pressione sopra una parete piana, su una superficie curva 538, corpo pesante immerso in un fluido 539, equaz. caratteristica del fluido 540, equaz. indefinita del moto 540, equaz. di continuità 541, equaz. di Lagrange 541, equaz. di Eulero 542, teor. della circolazione 542, moto irrotazionale 543, id. stazionario 544, teor. di

Bernouilli 544, moto stazionario irrotazionale di un liquido pesante 544, teor. di Torricelli 545, contrazione delle vene liquide 545, moti vorticosi 545, rotazione, linee vorticali 546, vortici 547, teor. di Helmholtz 547.

Flusso 413, linee di flusso 544.

Folium equaz. 44, punti singolari 312.

Forme lineari 131, linearmente dipendenti 131, matrice di un sistema di forme 132, di grado k di n variabili 187, linearmente indipendenti 188, forma definita, indefinita, semidefinita, forme quadriche 188, id. riducibili 189, forma canonica di una quadrica 189, invarianti e covarianti di forme 189-191, id. delle binarie quadratiche, cubiche, biquadratiche 191, riduzione a forma canonica della forma binaria cubica 192.

Forza rappresentazione 440, composizione 442, id. di forze parallele 444, equivalenza sistemi di forze 443, forza d'attrito 447-448, misura di una forza 462, 467, forza istantanea o di percossa 463, d'inerzia 484, perduta 484, centrifuga, di strascinamento, di Coriolis 522, centrifuga composta 523.

Forza viva (o energia cinetica) di un punto 463, di un sistema 490, di un sistema rigido 507, relazione fra forza viva e lavoro 464, 498.

Foucault pendolo 525.

Frazioni continue convergenza, divergenza, indeterminazione 161, ridotte, quozienti incompleti 161, quozienti completi 162, resto 162, aritmetiche 162, periodiche 163, sviluppo di un irrazionale in f. c., 163, risoluzione dell'equaz. di Diofanto 163.

Frenet formule 327, 412.

Frequenza nei moti armonici 422.

Funzione: generalità 164, classificazioni 164, rappresentazioni grafiche 165, generalità sulle funz. di più variabili 167, razionale intera di una variabile 169-173, problema di interpolazione 170, divisibilità 170, funz. razionale intera di più variabili 173-175, divisibilità, interpolazione 174, funz. simmetriche, alternanti 178, simmetriche delle radici delle equaz. 180-182, funzione di funzione 213, funz. inversa 213, composta 215, funz. crescenti e decrescenti 224, 225, 280, sistema di funz. linearmente indipendenti 229, funz. omogenee 237, razionali fratte 241, 243, id. sviluppo in serie 295, funz. implicita di 1 variabile 271, id. di 2 variabili 272, di più variabili 273, definite da un sistema 273, funz. trascendenti elementari 290, 292, esponenziale 290, circolari, iperboliche, circolari inverse 291-292, funz. ellittiche 297-298, punti e vettori funzioni di variabili numeriche 404-407, funz. di punto 407, funz. potenziale vedi potenziale.

Fuochi delle coniche 54, proprietà focali delle coniche 55-57.

G

Galleggiamento (piano di) 539.

Gauss, funzione di G. 112, criterio di convergenza per le serie 154, teor. sulle equaz. algebriche 176, formula sugli integrali di superficie 270, curvatura di una superficie 339, teor. sulla applicabilità delle superficie 340, costante di gravitazione 527.

Gay-Lussac (legge di) 537.

Geodetiche 342, 413.

Germain Sophie curvatura delle superficie 339.

Gerono lemniscata, equaz. 43, area 303.

Giratore 479.

Giroscopio 515, simmetrico 516.

Gradiente 407, teor. del gradiente 413.

Grado di indeterminazione in un sistema di equaz. lineari 129, G. di una funz. razionale intera 169, 173, di un'equaz. algebrica 176, G. di libertà in un sistema materiale vincolato 453.

Grammo-massa 467.

Grandezza specifica della pressione in un fluido 535.

Gravitazione universale 527.

Green teor. 269.

Gruppo armonico di punti 19, id. di rette 19, G. di sostituzioni 120, id. transitivi, imprimitivi 120.

Guldino teor. 346, 350.

H

Hadamard teor. sulle serie di potenze di variabile reale 287, id. di variabile complesse 289.

Hamilton equaz. nella Dinamica 493, id. se esiste il potenziale 500.

Helmoltz teor. 547.

Hessiano (determinante) di due forme 191, nella ricerca di massimi e minimi 282, id. dei flessi 311, curva Hessiana 311.

Horner risoluzione approssimata delle equaz. algebriche 207.

Hospital (regola di) 277.

Hudde risoluzione equaz. di terzo grado 196.

Huygens teor. 511.

I

Identità fra funzioni razionali intere di 1 variabile 169, id. di più variabili 173.

Idrodinamica vedi **fluidi** (moto).

Idrostatica vedi **fluidi** (equilibrio).

Impulso di una forza 463, di un sistema 501, di un sistema rigido 508.

Inclinazione, angolo Euleriano 72.

Indicatrice sferica delle tangenti 324, delle binormali 325, di Dupin 337.

Indice di un numero complesso 142.

Indipendenza di n funz. di una variabile 229, di m funz. di n variabili 274.

Infinitesimi 216, ordine degli I. 217, valore principale 218.

Infiniti 218, integrali delle funz. con punti di infinito 256.

Inflessioni 310.

Inerzia, legge di I. 461, forza di I. 484, momenti di I. vedi **momenti**, moto per I. 514, legge di I. sui segni nella forma canonica di una quadrica 189.

Insieme vedi **aggregati**.

Integrabilità delle funz. di una variabile 220, delle funz. con punti d'infinito 257, di funz. estesa ad un intervallo infinito 258, delle funz. di due variabili 260, di 3 variabili 261, di funz. di più variabili con punti d'infinito 265, id. in un campo infinito 266, di una serie di funzione 286, 298.

Integrale superiore, inferiore, definito di funz. di una variabile 220, proprietà degli I. definiti 221, derivata di un I. 223, indefinito 238, calcolo del I. definito mediante

l'indefinito 239, I. indefiniti fondamentali 239, I. ellittici 248, 296, id. completi 297, I. generalizzato od improprio 256, definiti singolari 256, estesi d'intervalli infiniti 258, di campo 259, proprietà degli I. di campo 260, I. di spazio 261, semplici delle funz. di più variabili 262, doppi 263, tripli 264, multipli 264-265, I. di campo di funz. con punti d'infinito 265, esteso a un campo infinito 266, cambiamento di variabili negli I. multipli 266-268, I. curvilinei 268, di superficie 269, I. di vettore 406.

Integrale generale, particolare delle equaz. differenziali del 1° ordine 355, singolare idem 356, generale di un'equaz. di 2° ordine 361, particolare, primi id. 362, generale di una equaz. di ordine n , particolare, i -esimi 363, singolari idem 374, I. fondamentali di una equaz. lineare omogenee 365, generale di un'equaz. lineare omogenee a coefficienti costanti 367, sistema integrale generale, particolare dei sistemi di equaz. differenziali 372, 377. I. singolari id. 373, I. generali di un'equaz. ai differenziali totali 377, generale di una equaz. alle derivate parziali lineari 379, I. completo, particolare di una equaz. a derivate parziali del 1° ordine 381, 383, singolare, generale id. 382, 383.

Integrali primi delle equaz. di equilibrio dei fili 459, delle forze vive 467, delle aree 504.

Integral-coseno 252.

Integral-logaritmo 252.

Integral-seno 252.

Integrazione per parti, per sostituzione 240, delle funz. razionali

241-245, di funz. irrazionali 245-251, dei differenziali binomi 250, di funzioni trascendenti 251-255, I. sotto il segno 263, approssimata di un'equaz. differenziale del 1° ordine 360, per serie di un'equaz. differenziale del 1° ordine 361, id. di ordine superiore 371, delle serie di funzioni 286, delle serie di potenze 287, 290.

Intensità di un vortice 547.

Intersezione di 2 rette 33, di 2 cerchi 40, di una retta e un cerchio 39, di una retta e una conica 47, 49, di 3 piani 63, di una retta con un piano 69, di una retta con una sfera, di un piano con una sfera, di 2 sfere 73, di una retta con una quadrica 79, di un piano con una quadrica 81, di una quadrica col piano improprio 85.

Intervallo di definizione di una funz. 164, di convergenza 287.

Intorno di un punto 167.

Invarianti nelle equaz. delle coniche 58, id. delle quadriche 84, di una forma 189, ortogonale, razionale, algebrico, trascendente 190, delle forme binarie di grado 2°, 3°, 4° 191, di un sistema di vettori 402.

Inversione in una permutazione 113, dell'ordine nella derivazione 233.

Invertibilità di un sistema di funzioni 274.

Inviluppo di rette nel piano, algebrico, degenerare 26, di piani, algebrico, degenerare 30, base in una schiera di quadriche 95, degeneri in una schiera di quadriche 96, di curve piane 318, 410, di superficie ad 1 parametro 331, id. a 2 parametri 334, dei piani osculatori 333, dei piani rettificanti 334, dei piani normali 334.

Involuzione su una retta 21, ellit-

tica, iperbolica, degenerare 22, in un fascio di rette o piani 22, degli angoli retti (o circolare od ortogonale) 23.

Iperbole riferita agli assi 53, agli asintoti 54, equaz. parametriche 54, polari 57, proprietà metriche e focali 55-57, quadratura 302, rettificazione 305.

Iperboloide ad 1 falda, a 2 falde 90, volume di una porzione di I. ad una falda 347.

Irriducibilità di una funz. in un campo di razionalità 199.

Isobariche funzioni 179, superficie 536.

Isocronismo delle piccole oscillazioni 487.

J

Jacobiano di 2 forme 191, di n funzioni 238.

Jamet criterio di convergenza 154.

Joule 468.

K

Kater pendolo reversibile 512.

Keplero equaz. nel moto centrale 473, legge del moto dei pianeti 526.

Kilogrammetro 467.

Kilowatt 468.

Kummer criterio di convergenza 154.

L

Lagrange metodo di interpolazione 170, risoluzione equaz. di 3° grado 196, id. di 4° grado 198, calcolo approssimato delle radici 208, teor.

del valor medio 226, equaz. differenziale di primo ordine 360, metodo di integrazione di equaz. alle derivate parziali 384, equaz. della statica, metodo dei moltiplicatori 451, id. metodo delle coordinate del sistema 453, equaz. della Dinamica 1^a forma 485, id. nella seconda forma 492, id. se esiste il potenziale 500, funzione di L. 501, equaz. del moto dei fluidi 541.

Laguerre formula nella involuzione ortogonale 23.

Lanceret formula 327.

Landen, trasformazione negli integrali ellittici 297.

Laplace teor. sui determinanti 123, equaz. alle derivate parziali 528.

Lavoro virtuale di di una forza 449, di un sistema rigido 449, principio dei lavori virtuali 449, effettivo di una forza 463, se la forza dipende da un potenziale 465, elementare e totale di un sistema di forze 496, relazioni fra potenziali e lavoro 499.

Legendre forme coniche degli integrali ellittici 248, area ellissoide 351, trasformazioni nelle equaz. a derivate parziali 385.

Leibnitz potenza del polinomi 116, derivata di un prodotto di funzioni 227.

Lemniscata vedi **Bernouilli** e **Gerono**.

Liapunof instabilità dell'equilibrio 500.

Limite superiore ed inferiore di un aggregato 145, id. di funzione reale 166, 167, L. di una successione o aggregato ordinato di numeri reali 146, id. complessi 148, L. nelle operazioni 149-150, limiti speciali 151, 278, 279, 280, L. di vettori 405.

Linea nodale 71, dei centri di curvatura 327, singolare di una superficie 331, di curvatura 342, 413, asintotiche 341, 413, geodetiche 342, 413, di forza 466, di corrente o flusso 544, vorticale 546.

Liouville formula nelle equazioni differenziali lineari 365.

Lipschitz condizione per l'esistenza dell'integrale in un'equaz. differenziale del 1^o ordine 355, id. per i sistemi 372.

Liquidi vedi fluidi.

Logaritmo reale, naturale 294, volgare 295, complesso 295.

Lossodromica equaz. 76, lunghezza 320.

Lumaca vedi Pascal.

Lunghezza delle curve piane 304, di curve speciali 305-307, delle curve storte 319, di curve storte speciali 320, della tangente, normale, sottotangente, sottonormale 309.

Luogo mobile e fisso dei centri di istantanea rotazione 434, 435.

M

Mac-Laurin formula per le funz. razionali intere di 1 variabile 171, id. di più variabili 175, formula abbreviata per le funz. di 1 variabili 276, sviluppo in serie delle funz. di 1 variabili 220, id. di più variabili 298-299, teor. sull'attrazione dell'ellissoide 532.

Mariotte legge sui fluidi 537.

Massa 461, 467, di un continuo 475.

Massimo comun divisore fra funz. razionali intere 171.

Massimo e minimo di un aggregato 146, di una funz. reale 166, relativi delle funz. di 1 variabile 225,

- 280, id. di più variabili 281, nei punti di discontinuità della derivata 281, delle funz. implicite 283-284, di una funz. di più variabili legate da relazioni 284, relativi nel Calcolo delle variazioni 386, assoluti id. 387, condizionati id. 388.
- Matricce** 121, derivata 122, caratteristica di una M. 122, moltiplicazione delle M. 126, M. di più forme 132.
- Media** aritmetico-geometrica e aritmetico-armonica 150, 1° teor. della media 221, 2° teor. della media 222.
- Megadine** 468.
- Megaerg** 468.
- Metacentro** 540.
- Meusnier** teor. sulla curvatura 337.
- Minimi** vedi massimi.
- Minore** di un determinante 122, complementare 122.
- Misura** dei segmenti di una retta 137, delle aree, lunghezze, volumi, forze, masse ecc. vedi area, lunghezze ecc.
- Modulo** di un numero complesso 140, degli integrali ellittici 148, di un sistema di logaritmi 295, di un vettore 395.
- Moivre** potenza di un numero complesso 141.
- Moltiplicatori** di Lagrange 451.
- Moltiplicazione** fra numeri reali 135, id. complessi 139, di matrici 126, di serie 156, scalare di vettori 398, vettoriale di vettori 397.
- Momento** di un vettore rispetto a un punto 401, risultante 402, rispetto a un asse 402, rispetto a un vettore 402, mutuo di 2 sistemi di vettori 403, di primo ordine o statico 475, d'inerzia rispetto a un punto, piano od asse 479, complesso o misto di inerzia 480, di inerzia di figure speciali 480-482, delle quantità di moto 502, id. dei corpi rigidi 508.
- Monge** equaz. differenziale 360.
- Moto** (Cinematica) rettilineo uniforme 417, id. vario 418, id. uniformemente vario 419, odografo 420, oscillatorio armonico 422, id. smorzato 423, id. espansivo 424, elicoidale 424, sotto accelerazione costante 425, di traslazione, di traslazione istantanea 426, di rotazione, di rotazione istantanea 426, elicoidale, elicoidale istantaneo 426, finito di un sistema rigido 427, composizione dei moti finiti 428-429, id. degli istantanei 433-434, rispetto a due terne di assi l'una fissa e l'altra mobile 430-433, relativo, assoluto 430, di un sistema piano nel piano 434, di un sistema rigido intorno ad un punto fisso 438, di un sistema rigido libero 439.
- Moto** (Dinamica) di un punto materiale libero 462, id. equaz. intrinseche 462, di un punto sollecitato da forza costante 469, dei gravi nel vuoto 469, di un punto sollecitato da una forza funzione del tempo 470, id. da forza di direzione costante 470, moto verticale di un grave in un mezzo resistente 470, di un punto sollecitato da una forza posizionale 471, id. da una forza centrale 472, dei proiettili in un mezzo resistente 473, di n punti liberi 485, di un punto sopra una linea 486, di un punto pesante sopra una linea 486, su un cerchio (pendolo semplice) 487, 493, su una cicloide (pendolo cicloidale) 488, di un punto su una superficie 489, id. non soggetto a forze 489, id. su

una sfera (pendolo sferico) 489, 493, 494, di un punto sopra una linea soggetto a forza dipendente da un potenziale 505, id. sopra una superficie di rotazione 505, di un corpo rigido intorno ad un asse fisso 509, id. in casi speciali 510, di un corpo pesante intorno ad un asse (pendolo composto) 511, di un corpo rigido intorno ad un punto fisso 512, di un corpo rigido pesante sospeso pel baricentro 512, id. nel caso che l'ellissoide d'inerzia sia di rotazione 514, di un giroscopio 515, di precessione 515, di un corpo rigido libero 518, di un corpo rigido pesante 519.

Moto relativo di un sistema 521, id. in casi particolari 522, caduta di un grave tenendo conto della rotazione della terra 523, moto di un punto pesante su una curva di un piano verticale animato di moto traslatorio 523, id. rotatorio 524, pendolo di Foucault 525, moto relativo di 2 punti che si attraggono con forza proporzionale alle masse e funz. della distanza 526, dei pianeti intorno al sole 526.

Moto dei fluidi vedi **Fluidi**.

N

Newton potenza del binomio 115, metodo d'interpolazione 170, somma delle potenze simili delle radici di un'equaz. 179, approssimazione nel calcolo delle radici 206, le 3 leggi della Dinamica 461-462, teor. sull'attrazione 528.

Nicomede conoide equaz. 42, area 303.

Normale ad una conica 54, alle quadriche 93, ad una curva piana 308, 409, principale ad una linea storta 323, 411, ad una superficie 329.

Numeri triangolari, piramidali, figurati 115, irrazionali e reali 133-136, complessi 139-141, Bernouilliani 292, Euleriani 293.

O

Odografo 420.

Ombelichi di una quadrica 97, di una superficie qualunque 338, 343.

Omeoidi 530, attrazione di un O. elementare, qualunque 530.

Omogeneità nelle funzioni 237, nell'equaz. differenziali 357, 369, nelle equaz. della meccanica 469.

Omologia fra 2 piani 102, solida 105.

Omotetia piana 102, nello spazio 105.

Ordine di una curva algebrica 24, di una sostituzione 119, di un infinitesimo 217, di un infinito 219, di una equaz. differenziale 354.

Ortogonalità di 2 rette nel piano 35, di 2 cerchi 40, di 2 piani 62, di 2 rette nello spazio 67, di retta e piano 67.

Oscillazione di una funzione 211, 214.

Osculazione fra curve piane 314.

Ovale del Cassini, vedi **Cassini**.

P

Parabola equaz. cartesiana 48, 54, tangenziale 54, polare 57, asse 51, fuoco 55, proprietà metriche 56, focali 57, quadratura 302, rettificazione 305, lunghezza normale e sottonormale 309, curvatura 316,

P. di sicurezza 468, baricentro di un segmento 478.

Paraboloidi 85, 91, piani principali 87, degeneri 91, P. ellittico 91, iperbolico 92, confocali 98, volume del P. ellittico 347.

Parallelismo di 2 rette nel piano 55, di 2 piani 62, di 2 rette nello spazio 67, di retta e piano 67.

Parametro delle coniche 57, del moto elicoidale 427.

Pascal lumaca equaz. 43, area 203, lunghezza 307, triangolo dei coefficienti binomiali 115, principio di Idrostatica 535.

Pendolo semplice 487, 493, cicloidale 488, sferico 489, 493, 494, composto 511, reversibile di Kater 512, balistico 517, di Foucault 525.

Percossa: forza di P. 463, P. sopra un sistema di punti 494, in un corpo rigido con un asse fisso 516, id. con un punto fisso 518, id. sopra un corpo rigido libero 519.

Periodo delle funz. circolari, esponenziale, iperboliche 291, nel moto armonico 422.

Permutazioni 113.

Perpendicolarità vedi **Ortogonalità**.

Peso di una funzione 179.

Pianeti moto 526.

Piano equaz. 60-61, coord. pluckerie 61, per 3 punti 62, 65, per un punto $\parallel$ ad un piano 62, condizione perchè 4 punti appartengano ad un piano 62, id. perchè 4 piani appartengano ad un punto 62, perchè 3 piani siano $\parallel$ ad una direzione 63, distanza di un punto da un piano 63, P. punteggiato 65, per un punto $\perp$ ad una retta 68, per 2 punti 68, per una retta 68, per un punto $\parallel$ ad una retta 69, per una retta $\parallel$ ad una direzione 69, per una retta ed un

punto 69, tangente ad una sfera 72, radicale 73, doppio 79, tangente ad una quadrica 81, polare rispetto ad una quadrica 82, autocongiugato id. 82, per una retta e tangente ad una quadrica 85, diametrali coniugati rispetto ad una quadrica 87, principali id. 87, ciclici delle quadriche 97, collineari 100, limiti nella collineazione 104, coniugati nella polarità 107, autoconiugati id. 107, normale ad una linea gobba 321, tangente ed osculatore id. 322, rettificante id. 324, tangente ad una superficie 329, invariabile della coppia d'impulso 504, di carica 538, di galleggiamento 539.

Plintoidi 532.

Poinsot (ellissoide di) 482.

Poisson formule di Cinematica 433, equaz. di P. 528.

Polarità definita da una conica 51, id. da una quadrica 83, id. da un cono 84, nel piano 103, nello spazio 107.

Poligono funicolare 454, di Varignon 454, area di un P. date le coordin. dei vertici 36.

Polo di una retta rispetto ad una conica 51, di un piano rispetto ad una quadrica 82, nella polarità 103, 107, delle accelerazioni 436, della rotazione 439.

Poloide 438, 513.

Poncelet 467.

Portata di un vortice 547.

Postulato di Dedekind 133, della continuità 137, della statica 441.

Potenza del binomio 115, del polinomio 116, di un irrazionale 135, ad esponente irrazionale 136, di un complesso 141, di un punto rispetto ad un cerchio 40, id. rispetto ad una sfera 73, di una forza 466-467.

Potenziale 453, 465, di gravità 465, delle forze di attrazione o repulsione 465, di un sistema di forze 497, di velocità 543, delle accelerazioni 541.

Pressioni nei sistemi articolati 454, in un punto di un liquido 535, di un liquido su una parete piana, sopra una superficie curva 538.

Primitiva di una funzione 226.

Principio dei lavori virtuali 449, di D'Alembert 484.

Probabilità semplice, totale, composta 117, negli esperimenti ripetuti 118.

Problemi isoperimetrici nel Calcolo delle variazioni 388.

Prodotti infiniti convergenza, divergenza, indeterminazione 159, di fattori positivi 160, convergenza assoluta 160.

Prodotto di numeri reali o complessi di matrici, serie, vedi moltiplicazione, P. di un numero per un vettore 396, P. scalare o interno di 2 vettori 398, vettoriale o esterno id. 397, delle funz. *grad*, *div*, *rot*, 409.

Progressione aritmetica (teor. della) 111.

Proiettività fra forme di 1^a specie 20, id. ellittica, iperbolica, parabolica 21, fra forme di 2^a specie 99, fra forme di 3^a specie 104.

Pseudosfera 75, 340.

Pulsazione nei moti armonici 422.

Punteggiata 3, 64, geometria sulla punteggiata 18-19.

Punto limite nella proiettività 21, unito id. 21, doppio nell'involuzione 23, ciclico 23, 41, di contatto di una retta con una conica 47, coniugati rispetto ad una conica 51, base di un fascio di coniche 59, comune a 2 rette nel piano

33, 37, id. a 3 piani 63, P. come involuppo di rette 37, id. di piani 64, P. coniugato rispetto ad una conica 51, id. rispetto ad una quadrica 81, autoconiugato rispetto ad una quadrica 82, ellittico, parabolico, iperbolico su una quadrica 85, P. coniugati nella polarità 103, 107, singolare di una curva piana (doppio, isolato, di regresso, multiplo, saliente, d'arresto) 311-312, singolari nelle curve storte (a tangente stazionaria, a piano osculatore stazionario) 328, singolare su una superficie 330, sferico 338, iperbolico, parabolico, ellittico su una superficie 341, P. funzione di variabili numeriche 404, 406, P. materiale 461.

Q

Quadratrice di Dinostrato 45.

Quadrature approssimate 301-302.

Quadriche equaz. 77, discriminante 77, degeneri, Q. limite 78, per 9 punti o tangente a 9 piani 79, intersezione con una retta 79, id. con un piano 81, piano tangente 81, intersezione col piano improprio 85, le 3 famiglie di Q. 85, centro, diametri, piani diametrali, cono asintotico 86, coppie e terne di piani diametrali coniugati 86, piani principali 87, Q. rotonde 88, equaz. normale 88, classificazione e forme Q. a centro 88-91, id. Q. prive di centro 91-92, equaz. tangenziali ridotte 92, piano tangente e retta normale 93, comportamento dell'equaz. delle Q. rispetto a trasformazioni di assi ortogonali 93,

classificazione mediante i segni degli invarianti 94, fascio di Q. 95, schiera di Q. 95, sezioni circolari 96, quadriche a centro confocali 97, paraboloidi confocali 99, coniche focali di una Q. 99, Q. fondamentale di una polarità 107, Q. di n variabili 188, riducibili 188, in forma canonica 189.

Quantità di moto 465, risultante delle Q. di moto in un sistema 501, id. rigido 508, momento risultante delle Q. di moto 502, 508.

R

Raabe criterio di convergenza 154.

Radice m -esima aritmetica di un numero reale 136, R. m -esime di un numero complesso 142, id. di un reale 142, dell'unità 143, R. di 1 e -1 degli ordini 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 in forma algebrica 143, id. degli ordini 2, 3, 4, 5, di i 144, R. di un'equaz. algebrica 176, multiple 177, 185, complesse di un'equaz. a coefficienti reali 177, R. comuni a 2 equaz. 182, separazione delle radici di un'equaz. 202-205, limitazione delle R. 205, R. razionali 205, irrazionali 206-208, complesse 208.

Raggio di curvatura delle curve piane 315, di flessione 325, di torsione 326, di convergenza di una serie di potenze 288, di inerzia o di girazione 479, medio del momento polare 480.

Rango di una matrice 122.

Rapporto semplice di tre punti 3, di tre rette 5, di tre piani 6, direttivo d'una retta 7, delle distanze di un punto di una conica

dal fuoco e dalla direttrice 55, incrementale di una funz. di 1 variabile 222, id. parziale di una funz. di più variabili 230, id. di un vettore 405, fra gli incrementi di 2 funzioni 275.

Rappresentazione analitica delle curve piane 23-26, delle superficie 27-29, della linea storta 30, grafica dei numeri reali 138, id. dei complessi 141, delle funzioni 165, delle forze 440.

Razionalità (campo di) 199.

Realità delle radici di un'equaz. 204.

Reazioni dei vincoli 452, dell'asse nel moto intorno ad un asse fisso 509.

Resto di una serie 153, di una frazione continua 162, dello sviluppo abbreviato di Taylor 276, 277, in una serie di funzioni 285.

Rete di sfere 73.

Retta unita nella proieattività 22, doppia nell'involuzione 22, isotrope o cicliche 23, coniugate rispetto ad una conica 51, principali rispetto ad una conica 52, R. nel piano equaz. 30-31, per un punto di dato coefficiente angolare 33, per un punto $\parallel$ ad una retta 33, id. $\perp$ ad una retta 33, R. nello spazio equaz. 65-66, per un punto $\parallel$ ad una direzione 68, per 2 punti 68, per un punto $\perp$ ad un piano 68, per un punto $\parallel$ ad un piano 68, per un punto ed in un dato piano 69, equaz. pluckeriana di una retta nello spazio 70, R. coniugate rispetto ad una quadrica 82, limiti nella collineazione 100, rettificante, polare 334, osculatrice ad una superficie 340.

Rettificazione delle curve piane 304, delle storte 319.

Riccati equaz. differenziale 359.

Riducibilità delle funzioni in un campo di razionalità 199.
Riduzione di un sistema di vettori 403, di un sistema di forze 444.
Riemann teor. sulle serie 155, condizioned'integrabilità per le funz. di 1 variabile 221, id. di più variabili 260, 261.
Risoluzione algebrica delle equaz. 199-201, id. numerica 205-208.
Risultante di più funzioni 182, di vettori 396, di forze 442, delle quantità di moto 501, 508.
Roberval costruzione della tangente alle curve piane 422.
Rolle teor. sulle funz. derivabili 225, sulla separazione delle radici 202.
Rotazione nel piano di un vettore 400, di un vettore 408, teor. della rotazione 413, finita, istantanea e loro composizione 428-429, componenti della rotazione mediante gli angoli euleriani 439, di un fluido 546.
Rouché teor. sulle equaz. lineari 129.
Ruffini divisibilità di una funzione razionale per $x - a$ 171, teor. sulla equaz. algebriche 201.

S

Sarrus calcolo di un determinante di 3° ordine 125.
Savary formula sui centri di curvatura 437.
Scambio 119.
Schiera di involucri 27, di coniche 59, di quadriche 95, di coni 98.
Secante sviluppo in serie 293.
Segmenti tagliati da una retta sugli assi 31, id. da un piano 61.
Seno 281, iperbolico 291, amplitudine 297, di un triedro 13-14.

Separazione delle radici in un'equaz. algebrica 202-205.
Serie 152, convergenza, divergenza indeterminazione 152, a termini positivi 153, a termini reali qualunque 155, a termini complessi 155, operazioni sulle serie 155, alcune serie speciali 156, calcolo approssimato della somma 157, doppie 158, di funzioni 285, continuità, derivabilità, integrabilità delle serie di funzioni 286, di potenze 286-288, dedotte 287-288, di potenze di variabile complessa 288-289, di Taylor per le funz. di 1 variabile 280, id. di più variabili 298, di Mac-Laurin per le funz. di 1 variabile 290, id. di più variabili 298, binomiale 292, logaritmica 295, sviluppo in serie di certe funzioni 293-294, id. delle funz. razionali fratte 295, di funzioni di più variabili 298.
Serret formule 327.
Sezione nell'insieme dei numeri reali 136, circolare delle quadriche 96, normale d'una superficie 337, principale id. 338, contratta delle vene liquide 545.
Sfera equaz. 72, rete di sfere 73, sistema ∞^3 di sfere 74, osculatrice 328, volume 346, area 350, baricentro 8ª parte volume e area 478, momento d'inerzia rispetto a certi assi 482, attrazione 528.
Sferoide area 352.
Similitudine fra punteggiate 21, fra 2 piani 100, fra 2 spazi 105.
Simmetria rispetto ad un centro 106, id. ad un piano 106.
Simpson quadratura approssimata 301.
Sistema di curve 25, completo di numeri non congruo rispetto ad n 111, di equaz. lineari 128-132, di

equaz. differenziali 372-377, destrogiro di 3 vettori fondamentali 398, rigido materiale 417, olonomo o no 450, articolato 454-456, conservativi 497.

Solidi di rotazione vedi superficie di rotazione.

Soluzioni fondamentali di un sistema di equaz. lineari 130, id. linearmente indipendenti 130, discontinue nel Calcolo delle variazioni 390.

Sostituzioni 118, circolari 119, permutabili 119, gruppi e sottogruppi di S. 120, lineari 186, prodotto di sostituzioni 187, S. ortogonali 187.

Sottonormale 309, polare 310.

Sottotangente 309, polare 310.

Sottrazione fra numeri reali 134, id. complessi 139, fra vettori 396.

Sovraccelerazione 420.

Spazio di piani 63, punteggiato 65.

Spigolo di regresso 331.

Spinta idrostatica 539.

Spirale d'Archimede equaz. 44, quadratura 304, rettificazione 307, sottonormale polare 310, S. iperbolica equaz. 44, quadratura 304, rettificazione 307, sottotangente polare 310, S. parabolica equaz. 44, quadratura 304, rettificazione 307, S. logaritmica equaz. 44, quadratura 304, rettificazione 307, curvatura 316.

Spostamento in una permutazione 113, virtuale, invertibile, non invertibile 448, dipendenti ed indipendenti 451.

Stabilità dell'equilibrio 500.

Statica vedi Equilibrio, dei fluidi vedi Fluidi.

Stella di piani 63.

Stokes teor. 270, 413.

Sturm successione 203, teor. sulla

separazione delle radici 203, teor. sulle equaz. differenziali 366.

Successioni convergenti 132, in generale 147, regolare 147, di Sturm 203, id. generalizzata 204.

Superficie algebrica 28, degenere 29, cilindriche 76, 380, coniche 76, 380, sviluppabili 332, a curvatura costante 339, ad area minima 339, applicabile 340, equipotenziale o di livello 408, 466, 536, di rotazione 381, id. volume 345, id. area 349, id. asintotiche 341, id. linee di curvatura 343, id. momento d'inerzia 482, isobariche 536, di egual densità 536, dei centri di carena 540.

Sviluppabile rettificante 334, polare 334.

Sviluppante 317.

Sviluppata 316.

Sylvester risultante 183.

T

Tangente ad un cerchio 39, ad una conica 47-54, coniugata ad una quadrica 85, ad una linea piana 307, 409, id. algebrica 308, ad una linea storta 321.

Tartaglia triangolo dei coefficienti binomiali 115, risoluzione equaz. 3° grado 196.

Tautocronismo del moto armonico 470, del pendolo cicloidale 488.

Taylor formula per le funz. razionali intere di 1 variabile 172, id. di più variabili 175, formula abbreviata per le funz. di 1 variabile 275, per le funz. di più variabili 276, sviluppo in serie delle funz. 1 variabile 290, id. di più variabili 298, di un vettore 406.

Tensioni nei sistemi articolati 454, nei fili 457.

Termine complementare nello sviluppo di Taylor 276.

Toro equaz. 74, volume 348, area 352.

Torricelli teor. sulla stabilità dell'equilibrio dei sistemi pesanti 500, teor. di Idrodinamica 545.

Torsione 326, 411.

Traiettorie di un sistema semplicemente infinito di curve 410, di un punto 417, delle molecole 542.

Trasendenti elementari 290-292.

Trasformazione delle coordinate cartesiane nel piano 7, delle polari 9, delle cartesiane nello spazio 14, delle pluckeriane nel piano 10, delle polari nello spazio 16, delle pluckeriane nello spazio 16, delle coord. proiettive 38, di coordinate nelle equaz. delle coniche 57, id. delle quadriche 93, lineari di una variabile 193, di Tschirnausen 194, di Landen negli integrali ellittici 297, di Legendre nell'equaz. a derivate parziali 386.

Traslazione semplice 425, continua, istantanea 426, composizione di T. 428.

Trattrice equaz. 44, sottotangente 309.

Trisezione dell'arco 43.

Tschirnausen trasformazione nelle equaz. 194, risoluzione equaz. di 3° grado 196, id. 4° grado 198.

U

Unità fondamentali e derivate 468, tecniche ed assolute per le grandezze meccaniche 467.

Urto di due corpi 519, centrale 521, coefficiente d'elasticità all'urto 520.

V

Vandermonde determinante 125.

Varignon poligono 454.

Variatione di una funzione 387.

Velocità nei moti rettilinei 418, nei moti curvilinei 418, areolare 421, angolare 423, in coordinate polari 421, di trascinamento, relativa, assoluta 431-432, di rotolamento 436, potenziale di velocità e sua conservazione 543.

Vena liquida contratta 545.

Vettori definizione ed operazioni 395-399, in un piano 399-401, localizzati 401, momenti 402, riduzione di un sistema di vettori 403, V. funzioni di variabili numeriche 404-407, applicazioni geometriche ed analitiche della teoria dei vettori 409-414.

Visiera d'Agnesi vedi Agnesi.

Viti principali d'inerzia 519.

Viviani curva di V. equaz. 76, lunghezza 320, area limitata sulla sfera 350, solido di V. volume 348.

Volume di un tetraedo date le coord. dei vertici 71, calcolo del V. 343, delle superficie di rotazione 345.

Vortice 547.

Vorticoide 547.

W

Wallis formula 255.

Watt 468.

Weierstrass punto di W. per le funz. di 1 variabile 166, di più variabili 168.

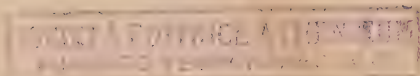
Weingarten formule 342.

Wilson teor. 112.

Wronskiano 239, sua derivata 236.



PREZZO: LIRE 12



UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA



3 0112 067531845